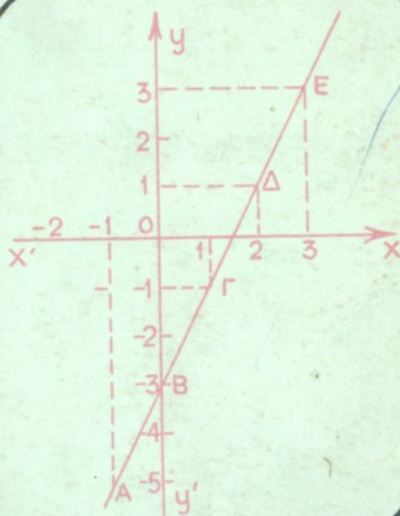
ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ,
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

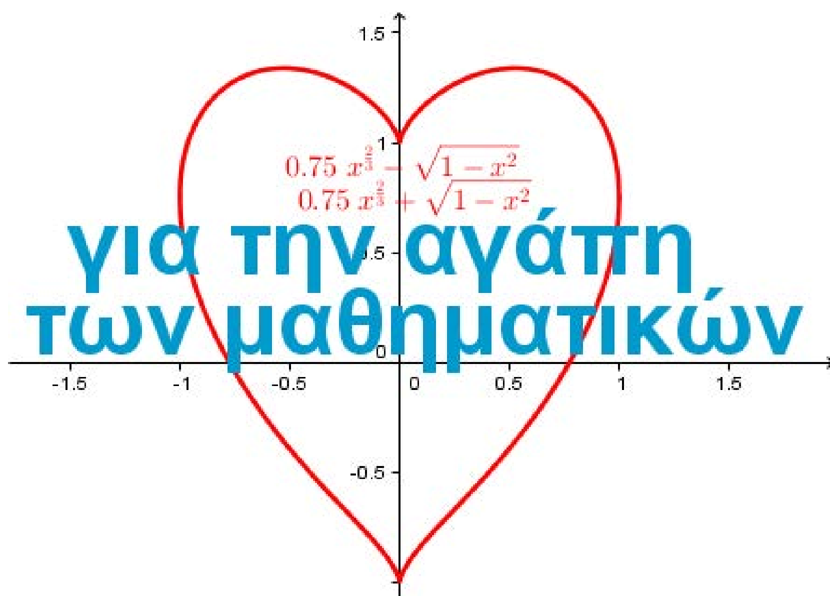
ΑΛΓΕΒΡΑ
ΚΑΙ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄.



ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΙΚΟΣΤΗ ΠΕΜΠΤΗ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ Ο.Ε."
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 4 - ΤΗΛ. 626.816
ΑΘΗΝΑΙ (143)



http://parmenides51.blogspot.gr

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

Ἐκτύπωσις: Γραφικαὶ Τέχναι, Ι. ΜΑΚΡΗΣ Α.Ε.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Ε′ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Τὸ ἀνὰ χεῖρας ἔργον ἀποτελεῖ τὴν Ε′ ἔκδοσιν τῆς «Ἀλγέβρας». Ἡ ἐξάντλησις τῶν προηγουμένων ἐκδόσεων, κατέστησεν ἐπιβεβλημένην νέαν ἔκδοσιν, πλέον συγχρονισμένην καὶ ἱκανὴν νὰ ἀνταποκριθῇ εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῶν ἀσχολουμένων σήμερον μὲ θέματα ἀλγεβρικά, τὰ ὁποῖα ἐν πολλοῖς, ἅπτονται καὶ τῆς περιοχῆς τῆς ἀνωτέρας ἀναλύσεως. Ἡ εὐμενεστάτη ὑποδοχή, ἧς ἔτυχεν ἡ ἡμετέρα «Ἄλγεβρα» κατὰ τὰς τέσσαρας μέχρι τοῦδε ἐκδόσεις της, ἐνδεικτικὴ τῆς ἐκτιμήσεως καὶ τῆς ἀγάπης μεθ' ἧς περιβάλλεται τὸ ἔργον μου παρὰ τῶν ἀξιοτίμων κ.κ. Συναδέλφων καθηγητῶν τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν ἀγαπητῶν μαθητῶν τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων Μέσης Παιδείας, μὲ ὑπεχρέωσεν νὰ καταβάλω συνεχῆ προσπάθειαν διὰ τὴν συμπλήρωσιν καὶ βελτίωσιν τῆς ὕλης της.

Ἡ Ε ἔκδοσις οὐσιωδῶς διαφέρει τῶν προηγουμένων, τόσον ὡς πρὸς τὸ περιεχόμενον, ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὴν διάταξιν τῆς ὕλης. Σημειοῦμεν τὰς πλέον σπουδαίας τῶν μεταβολῶν καὶ συμπληρώσεων, διότι ἄλλως μακρὸς θὰ ἐγίνετο ὁ λόγος, περιοριζόμενοι νὰ τονίσωμεν, ὅτι ἡ νέα «Ἄλγεβρα» εἶναι σχεδὸν ν έ ο ν ἔ ρ γ ο ν.

Ἡ ὕλη τοῦ ἄλλοτε «ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ» τῆς Ἀλγέβρας προσετέθη εἰς τὰς οἰκείας ἑνότητας, ὥστε ἡ διαστρωμάτωσις τῆς ὕλης νὰ ἀποκτήσῃ ὀργανικότητα καὶ ἀλληλουχίαν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὕλη αὕτη ἀφορᾷ κυρίως εἰς μαθητὰς Πρακτικῶν Λυκείων καὶ ὑποψηφίους Ἀνωτάτων Σχολῶν, ἐσημειώσαμεν δι' ἀστερίσκου τὰ σχετικὰ κεφάλαια, ὥστε τὸ βιβλίον νὰ εἶναι εὔχρηστον καὶ διὰ τὰ τμήματα κλασσικῆς κατευθύνσεως τῶν Γυμνασίων μας.

Εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς ἐπιμένομεν ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν ὅρων «σχετικὸς» ἢ «πραγματικὸς» ἀριθμός, ἀντὶ τοῦ ἀντεπιστημονικοῦ «Ἀλγεβρικός».

Ἐνωρὶς ἐκθέτομεν τὸ κεφάλαιον περὶ ριζῶν, ὥστε ἡ ὕλη τῶν κεφαλαίων περὶ ἐξισώσεων ρητῶν ἢ ἀρρήτων, ὡς καὶ τῶν ἀνισοτήτων νὰ ἀναπτύσσεται ἀπροσκόπτως, ὡς ἓν ἑνιαῖον ὅλον.

Ἰδιαιτέρως ἐπλουτίσθη ἡ ὕλη τῶν κεφαλαίων ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἡ θεωρία τῶν πολυω

νύμων, τῶν ἀπολύτων τιμῶν, τῶν ἀκολουθιῶν καὶ σειρῶν, ἡ Συνδυαστική, τὸ περὶ ὁριζουσῶν.

Ὡσαύτως ἰδιαιτέρα φροντὶς κατεβλήθη διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν Συναρτήσεων καὶ τῶν γραφικῶν αὐτῶν παραστάσεων, τῆς θεωρίας τῶν παραγώγων καὶ τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῶν.

Πλεῖστα ὅσα κεφάλαια ἐγράφησαν εἰς τὴν νέαν ἔκδοσιν ἐξ ὑπαρχῆς. Αἱ ἀσκήσεις τῶν παλαιῶν ἐκδόσεων κατόπιν ἐπιλογῆς συμπεριελήφθησαν εἰς τὸ παρὸν ἔργον, ἐπλουτίσθησαν δὲ μὲ νέας ἀσκήσεις, πολλαὶ τῶν ὁποίων εἶναι θέματα δοθέντα τελευταίως εἰς ἐξετάσεις Ἀνωτάτων Ἑλληνικῶν καὶ ξένων Σχολῶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν 4565 ἀσκήσεων, τῶν περιεχομένων εἰς τὴν νέαν ἔκδοσιν, ἀποτελεῖ εὔγλωττον μαρτυρίαν, τοῦ θησαυροῦ τῶν ἀλγεβρικῶν θεμάτων, τὰ ὁποῖα ἐξετάζονται εἰς τὴν ἔκδοσιν ταύτην.

Εὐελπιστῶ ὅτι καὶ ἡ νέα «Ἄλγεβρα» θὰ ἀποτελέσῃ ἀπαραίτητον βοήθημα διὰ τοὺς διδάσκοντας καὶ τοὺς διδασκομένους τὰ Μαθηματικά, τοῦτο δὲ θὰ εἶναι καὶ ἡ βαθυτέρα καὶ μεγαλυτέρα ἱκανοποίησίς μου.

Ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης θεωρῶ ὑποχρέωσίν μου νὰ ἐκφράσω θερμοτάτας εὐχαριστίας πρὸς τὸν κ. Ἰωάννην Ταμβακλῆν, διακεκριμένον καθηγητὴν τῶν Μαθηματικῶν τῆς Βαρβακείου Προτύπου Σχολῆς, δι' ἣν μοὶ παρέσχε πολύτιμον βοήθειαν, διὰ τῆς συνεργασίας του εἰς τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν τῆς Ἀλγέβρας, τόσον ὡς πρὸς τὸν ἐμπλουτισμὸν καὶ τὴν ἀναπροσαρμογὴν τῆς ὕλης, ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὴν διόρθωσιν τῶν τυπογραφικῶν δοκιμίων.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 10 Ὀκτωβρίου 1959

Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
ΚΑΙ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΣΧΕΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Προεισαγωγικαὶ γνώσεις

1. Ὁρισμὸς καὶ σκοπὸς τῆς Ἀλγέβρας. Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν καὶ ἔχει σκοπὸν νὰ γενικεύῃ καὶ νὰ ἁπλοποιῇ τὰ ζητήματα τῆς Ἀριθμητικῆς· δηλ. ἡ Ἄλγεβρα εἶναι μία *γενικὴ Ἀριθμητική*· εἶναι, κατὰ τὸν Νεύτωνα, *μία διεθνὴς Ἀριθμητική*.

2. Χρῆσις τῶν Γραμμάτων. Διὰ νὰ γενικεύῃ καὶ νὰ ἁπλοποιῇ ὅλα τὰ ζητήματα, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τοὺς ἀριθμούς, ἡ Ἄλγεβρα χρησιμοποιεῖ τὰ γράμματα τῆς ἀλφαβήτου μὲ τὰ ὁποῖα παριστάνει τοὺς ἀριθμούς.

Κατὰ συνθήκην, χρησιμοποιεῖ τὰ πρῶτα γράμματα τῆς ἀλφαβήτου α, β, γ, δ, . . . διὰ νὰ παραστήσῃ τοὺς *γνωστοὺς* ἀριθμοὺς καὶ τὰ τελευταῖα γράμματα . . . φ, χ, ψ, ω ἢ x, y, z διὰ νὰ παραστήσῃ τοὺς *ἀγνώστους* ἀριθμούς.

Ὅταν εἰς ἕνα ζήτημα ἕνα ποσὸν δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς, κατὰ τὰς διαφόρους περιστάσεις, αἱ τιμαὶ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ δύνανται νὰ παρασταθοῦν μὲ τὰ γράμματα

$$\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots \alpha^{(\nu)}$$

τὰ ὁποῖα ἐκφωνοῦνται: ἄ λ φ α τ ο ν ο ύ μ ε ν ο ν, ἄ λ φ α δ ί σ τ ο ν ο ν, ἄ λ φ α τ ρ ί σ τ ο ν ο ν, ... ἄ λ φ α ν ί τ ο ν ο ν,

ἢ μὲ τὰ γράμματα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_\nu$,

τὰ ὁποῖα ἐκφωνοῦνται: ἄ λ φ α ἓ ν, ἄ λ φ α δ ύ ο, ἄ λ φ α τ ρ ί α, ... ἄ λ φ α ν ί.

3. **'Αλγεβρικὰ σύμβολα**. Ὅπως εἰς τὴν 'Αριθμητικήν, οὕτω καὶ εἰς τὴν Ἄλγεβραν χρησιμοποιοῦμεν διάφορα σημεῖα ἢ σύμβολα διὰ νὰ δηλώσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξύ των.

1ον. *Σημεῖα πράξεων*. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν (ὅπως εἰς τὴν 'Αριθμητικὴν) τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ + (σὺν) καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ — (πλήν).

Π.χ. τὸ $\alpha+\beta+\gamma$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

Τὸ $\alpha-\beta$ παριστάνει τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α.

Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τὸ × ἢ τὸ · τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται ἐ π ί.

Π. χ. τὸ $5 \cdot 4 \cdot 12$ παριστάνει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 5, 4, 12.

Ὅταν οἱ παράγοντες ἑνὸς γινομένου παρίστανται μὲ γράμματα, παραλείπομεν συνήθως τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ γράφομεν τὰ γράμματα τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου.

Π.χ. τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta\times\gamma$ ἢ $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ γράφεται ἁπλῶς $\alpha\beta\gamma$ καὶ ἀπαγγέλλεται: ἄ λ φ α ἐ π ὶ β ἐ π ὶ γ ά μ μ α ἢ ἁ π λ ῶ ς ἄ λ φ α β ῆ τ α γ ά μ μ α.

Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ: τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται δ ι ά.

Π. χ. $\alpha:\beta$ παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ α διὰ τοῦ β.

Τὸ πηλίκον $\alpha:\beta$ παρίσταται συνήθως καὶ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ δηλώνει τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Π. χ. τό $\sqrt{9}$ παριστάνει τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 9.

2ον. *Σημεῖα συγκρίσεως*. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν, αἱ σχέσεις ἰσότητος καὶ ἀνισότητος μεταξὺ δύο ἀριθμῶν σημειοῦνται μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ἡ 'Αριθμητική.

Π.χ. διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴσοι, γράφομεν $\alpha=\beta$ καὶ ἐκφωνοῦμεν: ἄ λ φ α ἴ σ ο ν β ῆ τ α.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β, γράφομεν $\alpha>\beta$ καὶ ἐκφωνοῦμεν: ἄ λ φ α μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ν τ ο ῦ β ῆ τ α.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς α δὲν εἶναι ἴσος μὲ ἕνα ἄλλον ἀριθμὸν β, χωρὶς ὅμως νὰ θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν, ποῖος ἐκ τῶν δύο εἶναι μεγαλύτερος, γράφομεν $\alpha \neq \beta$ καὶ ἐκφωνοῦμεν: ἄλφα διάφορον τοῦ βῆτα.

4. Παρενθέσεις. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, χρησιμοποιοῦμεν τὰς παρενθέσεις (. . .), ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν, ὅτι αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι περικλείονται μεταξὺ τῶν παρενθέσεων, πρέπει νὰ θεωροῦνται, ὅτι ἔχουν ἐκτελεσθῆ.

Π.χ. Τὸ $6+8-5$ φανερώνει ἁπλῶς τὰς πράξεις, τὰ ὁποίας πρέπει νὰ κάμωμεν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 5.

Ἐνῷ τὸ $(6+8-5)$ παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθενται, ὅτι ἔχουν ἐκτελεσθῆ.

Ἐπίσης διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $7+9$ ἐπὶ τὴν διαφορὰν $12-8$ γράφομεν

$$(7+9)\times(12-8) \quad \text{ἢ ἁπλούστερον} \quad (7+9)(12-8).$$

Τὸ $$(\alpha+\beta)(\gamma+\delta+\varepsilon)$$

παριστάνει τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἐκτελεσθέν, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\gamma+\delta+\varepsilon$, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἐπίσης ὡς ἐκτελεσθέν.

Αἱ παρενθέσεις εἶναι τριῶν εἰδῶν:

αἱ συνήθεις *παρενθέσεις* (. .),

αἱ *ἀγκύλαι* [. . .], αἱ ὁποῖαι περικλείουν τὰς παρενθέσεις [. . . (. . .)]

καὶ αἱ *ἑνωτικαὶ γραμμαί* { . . . . }, αἱ ὁποῖαι περικλείουν παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας { . . . [. . . (. . .) . . .] . . . }

Παρατήρησις. Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὰς παραστάσεις

$$5+4\times6+2 \quad \text{καὶ} \quad (5+4)\times(6+2).$$

Ἡ πρώτη φανερώνει, ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ 5 τὸ γινόμενον 4×6 καὶ ἔπειτα εἰς τὸ ἐξαγόμενον 29 νὰ προσθέσωμεν τὸ 2. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης εἶναι $5+24+2=31$.

Ἡ δευτέρα φανερώνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $5+4$, δηλ. τὸ 9, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $6+2$, δηλ. ἐπὶ τὸ 8. Τὸ ἐξαγόμενόν της θὰ εἶναι $9\times8=72$.

5. Πλεονεκτήματα ἀπὸ τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων καὶ τῶν σημείων. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν πῶς ἡ Ἄλγεβρα, μὲ τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων καὶ τῶν σημείων ἁπλοποιεῖ καὶ γενικεύει ὅλα τὰ ζητήματα τῆς Ἀριθμητικῆς, θὰ δώσωμεν ἕνα ἁπλοῦν παράδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ κάτωθι πρόβλημα:

Πρόβλημα: *Μία ἁμαξοστοιχία διανύει 45 χιλιόμετρα τὴν ὥραν· πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς 3,5 ὥρας;*

Ἀφοῦ ἡ ἁμαξοστοιχία εἰς 1 ὥραν διανύει 45 χιλιόμετρα
εἰς 3,5 ὥρας θὰ διανύσῃ 3,5 φορὰς περισσότερον χιλιόμετρα, δηλ. θὰ διανύσῃ
45 χλμ.×3,5 ἢ 157,5 χλμ.

Ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἀλλάξωμεν τὴν ταχύτητα τῆς ἁμαξοστοιχίας καὶ τὸν χρόνον τῆς κινήσεώς της, δηλ. ἐάν, ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 45 καὶ 3,5 θέσωμεν ἄλλους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν νὰ λύσωμεν ἕνα ἄλλο πρόβλημα, ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀλλὰ πρέπει κάθε φορὰν νὰ κάμωμεν τοὺς ἰδίους συλλογισμούς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον.

Τοὐναντίον, εἰς τὴν Ἄλγεβραν ὅλα τὰ προβλήματα τοῦ εἴδους αὐτοῦ, χάρις εἰς τὴν χρῆσιν τῶν γραμμάτων, λύονται μὲ ἕνα μόνον γενικὸν πρόβλημα.

Πράγματι· τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εἰς τὴν Ἄλγεβραν διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Ἕνα κινητὸν διανύει v χιλιόμετρα τὴν ὥραν· πόσα χιλιόμετρα θὰ διανύσῃ εἰς t ὥρας ;

Ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύει v χιλιόμετρα,
εἰς t ὥρας θὰ διανύσῃ v×t ἢ vt χιλιόμετρα.

Τὸ διάστημα λοιπόν, ποὺ θὰ διανύσῃ τὸ κινητὸν εἰς t ὥρας, εἶναι vt. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ **x** τὸ διάστημα αὐτό, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$\boxed{x=vt} \qquad (1).$$

Ἐὰν τώρα θέλωμεν νὰ λύσωμεν ἕνα οἱονδήποτε πρόβλημα τοῦ εἴδους αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὰ γράμματα v καὶ t μὲ τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους παριστάνουν.

Οὕτω, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ μία ἁμαξοστοιχία εἰς 2,5 ὥρας, ἂν κινῆται μὲ ταχύτητα 50 χλμ. τὴν ὥραν, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ v μὲ 50 καὶ τὸ t μὲ 2,5. Τὸ ζητούμενον διάστημα θὰ εἶναι λοιπόν.

x=50 χιλιόμ. ×2,5=125 χιλιόμετρα.

6 **Τύποι**. Μία ἰσότης, ὅπως ἡ ἰσότης **x=vt, ἡ ὁποία δίδει τὴν** τὴν τιμὴν ἑνὸς ἀγνώστου ποσοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν **ἄλλα ποσά,** τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ παρίστανται μὲ γράμματα, **λέγεται *τύπος*.**

Ἐπίσης ἡ ἰσότης $T=\frac{K \cdot E.X.}{100}$, τὴν ὁποίαν εὑρήκαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ ἡ ὁποία δίδει τὸν τόκον Τ **ἑνὸς κεφαλαίου** Κ εἰς Χ ἔτη πρὸς Ε %, εἶναι ἕνας τύπος.

Γενικῶς: *Τύπος εἶναι μία ἰσότης, ἡ ὁποία δίδει ὑπὸ μορφὴν συμπυκνωμένην, τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν δεδομένων ἑνὸς προβλήματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον.*

Ἡ Ἄλγεβρα προσπαθεῖ νὰ δώσῃ εἰς κάθε μαθηματικὸν ζήτημα μίαν γενικὴν λύσιν, ἡ ὁποία νὰ ἐκφράζεται μὲ ἕνα ἢ περισσοτέρους τύπους· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ Ἄλγεβρα εἶναι *ἡ ἐπιστήμη τῶν μαθηματικῶν τύπων.*

7. Πλεονεκτήματα τῶν τύπων. 1ον. Ἕνας τύπος ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν ὅλα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα των.

Οὕτω ὁ τύπος $E=\beta\upsilon$ ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τυχόντος ὀρθογωνίου, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του β καὶ τὸ ὕψος του υ.

2ον. Ἐπίσης ἕνας τύπος φανερώνει κατὰ ἕνα τρόπον σύντομον καὶ σαφῆ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δεδομένων καὶ τοῦ ἀγνώστου ἑνὸς προβλήματος, ἐνῷ ἡ διατύπωσις τῶν σχέσεων αὐτῶν διὰ λόγων θὰ ἦτο γενικῶς μακρὰ καὶ σύνθετος.

Π. χ. Ὁ τύπος $T=\frac{KEX}{100}$ δεικνύει ἀμέσως, ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον, τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ νέον γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ 100.

Ἐπίσης ἀντὶ νὰ εἴπωμεν:

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας Γ ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ π ἐπὶ τὴν διάμετρόν του (διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος), ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν $\Gamma=2\pi R$.

Δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν ἕνα τύπον καὶ νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλους τύπους, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ λύσωμεν νέας σειρὰς προβλημάτων. Ἀργότερον θὰ ἴδωμεν, πῶς κάμνομεν αὐτοὺς τοὺς μετασχηματισμούς.

8. Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑνὸς τύπου. *Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑνὸς τύπου λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα τοῦ τύπου μὲ ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται.*

Π.χ. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τύπου $x=vt$, διὰ $v=45$ καὶ $t=3$ εἶναι $x=45\times3=135$.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ τύπου $x=\frac{\alpha\beta\gamma}{2}$, διὰ $\alpha=3$, $\beta=8$, $\gamma=4$ εἶναι

$$x=\frac{3\cdot8\cdot4}{2}=48.$$

Ἀσκήσεις : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

2. Σχετικοὶ ἀριθμοὶ

9. Ποσά, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ μετρηθοῦν κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Μερικὰ ποσὰ δύνανται νὰ μετρηθοῦν κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς :

Π.χ. Ὁ *δρόμος*, τὸν ὁποῖον *διανύει* ἕνα αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἐκ Τριπόλεως καὶ κινεῖται ἐπὶ τῆς ὁδοῦ Ἀθηνῶν—Καλαμῶν, δύναται νὰ μετρηθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς, καθόσον τὸ αὐτοκίνητον διευθύνεται εἴτε πρὸς τὰς Καλάμας, εἴτε πρὸς τὰς Ἀθήνας.

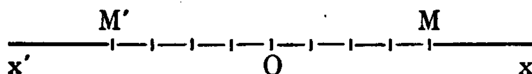
Ἡ *θερμοκρασία* ἑνὸς τόπου δύναται νὰ μετρηθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς: ἄνω τοῦ μηδενὸς ἢ κάτω τοῦ μηδενός.

Ἡ *χρονολογία ἑνὸς γεγονότος* δύναται νὰ μετρηθῇ ἐπίσης κατὰ δύο τρόπους : πρὸ Χριστοῦ, ἢ μετὰ Χριστόν.

Διὰ νὰ προσδιορισθοῦν ἀκριβῶς τὰ ποσὰ τοῦ εἴδους αὐτοῦ, δὲν ἀρκεῖ νὰ μετρηθοῦν μὲ μίαν μονάδα μετρήσεως καὶ νὰ παρασταθῇ τὸ μέτρον των μὲ ἕνα ἀριθμόν· πρέπει ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς νὰ συνοδεύεται καὶ μὲ μίαν *ἔκφρασιν*, ἡ ὁποία νὰ δηλώνῃ τὴν *φορὰν* κατὰ τὴν ὁποίαν ἐμετρήθησαν τὰ ποσὰ αὐτά :

Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται π ρ ο σ α ν α τ ο λ ι σ μ έ ν α ποσὰ ἢ μεγέθη.

Παραδείγματα. 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἕνα κινητὸν κινεῖται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας x′x (Σχ. 1) καὶ ὅτι κατά τινα στιγμὴν εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Ο.



Σχ. 1

Ἐὰν τὸ κινητὸν κινούμενον ἐπί τῆς εὐθείας αὐτῆς, ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο κατὰ 4 μέτρα, δὲν ὁρίζεται ἀκριβῶς ἡ θέσις τοῦ κινητοῦ· διότι τὸ κινητὸν δύναται νά κινηθῇ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο. Πρέπει νὰ εἴπωμεν, ὅτι διήνυσε 4 μέτρα πρὸς τὰ δ ε ξ ι ὰ τοῦ Ο, ὁπότε θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἢ ὅτι διήνυσε 4 μέτρα πρὸς τὰ ἀ ρ ι σ τ ε ρ ὰ τοῦ Ο, ὁπότε θὰ εὑρίσκεται, εἰς τὸ σημεῖον Μ′.

2ον. Ἡ μέση θερμοκρασία ἑνὸς τόπου, δὲν καθορίζεται, ἐὰν εἴπωμεν, ὅτι εἶναι 2, 3, 4..,. βαθμοί· πρέπει νὰ δηλώσωμεν, ἐὰν οἱ βαθμοὶ ἐμετρήθησαν ἄ ν ω ἢ κ ά τ ω τοῦ μηδενός.

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὰς ἐκφράσεις: *πρὸς τὰ δεξιὰ* ἢ *πρὸς τὰ ἀριστερὰ* τοῦ σημείου Ο, *ἄνω* ἢ *κάτω* τοῦ μηδενὸς κλπ. παραδεχόμε-

θα νὰ δηλώνωμεν τὴν *φορὰν* τῶν μεγεθῶν μὲ τὰ σημεῖα + καὶ —, τὰ ὁποῖα λέγονται *σημεῖα προσανατολισμοῦ*.

Π.χ. θὰ λέγωμεν: ὅτι τὸ κινητὸν διήνυσε +4 μέτρα ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 4 μέτρα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου Ο' ἢ ὅτι διήνυσε —4 μέτρα, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 4 μέτρα πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο.

Ἐπίσης λέγομεν, ὅτι ἡ θερμοκρασία ἑνὸς τόπου κατά τινα στιγμὴν εἶναι +12°, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 12° ἄνω τοῦ μηδενός, ἢ ὅτι εἶναι —10 βαθμοί, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἶναι 10 βαθμοὶ κάτω τοῦ μηδενός.

10. Ἀνάγκη τῆς δημιουργίας νέων ἀριθμῶν. Ἐκτὸς τῶν λόγων, ποὺ ἀνεφέραμεν ἀνωτέρω. ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι λόγοι, οἱ ὁποῖοι μᾶς ἐπιβάλλουν νὰ δημιουργήσωμεν νέους **ἀριθμούς**.

Π.χ. Δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν 6—15, ὅπου ὁ ἀφαιρετέος 15 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου.

Ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἐδημιουργήσαμεν τὰ κλάσματα διὰ νὰ κάμωμεν δυνατὴν καὶ τελείαν κάθε διαίρεσιν καὶ εἰς περίπτωσιν ἀκόμη, ὅπου ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου, οὕτω καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ δημιουργήσωμεν ἕνα νέον εἶδος ἀριθμῶν, τοὺς *σχετικοὺς ἀριθμούς*, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ κάθε ἀφαίρεσις.

11. Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί. *Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τὸ σημεῖον τοῦ προσανατολισμοῦ + (πρόσημον +), λέγονται θετικοὶ ἀριθμοί.*

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+1$, $+12$, $+\frac{3}{4}$, $+\sqrt{15}$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐκφωνοῦνται κατὰ σειράν:
σὺν ἕνα, σὺν δώδεκα, σὺν τρία τέταρτα, σὺν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 15.

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τὸ σημεῖον τοῦ προσανατολισμοῦ — (πρόσημον —), λέγονται ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ -5, $-\frac{7}{8}$, $-\sqrt{28}$ εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐκφωνοῦνται κατὰ σειράν:
πλὴν πέντε, πλὴν ἑπτὰ ὄγδοα, πλὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ εἴκοσι ὀκτώ.

12. Σχετικοὶ ἀριθμοί. *Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ μηδενός, χωρὶς κανένα σημεῖον προσανατολισμοῦ, λέγονται σχετικοὶ ἀριθμοί.*

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ -4, $+12$, $+\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{8}$, 0, $-\sqrt{5}$, $+\sqrt{21}$ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκτὸς τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ περιλαμβάνουν καὶ τὸ μηδὲν 0, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι *οὔτε θετικόν, οὔτε ἀρνητικόν*. Τὸ μηδὲν 0 δὲν ἔχει κανένα σημεῖον προσανατολισμοῦ.

13. Φυσικοὶ ἀριθμοί. *Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς, δηλ. οἱ 1, 2, 3, 4, ... , λέγονται φυσικοὶ ἀριθμοί.*

14. Ὁμόσημοι ἀριθμοί. Ἑτερόσημοι ἀριθμοί *Δύο ἢ περισσότεροι σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ὁμόσημοι, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον προσανατολισμοῦ καὶ ἑτερόσημοι, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον προσανατολισμοῦ.*

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+8$, $+\frac{3}{5}$, $+\sqrt{28}$ εἶναι ὁμόσημοι.

Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ -7, $-4{,}5$, $-\frac{3}{4}$ εἶναι ὁμόσημοι.

Οἱ ἀριθμοὶ -8, $+4$, $+\frac{3}{4}$, $-\sqrt{2}$ εἶναι ἑτερόσημοι.

15. Ἀπόλυτος τιμή. *Ἀπόλυτος τιμὴ ἢ μέτρον ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ἀριθμός, χωρὶς τὸ σημεῖον του.*

Π. χ. ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $+8$ εἶναι 8, καὶ τοῦ -12 εἶναι 12.

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ α παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $|\alpha|$.

Π.χ. ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ -5 παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $|-5|$, καὶ ἐκφωνεῖται: ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πλὴν 5.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀπολύτου τιμῆς θὰ εἶναι

$$|-5|=5. \quad |+7|=7.$$

16. Συνθήκη. *Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν του.*

$$\text{Π.χ.} \quad +8, \ =8, \quad +\frac{4}{5}=\frac{4}{5}.$$

Ἡ παραδοχὴ αὐτή, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, δὲν εἰσάγει καμμίαν ἀντίφασιν. Χάρις εἰς αὐτὴν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ παρίστανται, ὅπως οἱ ἀριθμοὶ τῆς Ἀριθμητικῆς.

Οἱ μόνοι λοιπὸν νέοι ἀριθμοί, ποὺ εἰσάγονται εἰς τὴν Ἄλγεβραν, εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

17. Ἀντίθετοι ἀριθμοί. *Δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἀντίθετοι ἢ συμμετρικοί, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ διάφορα σημεῖα.*

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+5$ καὶ -5 εἶναι ἀντίθετοι.

Ὁ σχετικὸς ἀριθμός, ὁ ἀντίθετος τοῦ -15 εἶναι ὁ $+15$.

Ὁ σχετικὸς ἀριθμός, ὁ ἀντίθετος τοῦ α εἶναι ὁ $-\alpha$.

Σημ. Δὲν πρέπει νὰ λέγομεν ποτέ, ὅτι δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουν διάφορα σημεῖα, ἀλλὰ ὅτι εἶναι ἀντίθετοι ἢ συμμετρικοί.

18. Ἰσότης σχετικῶν ἀριθμῶν. *Δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον προσανατολισμοῦ.*

Οὕτω $(-5)=(-5)$, ἐνῷ $(-5)\neq(+5)$.

Ὁμοίως ἡ ἰσότης $\alpha=\beta$

ἐκφράζει, ὅτι οἱ δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ἔχουν τὴν *αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, ἐὰν διαφέρουν, εἴτε κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμήν, εἴτε κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ προσανατολισμοῦ, εἴτε καὶ κατὰ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ προσανατολισμοῦ.

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ $+12$ καὶ $+8$ εἶναι ἄνισοι. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ $+9$ καὶ -9 καθὼς καὶ οἱ $+10$ καὶ -7 εἶναι ἄνισοι.

19. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος. Αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος εἶναι;

1ον. Ἐὰν $\alpha=\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\beta=\alpha$ (συμμετρικὸς νόμος).

2ον. Ἐὰν $\alpha=\beta$ καὶ $\beta=\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\gamma$ (μεταβατικὸς νόμος).

20. Πραγματικοὶ ἀριθμοί. Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ μηδὲν ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν *πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς α εἶναι πραγματικός, ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ α εἶναι εἴτε θετικὸς ἀριθμός, εἴτε ἀρνητικός, εἴτε μηδέν.

Σημ. Ἀργότερον θὰ ἴδωμεν, ὅτι ἐκτὸς τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν εἰς τὴν Ἄλγεβραν καὶ οἱ λεγόμενοι μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Ἐξ ὅλων δὲ τῶν ἀριθμῶν, Ἀλγεβρικοὶ καλοῦνται ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι ρίζαι ἀκεραίου πολυωνύμου μὲ συμμέτρους συντελεστάς. Οἱ πραγματικοὶ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁπωσδήποτε σχετικοὶ ἀριθμοί, δηλ. ἢ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ ἢ μηδέν· ἀλλὰ ὅλοι οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι καὶ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί. Οὕτω ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς $\pi=3,14159\ldots$, (λόγος περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της), δὲν εἶναι ρίζα ἀκεραίου πολυωνύμου καὶ συνεπῶς δὲν εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Οἱ μὴ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ὅπως τὸ π, λέγονται ὑπερβατικοὶ ἀριθμοί.

Ἀσκήσεις 8, 9, 10.

21. Διατάξεις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν κατὰ τάξιν μεγέθους. Ἃς συγκρίνωμεν μεταξύ των, τοὺς σχετικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὴν περιουσιακὴν κατάστασιν δύο προσώπων Α καὶ Β κατά τινα ἡμέραν καὶ τὰ ὁποῖα πρόσωπα εἶχον τὸ αὐτὸ ποσὸν α εἰς τὸ Ταμεῖον των.

1ον. Ἔστω, ὅτι ὁ Α *εἰσέπραξε* 2000 δρχ. δηλ. ἔχει α+2000 δρχ.
ὁ Β *ἐπλήρωσε* 8000 δρχ. δηλ. ἔχει α—8000 δρχ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἡ περιουσία τοῦ Α εἶναι *μεγαλυτέρα* τῆς περιουσίας τοῦ Β.

Δηλ. τὸ +2000 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ —8000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι

I. *Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸν ἀριθμόν.*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι 4>—28, 1>—754.

2ον Ἔστω, ὅτι ὁ Α *εἰσέπραξε* 3000 δρχ., δηλ. ἔχει α+3000 δρχ.
ὁ Β *εἰσέπραξε* 1000 δρχ., δηλ. ἔχει α+1000 δρχ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιουσία τοῦ Α εἶναι *μεγαλυτέρα τῆς* περιουσίας τοῦ Β.

Δηλ. τὸ +3000 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ +1000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

II. *Ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι 8>4, 106>105.

3ον. Ἔστω, ὅτι ὁ Α *ἐπλήρωσε* 3000 δρχ., δηλ. ἔχει α—3000 δρχ.
ὁ Β *ἐπλήρωσε* 1000 δρχ., δηλ. ἔχει α—1000 δρχ.

Πλουσιώτερος εἶναι ὁ Β, διότι ἡ πληρωμή του εἶναι μικροτέρα.

Δηλ. τὸ —1000 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ —3000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

III. *Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἔχει μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι —5>—600, —1>—2564.

4ον. Εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι προτιμότερον νὰ μὴν ἔχῃ κανεὶς τίποτε, δηλ. νὰ ἔχῃ 0 δραχμάς παρὰ νὰ ὀφείλῃ ἕνα ποσόν.

Δηλ. τὸ 0 εἶναι μικρότερον τοῦ +200 καὶ μεγαλύτερον τοῦ —1000.

IV. *Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενός*
Κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι 8>0, 0>—75, —24<0.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς κατὰ τὴν ἀκόλουθον σειρὰν μεγέθους :

—∞ , . . . , —5, —4, —3, —2, —1, 0, +1, +2, +3, +4, . . . +∞.

Μὲ τὸ σύμβολον ∞ (ἄπειρον) παριστάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἀπείρως μεγάλον κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Εἰς τὴν σειρὰν αὐτὴν *κάθε ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἀριστερὰ ἑνὸς ἄλλου εἶναι μικρότερος αὐτοῦ.*

Ἀσκήσεις : 11, 12, 13.

3. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν

22. **Γραφικὴ παράστασις ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ.** Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ ἕνα *εὐθύγραμμον τμῆμα* καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἕνα μέγεθος δύναται νὰ ἀντιστοιχίσῃ ἕνας ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς ἕνα σχετικὸν ἀριθμὸν πρέπει νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι τό εὐθύγραμμον τμῆμα δύναται νὰ διανυθῇ ἀπὸ ἕνα κινητόν, εἴτε κατὰ μίαν ὡρισμένην φοράν, εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν.

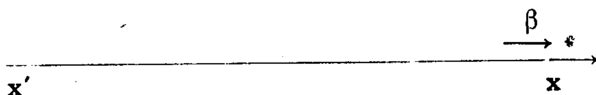
A B

Σχ. 2

Οὕτω τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ (Σχ. 2) δύναται νὰ διανυθῇ εἴτε ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, εἴτε ἀντιθέτως ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΑ ἔχουν προφανῶς τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, ἀλλὰ εἶναι διακεκριμένα μεταξύ των, ἐπειδὴ διηνύθησαν ἀπὸ ἕνα κινητὸν κατά δύο διαφόρους φοράς.

Ὥστε ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον εἶναι ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, εἶναι ἕνα τμῆμα π ρ ο σ α ν α τ ο λ ι σ μ έ ν η ς ε ὐ θ ε ί α ς ἢ ἑνὸς ἄ ξ ο ν ο ς.

23. **Ἄξων.** Ἔστω μία ἀπεριόριστος εὐθεία x′x. Ἕνα κινητὸν



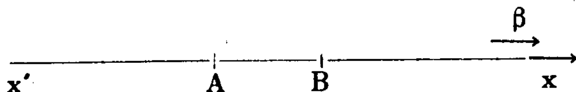
Σχ. 3

δύναται νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, εἴτε κατ' ἀντίθετον φοράν. Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς δύο φορὰς μεταξύ των, δίδομεν εἰς μίαν ἐξ αὐτῶν, αὐθαιρέτως, τὸ ὄνομα *θετικὴ φορά*, ὁπότε ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῇ *ἀρνητικὴ φορά*.

Συνήθως ὡς θετικὴν φορὰν λαμβάνομεν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x′ πρὸς τὸ x καὶ ὡς ἀρνητικὴν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x πρὸς τὸ x′.

Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα x′x *ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ θετικὴ φορὰ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορὰ λέγεται ἄ ξ ω ν ἢ π ρ ο σ α ν α τ ο λ ι σ μ έ ν η ε ὐ θ ε ῖ α.*

24. Θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ εὐθύγραμμα τμήματα (διανύσματα). Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος x′x.



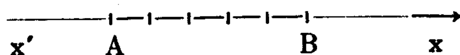
Σχ. 4

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ τοῦ ἄξονος x′x (Σχ. 4) δύναται νὰ διανυθῇ ἀπὸ ἕνα κινητόν, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Ὅταν τὸ κινητὸν ἀκολουθῇ τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος, τότε τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ διανυόμενον ὑπ᾿ αὐτοῦ, θὰ θεωρῆται *θετικόν*, ἄλλως θὰ θεωρῆται *ἀρνητικόν*.

Π.χ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι θετικόν, ἐνῷ τὸ ΒΑ εἶναι ἀρνητικόν.

Τὸ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ τὸ κινητόν, διὰ νὰ διανύσῃ τὸ εὐθ. τμῆμα, ὀνομάζεται ἀρχὴ τοῦ εὐθ. τμήματος καὶ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει τὸ κινητόν, λέγεται τέλος τοῦ εὐθ. τμήματος.

25. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς εὐθ. τμήματος τοῦ ἄξονος x′x. Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος x′x (Σχ. 5). *Θὰ ὀνομάσωμεν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΑ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ μῆκος του, μετρηθὲν διὰ δοθείσης μονάδος, καὶ ὡς σημεῖον τὸ + ἢ τὸ — καθόσον τὸ εὐθ. τμῆμα εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.*



Σχ. 5

Π.χ. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 5) εἶναι +5, ἐνῷ τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΑ εἶναι —5.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\overline{AB}$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται: ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Οὕτως, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα (5) θὰ εἶναι:

$\overline{AB}=+5$, $\overline{BA}=-5$, καὶ $AB=|\overline{AB}|=|\overline{BA}|=5$.

Ἀντιστρόφως Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς ἕνα σχετικὸν ἀριθμὸν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x′x (Σχ. 6) ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν, ὅτι παριστάνει τὸ μηδέν.

Ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ κατὰ τὴν θετικὴν ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, καθ᾿ ὅσον ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι θετικὸς ἢ

ἀρνητικός, ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μῆκος, (μετρηθὲν διὰ τυχούσης μονάδος μήκους), ἴσον μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

x' B O A x

Σχ. 6

Οὕτω ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς (+5) παρίσταται διὰ τοῦ εὐθυγρ. τμήματος ΟΑ τοῦ ἄξονος x'x.

Ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς (—5) παρίσταται διὰ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΒ.

26. Προσδιορισμὸς ἑνὸς σημείου ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος. Τετμημένη ἑνὸς σημείου. Ἔστω ὁ ἄξων x'x καὶ Ο τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ.

x' A O M x

Σχ. 7

Ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ θὰ εἶναι τελείως ὡρισμένον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΜ.

Ἡ ἀλγεβρικὴ αὐτὴ τιμὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΜ λέγεται *τετμημένη τοῦ σημείου Μ.*

Ὥστε : *Τ ε τ μ η μ έ ν η ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἄξονος* x'x *εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΜ.*

Οὕτω : Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ εἶναι +5

» » » » Α » —3.

1ον. Ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου Ο ἔχουν θετικὴν τετμημένην.

2ον. Ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου Ο ἔχουν τετμημένην ἀρνητικήν.

3ον. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Ο εἶναι μηδέν.

Ἀσκήσεις

1. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἐὰν εἶναι :

1ον. β=15 μέτρα, υ=8 μέτρ. 3ον. β=124 μ., υ=12,8 μέτρα.

2ον. β=4,8 μέτρα, υ=3,5 μέτρ. 4ον. β=18,4 μ., υ=17 μέτρα.

2. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\frac{(B+\beta)}{2}\cdot\upsilon$, ὅπου Β εἶναι ἡ μεγάλη βάσις του, β ἡ μικρὰ βάσις του καὶ υ τὸ ὕψος του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἐὰν εἶναι :

1ον. Β=28 μέτρα, β=17 μέτρα, υ=8 μέτρα.

2ον Β=105,60 μέτρα, β=49,5 μέτρα, υ=24,8 μέτρα.

3. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E = \pi R^2$, ὅπου $\pi = 3{,}1415$ καὶ R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του ἐὰν εἶναι:

1ον. R=4 μέτρ. 2ον. R=3,75 μέτρ. 3ον. R=0,25 μέτρ.

4. Τὸ διάστημα s, ποὺ διανύει ἕνα κινητὸν κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν του, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $s = \frac{1}{2} gt^2$, ὅπου g=9,80 καὶ t=χρόνος εἰς δευτερόλεπτα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα αὐτό, ἐάν:

1ον. t=4 δευτερ. 2ον. t=12 δευτερ. 3ον. t=15 δευτερ.

5. Τὸ διάστημα s, ποὺ διανύει ἕνα κινητόν, ὅταν ἐκσφενδονίζεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα, αὐτό, ἐὰν εἶναι:

1ον. $v_0 = 60$ μέτρα, t=5 δευτερ., g=9,80.
2ον. $v^0 = 500$ μέτρα, t=10 δευτερ, g=9,80.

6. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα, εἰς θερμοκρασίαν θ, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V\vartheta = 331{,}3\sqrt{1+\alpha\vartheta}$, ὅπου α εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς διαστολῆς τοῦ ἀερίου. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι $\vartheta = 35^0$ καὶ α=0,00365;

7. Τὸ μῆκος M μιᾶς μεταλλικῆς ῥάβδου εἰς θερμοκρασίαν ϑ^0, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $M = \mu(1+\alpha\vartheta)$, ὅπου μ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου εἰς 0^0 καὶ α ὁ συντελεστὴς διαστολῆς. Ἐὰν α=0,0000144 καὶ μ=3 μέτρα: 1ον. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος M τῆς ῥάβδου εἰς 15^0. 2ον. Ποία θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν μεταξὺ 15^0 καὶ 48^0;

8. Γράψατε τρεῖς θετικοὺς καὶ τρεῖς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

9. Ποῖαι εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἀριθμῶν:

$$-5, \quad +24, \quad -25, \quad -\frac{4}{5}, \quad -0{,}28, \quad +\frac{3}{7},$$

10. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀντίθετοι τῶν ἀριθμῶν:

$$+15, \quad -23, \quad -\frac{3}{4}, \quad -3{,}5, \quad +\sqrt{14}, \quad +0{,}75;$$

11. Νὰ τεθοῦν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν οὕτως, ὥστε: 1ον. αἱ ἀπόλυτοι τιμαί των νὰ βαίνουν ἐλαττούμεναι. 2ον. Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι:

$$-6, \quad +24, \quad -26, \quad -4{,}7 \quad +68, \quad -\frac{15}{2}, \quad +\frac{23}{6}.$$

12. Νὰ τεθοῦν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν οὕτως, ὥστε νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι:

$$-\frac{4}{3}, \quad -\frac{13}{11}, \quad \frac{15}{2}, \quad -1, \quad 0, \quad \frac{48}{7}, \quad -\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{2}, \quad -4, \quad +2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

27. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν σημειοῦνται μὲ τὰ αὐτὰ σημεῖα, ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν καὶ δίδομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸ αὐτὸ ὄνομα.

Οὕτω, ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο πραγματικοὶ ἀριθμοί, τὰ $α+β$, $α-β$, $αβ$ καὶ $α:β$ ἢ $\frac{α}{β}$ παριστάνουν ἀντιστοίχως τὸ *ἄθροισμά των*, τὴν *διαφοράν των*, τὸ *γινόμενόν των* καὶ τὸ *πηλίκον των*.

Διὰ νὰ μὴ γίνεται σύγχυσις τῶν σημείων + καὶ — τοῦ προσανατολισμοῦ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ σημεῖα + καὶ — τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῶν, θὰ θέτωμεν προσωρινῶς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἐντὸς παρενθέσεως.

Π.χ. Τὸ $(-5)+(+8)$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν -5 καὶ $+8$ καὶ ἐκφωνεῖται: π λ ὴ ν 5 κ α ὶ σ ὺ ν 8.

1. Πρόσθεσις πραγματικῶν ἀριθμῶν

28. Ἄθροισμα δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

I. *Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι ὁμόσημοι.*

II. *Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι ἑτερόσημοι.*

I **Περίπτωσις.** *Ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων πραγματικῶν ἀριθμῶν.*

1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $+12$ καὶ $+8$.

Ἐπειδὴ 12 θετικαὶ μονάδες καὶ 8 θετικαὶ μονάδες κάμνουν 20 θετικὰς μονάδας, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$(+12)+(+8)=+20.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $(+14)+(+15)=+29$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)=\left(+\frac{8}{12}\right)+\left(+\frac{3}{12}\right)=+\frac{11}{12}.$$

2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν -12 καὶ -8.

Ἐπειδὴ 12 ἀρνητικαὶ μονάδες καὶ 8 ἀρνητικαὶ μονάδες κάμνουν 20 ἀρνητικὰς μονάδας, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$(-12)+(-8)=-20.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $(-5)+(-9)=-14$.

II. ***Περίπτωσις.*** *Ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων πραγματικῶν ἀριθμῶν*: Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑτεροσήμων ἀριθμῶν -7 καὶ $+20$.

Ἐπειδὴ 7 ἀρνητικαὶ μονάδες ἐξουδετεροῦν 7 θετικὰς μονάδας, μένουν ἀκόμη 13 θετικαὶ μονάδες.

Ὥστε θὰ εἶναι $(-7)+(+20)=+13$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $(+15)+(-25)=-10$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών. I. *Τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἀριθμητικὸν ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ὡς σημεῖον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν.*

II. *Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὴν ἀριθμητικὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ ὡς σημεῖον τὸ σημεῖον ἐκείνου ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.*

29. Παρατηρήσεις. I. *Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων (συμμετρικῶν) ἀριθμῶν εἶναι μηδέν.*

Π.χ. $(+8)+(-8)=0$.

Διότι οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερόσημοι καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν των εἶναι μηδέν.

II. *Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο προστιθεμένους ἀριθμοὺς εἶναι μηδέν, τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄλλον ἀριθμόν.*

Π.χ. $(+5)+0=+5$, $0+(-8)=-8$.

III. Εἰς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἡ λέξις *προσθέτω*, δὲν ἐπιφέρει ἀναγκαστικῶς καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς *αὐξήσεως*, ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Π.χ. Ὁ ἀριθμὸς 12 δὲν αὐξάνει, ἂν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν (-17)· πράγματι, κατὰ τὸν κανόνα τῆς προσθέσεως θὰ εἶναι

$$(12)+(-17)=-5.$$

Ἀσκήσεις: 13, 14, 15, 16.

30. Ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. *Συγκεκριμένον παράδειγμα.* Τὸ ταμεῖον ἑνὸς ἐμπόρου παρουσιάζει τὴν κάτωθι κίνησιν κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς ἡμέρας:

Μίαν εἴσπραξιν 12000 δραχμῶν, μίαν πληρωμὴν 3000 δραχμῶν, μίαν πληρωμὴν 8000 δραχμῶν καὶ τέλος μίαν εἴσπραξιν 5000 δραχμῶν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συνολικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ταμεῖον, εἰς τὸ τέλος τῆς ἡμέρας.

Παριστάνομεν μὲ θετικοὺς ἀριθμοὺς τὰς εἰσπράξεις καὶ μὲ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς τὰς πληρωμάς :

Ἐν πρώτοις ὁ ἔμπορος εἰσπράττει +12000 δρχ.

Μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν 3000 δρχ., τὸ ταμεῖον του ἔχει

$$(+12000)+(-3000)=+9000 \text{ δρχ.}$$

Μετὰ τὴν δευτέραν πληρωμὴν τῶν 8000 δρχ. τὸ ταμεῖον ἔχει

$$(+9000)+(-8000)=+1000 \text{ δρχ.}$$

Μετὰ τὴν εἴσπραξιν τῶν 5000 δρχ. τὸ ταμεῖον ἔχει

$$(+1000)+(+5000)=+6000 \text{ δρχ.}$$

Τὸ ὁλικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ τὸ ταμεῖον εἰς τὸ τέλος τῆς ἡμέρας, εἶναι +6000 δραχμαί· ὥστε θὰ εἶναι :

$$(+12000)+(-3000)+(-8000)+(+5000)=+6000.$$

Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον +6000 λέγεται ἄ θ ρ ο ι σ μ α τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν +12000, —3000, —8000 καὶ +5000.

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια πρὸς αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς :

Ὁρισμός. *Ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ πραγματικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς : προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς· εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὸν τρίτον ἀριθμόν· εἰς τὸ νέον ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὸν τέταρτον ἀριθμὸν καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς.*

Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ λέγονται ὅ ρ ο ι τοῦ ἀθροίσματος.

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$(-10)+(+7)+(+4)+(-9)+(-11)$$

Προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους ὅρους —10 καὶ +7 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(-10)+(+7)=-3$.

Εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ —3, προσθέτομεν τὸ τρίτον ὅρον +4 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(-3)+(+4)=+1$.

Εἰς τὸ νέον ἄθροισμα +1, προσθέτομεν τὸν τέταρτον ὅρον —9 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(+1)+(-9)=-8$.

Εἰς τὸ νέον ἄθροισμα —8 προσθέτομεν τὸν τελευταῖον ὅρον —11 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $(-8)+(-11)=-19$.

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι —19 καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $(-10)+(+7)+(+4)+(-9)+(-11)=-19$.

Εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα, λέγομεν συνήθως :

π λ ὴ ν 10 κ α ὶ σ ὺ ν 7 ἴ σ ο ν π λ ὴ ν 3· π λ ὴ ν 3 κ α ὶ σ ὺ ν 4 ἴ σ ο ν σ ὺ ν 1· σ ὺ ν 1 κ α ὶ π λ ὴ ν 9 ἴ σ ο ν π λ ὴ ν 8· π λ ὴ ν 8 κ α ὶ π λ ὴ ν 11 ἴ σ ο ν π λ ὴ ν 19.

Ἀσκήσεις : 17, 18.

31. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. Αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.

32. Ἰδιότης I. ***Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων πραγματικῶν ἀριθμῶν (ὅρων) δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν των.***

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν εἰς τὸ συγκεκριμένον παράδειγμα τῆς § 30 εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως κατὰ τὴν ὁποίαν ἔγιναν αἱ εἰσπράξεις καὶ αἱ πληρωμαὶ τοῦ ἐμπόρου· δηλ. θὰ εἶναι :

$$(+12000)+(-3000)+(-8000)+(+5000)=$$
$$=(-3000)+(+5000)+(+12000)+(-8000).$$

Γενικῶς θὰ εἶναι :

$$(-\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)+(+\delta)=(-\gamma)+(-\alpha)+(+\beta)+(+\delta)$$

33. Ἰδιότης II. ***Τὸ ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των.***

Ἔστω τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$· ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς β καὶ δ μὲ τὸ ἄθροισμά των $(\beta+\delta)$ λέγω, ὅτι θὰ εἶναι

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon.$$

Ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ ἀπόδειξις γίνεται, ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικήν· δηλ. εἶναι κατὰ σειράν

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\beta+\delta+\alpha+\gamma+\varepsilon$$
$$=(\beta+\delta)+\alpha+\gamma+\varepsilon$$
$$=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon$$

Ἐὰν οἱ ὅροι του ἔχουν διάφορα σημεῖα, δυνάμεθα νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν ἀνωτέρω πρότασιν, ἂν λάβωμεν τὸ συγκεκριμένον παράδειγμα τῆς § 30.

Εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τὸ συγκεκριμένον αὐτὸ παράδειγμα θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν πολλὰς ἐμπορικὰς πράξεις μὲ μίαν καὶ νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ διάφορα ἐξαγόμενα τῶν πράξεων αὐτῶν.

Ἰδιαιτέρως θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν πρῶτον ὅλας τὰς εἰσπράξεις καὶ νὰ τὰς ἀντικαταστήσωμεν μὲ μίαν εἴσπραξιν καὶ ἔπειτα ὅλας τὰς πληρωμὰς καὶ νὰ τὰς ἀντικαταστήσωμεν μὲ μίαν. Γνωρίζοντες τότε τὰς συνολικὰς εἰσπράξεις καὶ τὰς συνολικὰς πληρωμάς, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον.

Π. χ. ὅλαι αἱ εἰσπράξεις εἶναι: $(+12000)+(+5000)=+17000$

ὅλαι αἱ πληρωμαὶ εἶναι: $(-3000)+(-8000)=-11000$

Τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον θὰ εἶναι: $(+17000)+(-11000)=+6000$

Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$(+12000)+(-3000)+(-8000)+(+5000)=$$
$$=(+17000)+(-11000)=+6000.$$

Ὥστε γενικῶς θὰ εἶναι:

$$(-\alpha)+(+\beta)+(-\gamma)+(+\delta)=[(+\beta)+(+\delta)]+[(-\alpha)+(-\gamma)]$$

34. Ἐφαρμογή. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν; Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκολώτερον ἕνα ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι πρακτικὸν κανόνα:

Κανών: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ δύο ἐξαγόμενα.*

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$(+3)+(-7)+(-10)+(+8)+(+12)$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι:

$$(+3)+(+8)+(+12)=+23$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι:

$$(-7)+(-10)=-17$$

Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι: $(+23)+(-17)=+6$

Συνήθως αἱ πράξεις διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

$$(+3)+(-7)+(-10)+(+8)+(+12)=(+23)+(-17)=+6$$

35. Πόρισμα. *Εἰς ἕνα ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν δύο ἀντιθέτους ὅρους, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.*

Π. χ. εἰς τὸ ἄθροισμα $(-3)+(+8)+(-10)+(-8)$ δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τοὺς ἀντιθέτους ἀριθμοὺς $+8$ καὶ -8, διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι μηδέν. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$(-3)+(+8)+(-10)+(-8)=(-3)+(-10)=-13.$$

36. Ἰδιότης III. ***Εἰς ἕνα ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ὅρον του δι' ἄλλων, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν αὐτὸν ὡς ἄθροισμα.***

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἰδιότητα II. Κατ' αὐτὴν θὰ εἶναι : $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon$

Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος αὐτῆς, κατὰ τὴν συμμετρικὴν ἰδιότητα τῆς ἰσότητος (§ 19), θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{\alpha+(\beta+\delta)+\gamma+\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon}$$

37. Ἰδιότης IV. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἀθροίσματα σχηματίζομεν ἕνα ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς ὅρους τῶν δοθέντων ἀθροισμάτων.***

Π. χ. ἐὰν εἶναι $\Sigma=\alpha+\beta+\gamma$, $\Sigma'=\alpha'+\beta'$, $\Sigma''=\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''$, θὰ εἶναι (§ 36)

$$S=\Sigma+\Sigma'+\Sigma''=(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha'+\beta')+(\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta'')$$
$$=\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\alpha''+\beta''+\gamma''+\delta''$$

Ἄσκησις : 19.

38. Ἁπλοποίησις τῆς γραφῆς ἑνὸς ἀθροίσματος. Διὰ νὰ παραστήσωμεν ἁπλούστερον ἕνα ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν ***παραδεχόμεθα :***

1ον. *Νὰ παραλείπωμεν τὸ σημεῖον + τῆς προσθέσεως μεταξὺ τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος.*

2ον. *Νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος, χωρὶς τὰς παρενθέσεις των, τὸν ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου καὶ μὲ τὸ σημεῖον του.*

3ον. *Νὰ παραλείπωμεν τὸ σημεῖον +, ἐὰν τοῦτο εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ πρώτου ὅρου :*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ ἄθροισμα

$$(+9)+(-8)+(+15)+(-18)+(+5)$$

γράφεται ἁπλούστερον $9-8+15-18+5$

Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$9-8+15-18+5$$

θὰ ἡρμηνεύετο ὡς μία *σειρὰ διαδοχικῶν προσθέσεων* καὶ *ἀφαιρέσεων* τῶν ἀριθμῶν 9, 8, 15, 18, 5 τῆς Ἀριθμητικῆς. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν παριστάνει ἕνα ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ὅρους τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $+9, -8, +15, -18, +5$ μεταξὺ τῶν ὁποίων *ὑπονοεῖται, ὅτι ὑπάρχει τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως.*

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν, τοῦ ὁποίου ἔχει ἁπλοποιηθῆ ἡ γραφή, *ὑπονοοῦμεν*, ὅτι μεταξὺ τῶν ὅρων του, ὑπάρχει πάντοτε τὸ σημεῖον + τῆς προσθέσεως καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο τρόπους, ποὺ ἐδείξαμεν εἰς τὰς § 30 καὶ 34.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$-4+9+8-12+5-10$$

1ος τρόπος. Λέγομεν: —4 καὶ +9 ἴσον +5· +5 καὶ +8 ἴσον +13. +13 καὶ —12 ἴσον +1· +1 καὶ +5 ἴσον +6· +6 καὶ —10 ἴσον —4. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$-4+9+8-12+5-10=-4$$

2ος τρόπος. Προσθέτομεν πρῶτον ὅλους τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τὸ σημεῖον +, δηλ. τοὺς +9, +8 καὶ +5 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα +22.

Ἔπειτα προσθέτομεν ὅλους τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἔμπροσθέν των τό σημεῖον —, δηλ. τοὺς —4, —12, —10 καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα —26.

Ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα +22 καὶ —26 καὶ εὑρίσκομεν τελικὸν ἐξαγόμενον —4· ὥστε θὰ εἶναι:

$$-4+9+8-12+5-10=22-26=-4$$

'Ασκήσεις: 20, 21, 22.

2. 'Αφαίρεσις πραγματικῶν ἀριθμῶν

39. 'Ορισμός *Διαφορὰ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β λέγεται ἕνας τρίτος πραγματικὸς ἀριθμὸς δ, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον β δίδει τὸν πρῶτον α.*

Ἡ διαφορὰ δ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β γράφεται $\alpha-\beta=\delta$.
Ἡ διαφορὰ τῶν (+8) καὶ (+10) » $(+8)-(+10)$.
Ἡ διαφορὰ τῶν (—7) καὶ (—5) » $(-7)-(-5)$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν

ἐὰν εἶναι $\boxed{\alpha-\beta=\delta}$ πρέπει νὰ εἶναι $\boxed{\beta+\delta=\alpha}$

40. Πῶς εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν

$$(+8)-(-12)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ **x** τὴν διαφορὰν αὐτήν, δηλ. ἐὰν θέσωμεν

$$(+8)-(-12)=x$$

τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, θὰ εἶναι

$$(-12)+x=(+8) \quad (1)$$

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸν (+12) καὶ ἔχομεν $(-12)+x+(+12)=(+8)+(+12)$.

Ἐὰν παραλείψωμεν (§ 35) τοὺς ἀντιθέτους ἀριθμοὺς —12 καὶ +12, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$x=(+8)+(+12).$$

Εὑρήκαμεν λοιπόν, ὅτι

$$(+8)-(-12)=x=(+8)+(+12)$$

ἢ ἁπλούστερον

$$(+8)-(-12)=(+8)+(+12).$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν

+8 καὶ —12 *προσθέτομεν* εἰς τὸν μειωτέον +8 τὸν *ἀντίθετον* τοῦ ἀφαιρετέου —12.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

(—9)—(+6)=(—9)+(—6).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα:

Κανών : *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν ἕνα ἄλλον, π ρ ο σ θ έ τ ο μ ε ν εἰς τὸν πρῶτον* (μειωτέον) *τὸν ἀ ν τ ί θ ε τ ο ν τοῦ δευτέρου* (ἀφαιρετέον).

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι:

(— 6)—(—20)=(— 6)+(+20)=+14
(— 8)—(+15)=(— 8)+(—15)=—23
(+ 5)—(— 7)=(+ 5)+(+ 7)=+12
(+24)—(+ 9)=(+24)+(— 9)=+15

Ἀσκήσεις : 23, 24, 25.

41. Ἐκτέλεσις οἱασδήποτε ἀφαιρέσεως. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ *ἀφαίρεσις* ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου ἀνάγεται εἰς τὴν *πρόσθεσιν* τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου εἰς τὸν μειωτέον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πρόσθεσις δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε μία πρᾶξις δυνατή, συνάγομεν, ὅτι καὶ ἡ ἀφαίρεσις δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μία πρᾶξις πάντοτε δυνατή· δηλ. δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκόμη, ποὺ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλείτερος τοῦ μειωτέου.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 5—28.
Ἡ διαφορὰ αὐτὴ γράφεται (+5)—(+28).
Κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως θὰ εἶναι

(+5)—(+28)=(+5)+(—28)=—23

Ὥστε εἶναι 5—28=—23
Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι 1—100=—99, 0—36=—36

42. Παρατηρήσεις. I. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἡ ἀφαίρεσις δὲν συνεπάγεται ἀναγκαστικῶς τὴν ἔννοιαν τῆς ἐλαττώσεως.

Πράγματι· ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν τὸν —20, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν τὸν +20, δηλ. αὐξάνομεν τὸν ἀριθμόν.

II. *Τὸ σύμβολον —α σημαίνει τὸν συμμετρικὸν τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α.*

Οὕτω: ἐὰν α=+2, θὰ εἶναι —α=—(+2)=—2
ἐὰν α=—8, θὰ εἶναι —α=—(—8)=+8

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ —α δύναται νὰ ἔχῃ μίαν τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν. Διὰ τοῦτο δὲν πρέπει νὰ θεωροῦμεν τὰ σύμβολα

—α, —β, —γ,..., ὡς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς πάντοτε.

Ἄσκησις: 26.

43 'Αλγεβρικὸν ἄθροισμα. *Μία σειρὰ διαδοχικῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων πραγματικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.*

Π. χ. $(+3)-(+8)+(-9)+(+12)-(-6)$

εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα.

Ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται πάντοτε νὰ ἀναχθῇ εἰς ἕνα *ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν.*

Πράγματι· ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$(+15)-(+8)+(+20)-(-9)+(-12) \quad (1)$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 40 διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $+8$ πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸ -8 καὶ διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ -9 πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸ $+9$. Τὸ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (1) γράφεται $(+15)+(-8)+(+20)+(+9)+(-12)$ (2)

δηλ. τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (1) εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ ἄθροισμα (2) δύναται νὰ γραφῇ ἁπλούστερον (§ 38)

$$15-8+20+9-12 \quad (3).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$(-4)-(+5)-(-8)+(+9)-(+10)$$

γράφεται $(-4)+(-5)+(+8)+(+9)+(-10)$

ἢ ἁπλούστερον $-4-5+8+9-10$

44. Πρακτικὴ παρατήρησις. 'Εὰν συγκρίνωμεν τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα (1) καὶ (3) διαπιστώνομεν, ὅτι ἡ ἁπλοποίησις τῆς γραφῆς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος στηρίζεται εἰς τὸν κατωτέρω πρακτικὸν κανόνα:

Εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, δύο διαδοχικὰ ὅμοια σημεῖα ἀντικαθίστανται μὲ τὸ σημεῖον + καὶ δύο διαδοχικὰ διάφορα σημεῖα ἀντικαθίστανται μὲ τὸ σημεῖον —.

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι

$$-(-6)=+6 \qquad -(+8)=-8$$
$$+(+6)=+6 \qquad +(-8)=-8$$

καὶ γενικῶς $\alpha+(-\beta)-(-\gamma)-(+\delta)=\alpha-\beta+\gamma-\delta$

45. Πῶς ὑπολογίζομεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα; Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὴν § 30.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα:

$$-8+12+10-20+4-9$$

Λέγομεν -8 καὶ $+12$ ἴσον $+4$· $+4$ καὶ $+10$ ἴσον $+14$· $+14$ καὶ -20 ἴσον -6· -6 καὶ $+4$ ἴσον -2· -2 καὶ -9 ἴσον -11. Ὥστε θὰ εἶναι

$$-8+12+10-20+4-9=-11$$

'Ασκήσεις : 27, 28.

46. Ἰδιότητες τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος. Ἐπειδὴ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἶναι ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν ἕπεται, ὅτι αἱ ἰδιότητες τοῦ ἀθροίσματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 32—37 ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα. Π. χ. θὰ εἶναι :

I. $\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon=-\beta-\delta+\alpha-\varepsilon+\gamma$

II. $\alpha-\beta-\gamma+\delta-\varepsilon=(\alpha+\delta)+(-\beta-\gamma-\varepsilon)$

III. $\alpha+(-\beta+\gamma)+\delta-\varepsilon=\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon$

47. Πῶς προσθέτομεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς ἀριθμόν ; *Συγκεκριμένον παράδειγμα:* Ἕνας ἔμπορος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον του 5000 δρχ. Αἱ ἐμπορικαί του πράξεις κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας ἔχουν σημειωθῆ μὲ τὸ ἀκόλουθον ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα :

$$4500-800+2000-3600=+2100$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν κατάστασιν τοῦ ταμείου, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν κατὰ δύο τρόπους :

1ον. Νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς 5000 δρχ., τὰς ὁποίας εἶχε τὸ ταμεῖον του, τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον τῶν ἐμπορικῶν πράξεων τῆς ἡμέρας, δηλ. τὰς +2100 δρχ., ὁπότε τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ

$$5000+2100=7100 \text{ δρχ.},$$

δηλ. θὰ εἶναι

$$5000+(4500-800+2000-3600)=5000+2100=7100.$$

2ον. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν κατάστασιν τοῦ ταμείου του, μεθ' ἑκάστην πρᾶξιν, ὁπότε τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ

$$5000+4500-800+2000-3600=7100 \text{ δρχ.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον εἶναι προφανῶς τὸ αὐτό. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$5000+(4500-800+2000-3600)=$$
$$=5000+4500-800+2000-3600=7100.$$

Γενικῶς, ἐὰν Α εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς ἢ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν :

$$\mathbf{A+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A+\alpha-\beta+\gamma-\delta}$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Κανών: *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς ἕνα ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος μὲ τὰ σημεῖα των καὶ νὰ εὕρωμεν ἔπειτα τὸ ἐξαγόμενον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος.*

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι :

$$160+(-8+40-25)=160-8+40-25=167$$
$$200+(32-45+10)=200+32-45+10=197$$
$$(5+12-8)+(-3+7-1)=5+12-8-3+7-1=12$$

48. Παρατηρήσεις. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$A+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A+\alpha-\beta+\gamma-\delta$$

συνάγομεν, ὅτι :

I. *Ἐὰν ἔμπροσθεν μιᾶς παρενθέσεως, ἡ ὁποία περικλείει ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον +, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν παρένθεσιν.*

Π. χ. εἶναι : $-9+(-5+7)-8=-9-5+7-8$.

II. *Ὁσοιδήποτε ὅροι ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δύνανται νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως, ἐὰν ἔμπροσθεν αὐτῆς θέσωμεν τὸ σημεῖον +.*

Π. χ. $-5+8-12+3-9=-5+8+(-12+3-9)$

$$\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon=\alpha-\beta+(\gamma+\delta-\varepsilon)$$

Ἀσκήσεις : 29, 30

49. Ἀντίθετα ἀθροίσματα. Θεώρημα. ***Ἐὰν εἰς ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ὅρους του μὲ τοὺς ἀντιθέτους ὅρους των, τὸ νέον ἄθροισμα εἶναι ἀντίθετον τοῦ πρώτου.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω τὸ ἄθροισμα $\Sigma=\alpha-\beta+\gamma-\delta$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\Sigma'=-\alpha+\beta-\gamma+\delta$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος.

Ἀπόδειξις : Ἐὰν τὰ ἀθροίσματα Σ καὶ Σ' εἶναι ἀντίθετα πρέπει, κατὰ τὴν (§ 29 I) τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.

Πράγματι τὸ ἄθροισμά των εἶναι

$$\begin{aligned}\Sigma+\Sigma'&=(\alpha-\beta+\gamma-\delta)+(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\&=\alpha-\beta+\gamma-\delta-\alpha+\beta-\gamma+\delta\\&=(\alpha-\alpha)+(\beta-\beta)+(\gamma-\gamma)+(\delta-\delta)\\&=0\quad+\ 0\ +\ 0\ +0=0\end{aligned}$$

Τὰ ἀθροίσματα λοιπὸν Σ καὶ Σ' εἶναι ἀντίθετα, διότι ἔχουν ἄθροισμα μηδέν· ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta=-(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$

Π. χ. Τὸ ἀντίθετον τοῦ ἀθροίσματος $-4+8-12-9$ εἶναι τὸ $4-8+12+9$.

Ἄσκησις : 31.

50. Πῶς ἀφαιροῦμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμόν; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $-8+6+7-15$ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 140, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $140-(-8+6+7-15)$ (1)

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους :

1ον. Νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $-8+6+7-15$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο πραγματικοὺς ἀριθμούς.

Πράγματι· ἐπειδὴ $-8+6+7-15=-10$ θὰ ἔχωμεν

$$140-(-8+6+7-15)=140-(-10)=140+10=150.$$

2ον. Κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν πρέπει εἰς τὸν μειωτέον 140 νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου $(-8+6+7-15)$. Ἐπειδὴ ὁ ἀντίθετος τοῦ $-8+6+7-15$ εἶναι ὁ $8-6-7+15$ θὰ ἔχωμεν

$$140-(-8+6+7-15)=140+(8-6-7+15)$$
$$=140+8-6-7+15=150.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρήκαμεν τὴν αὐτὴν διαφορὰν καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους.

Γενικῶς : Ἐὰν Α παριστάνῃ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν ἢ ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν

$$\mathbf{A-(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A-\alpha+\beta-\gamma+\delta}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών : *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν (ἢ ἀπὸ ἄλλο ἄθροισμα) γράφομεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος μὲ ἀλλαγμένα τὰ σημεῖα των καὶ ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὸ ἐξαγόμενον.*

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι :

$$8-(12-4+9-15)=8-12+4-9+15=+6$$
$$-20-(-7+5-10+2)=-20+7-5+10-2=-10$$
$$(-3+4-5)-(2+8-9)=-3+4-5-2-8+9=-5.$$

51. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (§ 50)

$$A-(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=A-\alpha+\beta-\gamma+\delta$$

συνάγομεν, ὅτι :

I. *Ἐὰν ἔμπροσθεν μιᾶς παρενθέσεως, ἡ ὁποία περικλείει ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, ὑπάρχει τὸ σημεῖον —, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν παρένθεσιν καὶ τὸ —, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐντὸς τῆς παρενθέσεως.*

Π. χ. $-8+5-(-9+4-3)=-8+5+9-4+3$

$$-\alpha+\beta-(\gamma-\delta+\varepsilon)=-\alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon$$

II. *Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ σημεῖον —, ὁσονδήποτε ὅρους ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι θὰ τεθοῦν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως.*

Π. χ. $3-5-7+4-1=3-(+5+7-4+1)$

$\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta-(+\gamma+\delta-\varepsilon)$

Ἀσκήσεις: 32, 33, 34.

52. **Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.** 1. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴσοι, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\gamma$ καὶ $\beta+\gamma$ ἢ οἱ ἀριθμοὶ $\alpha-\gamma$ καὶ $\beta-\gamma$.

Ὥστε: ***Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος.***

Δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω:

Ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta$ θὰ εἶναι	$\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\gamma\\ \alpha-\gamma=\beta-\gamma\end{cases}$

2. Ἐὰν ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$\alpha=\beta \quad \text{καὶ} \quad \gamma=\delta$$

θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta \quad \text{καὶ} \quad \alpha-\gamma=\beta-\delta$$

Ὥστε: ***Δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἰσότητας κατὰ μέλη.***

3. Ἔστω ἡ ἰσότης

$$\alpha-\beta=\gamma+\delta \qquad (1)$$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸν ἀριθμὸν $(\beta-\delta)$ θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$(\alpha-\beta)+(\beta-\delta)=(\gamma+\delta)+(\beta-\delta)$$

ἢ

$$\alpha-\beta+\beta-\delta=\gamma+\delta+\beta-\delta$$

ἢ

$$\alpha-\delta=\gamma+\beta \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος δ, ὁ ὁποῖος ἦτο εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) μὲ τὸ σημεῖον +, μετεφέρθη εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (2) μὲ τὸ σημεῖον —. Ἐπίσης ὁ ὅρος β, ὁ ὁποῖος ἦτο εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (1) μὲ τὸ σημεῖον —, μετεφέρθη εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (2) μὲ τὸ σημεῖον +. Ὥστε:

Εἰς μίαν ἰσότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον της ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημόν του.

Ἀσκήσεις

13. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $(+5)+(+7)$ 2. $(-8)+(-6)$ 3. $(+6)+(-4)$
4. $(-9)+(+5)$ 5. $(+15)+(-15)$ 6. $(-17)+0$
7. $0+(+15)$ 8. $13+(-14)$.

14. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $(-6{,}35)+(-5{,}45)$ 3. $(+14{,}25)+(-9{,}46)$
2. $(+8{,}66)+(-9{,}30)$ 4. $(+13{,}95)+(+0{,}64)$.

15. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$ 5. $\left(+7\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{4}\right)$
2. $\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$ 6. $\left(-2\frac{1}{5}\right)+\left(-4\frac{1}{4}\right)$
3. $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$ 7 $\left(+5\frac{1}{3}\right)+\left(+7\frac{1}{2}\right)$
4. $\left(-\frac{7}{10}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$ 8. $\left(-8\frac{1}{2}\right)+\left(+5\frac{2}{3}\right)$

16. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $x=\alpha+\beta$.

1. ἐὰν $\alpha=+3$ καὶ $\beta=-12$
2. » $\alpha=-9$ » $\beta=-64$
3. » $\alpha=0$ » $\beta=-17$
4. » $\alpha=+15$ » $\beta=24$.

17. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $(+4)+(-5)+(+8)+(-7)+(-8)+(-9)$
2. $(+8)+(-12)+(+25)+(-70)+(+60)+(-10)$
3. $(-15)+(-20)+(-30)+(+40)+(+65)+(-12)$.
4. $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)+(+5)+\left(-\frac{1}{4}\right)$
5. $\left(+\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{7}{10}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)$

18. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $x=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

1. ἐὰν $\alpha=-2$, $\beta=+8$, $\gamma=-7$, $\delta=-24$
2. » $\alpha=+2{,}4$, $\beta=-3{,}5$, $\gamma=-4{,}25$, $\delta=-5{,}60$
3. » $\alpha=-\frac{2}{3}$, $\beta=+\frac{4}{5}$, $\gamma=-\frac{1}{2}$, $\delta=+\frac{3}{4}$

19. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα:

1. $[(+3)+(-7)]+[(-5)+(+8)+(-12)]$
2. $[(-9)+(+10)]+(-11)+[(-17)+(-11)+(+35)]$
3. $[(+5)+(-7)]+[(-9)+(+14)]+[(-9)+(+18)+(-20)]$.

20. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ γραφὴ τῶν κάτωθι ἀθροισμάτων καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν ἔπειτα τὰ ἀθροίσματα κατὰ δύο τρόπους:

1. $(+4)+(-9)+(-5)+(+8)+(+5)+(+4)+(-1)$
2. $(-2)+(-8)+(+6)+(-7)+(-4)+(+3)+(+9)$
3. $(+2{,}6)+(+4{,}5)+(-8{,}6)+(-5)+(+9{,}75)$

4. $\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)+\left(+8\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

21. Ἔμπορος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον του 75000 δρχ.· ὀφείλει εἰς διαφόρους 4500 δρχ., 12450 δρχ., 5650 δρχ. Ἐξ ἄλλου τοῦ ὀφείλουν 850,75 δρχ., 7950,25 δρχ. καὶ 9245,75 δρχ. 1ον. Νὰ ἐκφρασθῇ, μὲ ἕνα ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν, ἡ ἐμπορικὴ κατάστασίς του. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ αὐτὸ τὸ ἄθροισμα.

22. Ἕνα ἀεροπλάνον ἀνῆλθεν εἰς ὕψος 2100 μ. ἔπειτα κατῆλθε κατὰ 1200 μ. ἀνῆλθεν πάλιν κατὰ 760 μ. καὶ κατῆλθε πάλιν κατὰ 600 μ. Νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ σχετικοὺς ἀριθμούς αἱ ἄνοδοι καὶ κάθοδοι τοῦ ἀεροπλάνου καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τελικὸν ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.

23 Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί:

1. $(+5)-(+8)$ 2. $(-7)-(-10)$ 3. $(+9)-(-15)$
4. $(-20)-(+18)$ 5. $(+3{,}50)-(-4{,}25)$ 6. $(-7{,}25)-(-0{,}75)$
7. $(-2{,}40)-(+3{,}60)$. 8. $(+3{,}85)-(-5{,}50)$.

24. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί:

1. $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{7}{8}\right)$ 5. $\left(-2\frac{1}{5}\right)-\left(-3\frac{1}{4}\right)$
2. $\left(+\frac{3}{2}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)$ 6. $\left(-3\frac{2}{5}\right)-\left(+7\frac{1}{2}\right)$
3. $\left(-\frac{7}{8}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)$ 7. $\left(-9\frac{3}{4}\right)-\left(-6\frac{1}{5}\right)$
4. $\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)$ 8. $\left(-10\frac{1}{2}\right)-\left(+5\frac{1}{8}\right)$

25. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ $x=\alpha-\beta$:

1. ἐὰν $\alpha=+8$, $\beta=+3$ 2. ἐὰν $\alpha=-9$, $\beta=-8$
3. » $\alpha=0$, $\beta=+5$ 4. » $\alpha=-18$, $\beta=0$

26. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι ἀφαιρέσεις:

1. 8—21, 2. 1—37, 3. 51—59, 4. 0—67.

27. Τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα: 1ον νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἀθροίσματα σχετικῶν ἀριθμῶν· 2ον νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ γραφή των καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμή των.

1. $(+15)+(-4)-(+8)-(-7)+(-10)-(-21)$
2. $(-13)-(-8)+(-2)-(-8)-(+6)-(-11)$
3. $(-15)+(-9)-(+8)-(-4)-(+11)+(+25)$.

28. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $\alpha-\beta+\gamma-\delta$:

1. ἐὰν $\alpha=+15$, $\beta=+10$, $\gamma=-18$, $\delta=+14$
2. » $\alpha=+40$, $\beta=-25$, $\gamma=+20$, $\delta=-11$
3. » $\alpha=-48$, $\beta=-35$, $\gamma=+35$, $\delta=-18$.

29. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $100+(-4+25-37)$ 3. $(-4+12)+(-7+3-6)$
2. $-5+(7-38+12)$ 4. $(2-4+8)+(-9-7+10)$

30. Ἕνας ἔμπορος ἔχει 12000 δρχ. εἰς τὸ ταμεῖον του. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἡμέρας ἔκαμε τὰς κάτωθι διαδοχικὰς εἰσπράξεις καὶ πληρωμάς:

+4300 δρχ., −500 δρχ., +1580 δρχ., +4200 δρχ., −2450 δρχ., +4750 δρχ. Τί ποσὸν ἔχει τὸ ταμεῖον του εἰς τὸ τέλος τῆς ἡμέρας;

31. Ποῖα εἶναι τὰ ἀντίθετα τῶν κάτωθι ἀθροισμάτων:

1. $8-7+12-6$ 3. $-(5+9-17+6)$
2. $-9-6+25-14$ 4. $+(17-24+5-2)$.

32. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $15+(-5+17)$ 2. $20-(+8-15)$ 3. $14-(-9+4)$
4. $-8-(-15+12)$ 5. $-10-(-7-15)$ 6. $-1-(-9+6)$.

33. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $\alpha-(\beta-\gamma)$.

1. ἐὰν $\alpha=-5$, $\beta=4$, $\gamma=8$
2. » $\alpha=-10$, $\beta=-7$, $\gamma=6$
3. » $\alpha=0$, $\beta=-9$, $\gamma=-8$.

34. Δίδονται τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

$$A=-4+8-3+2$$
$$B=-6+4+12-5$$
$$\Gamma=-4+3-1-27+7$$

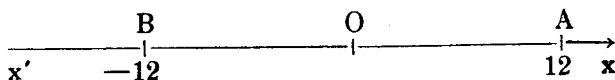
Νὰ ὑπολογισθοῦν: 1. $A+B+\Gamma$, 2. $A-B+\Gamma$, 3. $A-(B+\Gamma)$.

3. Πολλαπλασιασμὸς πραγματικῶν ἀριθμῶν

53. Τί ὀνομάζομεν γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν;

Ἔστω, ὅτι ἕνα κινητὸν Μ κινεῖται μὲ ὁμαλὴν κίνησιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x, δηλ. διανύει ἴσα διαστήματα εἰς ἴσους χρόνους.

Ἔστω v ἡ ταχύτης του εἰς ἑκατοστόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον· εἰς t δευτερόλεπτα διανύει ἕνα διάστημα s, τὸ ὁποῖον δίδεται, εἰς ἑκατοστόμετρα, ὑπὸ τοῦ τύπου $s=vt$.



Σχ. 8

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ἀρχὴν τῶν διανυθέντων διαστημάτων ὑπὸ τοῦ κινητοῦ.

Θὰ ὀνομάσωμεν *χρόνον μηδὲν* τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κινητὸν Μ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

Ἐπίσης θὰ ὀνομάσωμεν *θετικοὺς χρόνους* τοὺς μεταγενεστέρους χρόνους τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κινητὸν διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ *ἀρνητικοὺς χρόνους* τοὺς προγενεστέρους χρόνους τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κινητὸν διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο.

Θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ κινητὸν Μ ἔχει μίαν *θετικὴν ταχύτητα*, ἐὰν κινῆται κατὰ τὴν φορὰν x′x καὶ *ἀρνητικὴν ταχύτητα*, ἐὰν κινῆται κατὰ τὴν φορὰν xx′.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον $s=vt$ διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x

1η Περίπτωσις : Τὸ κινητὸν Μ ἔχει μίαν ταχύτητα (+3) *ἑκατοστομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ποῦ θὰ εὑρίσκεται τὸ κινητὸν εἰς χρόνον* (+4) *δευτερόλεπτα ;*

Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν κινεῖται μὲ θετικὴν ταχύτητα, θὰ διευθύνεται κατὰ τὴν φορὰν x'x. Κατὰ τὸν χρόνον μηδὲν θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Μετὰ 4 δευτερόλεπτα θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Α, τοιοῦτον, ὥστε ΟΑ=3×4=12 ἑκατοστόμετρα. Ἡ τετμημένη τοῦ Α εἶναι $\overline{OA}=+12$. Θὰ γράψωμεν λοιπὸν

$$(+3)\cdot(+4)=+12.$$

2α Περίπτωσις : Τὸ κινητὸν Μ ἔχει μίαν ταχύτητα (—3) *ἑκατοστόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον. Ποῦ θὰ εὑρίσκεται τὸ κινητὸν εἰς χρόνον* (—4) *δευτερόλεπτα ;*

Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν κινεῖται μὲ ἀρνητικὴν ταχύτητα, θὰ διευθύνεται κατὰ τὴν φορὰν xx'. Κατὰ τὸν χρόνον μηδὲν θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Πρὸ 4 δευτερολέπτων ἦτο εἰς τὸ σημεῖον Α τοιοῦτον, ὥστε ΟΑ=12 ἑκ. Θὰ εἶναι $\overline{OA}=+12$. Θὰ γράψωμεν λοιπὸν

$$(-3)\cdot(-4)=+12.$$

3η Περίπτωσις : Τὸ κινητὸν ἔχει μίαν ταχύτητα (+3) *ἑκατοστομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ποῦ θὰ εὑρίσκεται τὸ κινητὸν εἰς χρόνον* (—4) *δευτερόλεπτα ;*

Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν κινεῖται μὲ θετικὴν ταχύτητα, θὰ διευθύνεται κατὰ τὴν φορὰν x'x. Πρὸ 4 δευτερολέπτων ἦτο εἰς τὸ Β τοιοῦτον, ὥστε ΟΒ=12 ἑκατοστόμετρα. Ἡ τετμημένη τοῦ Β εἶναι $\overline{OB}=(-12)$. Θὰ γράψωμεν λοιπὸν

$$(+3)\cdot(-4)=(-12).$$

4η Περίπτωσις : Τὸ κινητὸν ἔχει μίαν ταχύτητα (—3) *ἑκατοστομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Ποῦ θὰ εὑρίσκεται τὸ κινητὸν εἰς χρόνον* (+4) *δευτερόλεπτα ;*

Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν κινεῖται μὲ ἀρνητικὴν ταχύτητα, θὰ διευθύνεται κατὰ τὴν φορὰν xx'. Μετὰ 4 δευτερόλεπτα θὰ εἶναι εἰς τὸ σημεῖον Β τοιοῦτον, ὥστε ΟΒ=12. Ἡ τετμημένη τοῦ Β εἶναι $\overline{OB}=-12$. Θὰ γράψωμεν λοιπὸν

$$(-3)\cdot(+4)=(-12).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τοὺς κάτωθι ὁρισμούς :

54. Ὁρισμός. *Γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας τρίτος πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν*

δύο δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ὡς σημεῖον τὸ σημεῖον +, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἢ τὸ σημεῖον —, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερόσημοι.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται *παράγοντες τοῦ γινομένου*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ εἶναι

$(+9)\cdot(+5)=+45$, $(-10)(+5)=-50$

$(-7)\cdot(-6)=+42$, $(+12)(-3)=-36$.

55. Σημεῖον τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Διά νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι *κανόνα τῶν σημείων*, τὸν ὁποῖον συνάγομεν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν:

Κανών :	**+ ἐπὶ**	**+**	**δίδει**	**+**
	+ ἐπὶ	**—**	**»**	**—**
	— ἐπὶ	**+**	**»**	**—**
	— ἐπὶ	**—**	**»**	**+**

56. Παρατηρήσεις. I. *Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι μηδέν, τὸ γινόμενον εἶναι μηδέν.*

Π. χ. $(+3)\cdot 0=0$ καὶ $0\cdot(-8)=0$ καὶ $\alpha\times 0=0$

Καὶ ἀντιστρόφως : *Ὅταν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι ἴσον μὲ μηδέν ὁ ἕνας τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων εἶναι ἴσος μὲ μηδέν.*

Π. χ. ἂν εἶναι $\alpha\beta=0$ πρέπει νὰ εἶναι τοὐλάχιστον, εἴτε $\alpha=0$, εἴτε $\beta=0$.

II. *Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ἐκ τῶν παραγόντων, ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου.*

Π. χ. $(-4)\cdot(+6)=-24$ καὶ $(-4)\cdot(-6)=+24$.

III. *Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον δύο παραγόντων, τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται.*

Π. χ. $(-5)\cdot(+6)=-30$ καὶ $(+5)\cdot(-6)=-30$.

IV. *Γινόμενον ἐπὶ* (+1) *καὶ ἐπὶ* (—1).

Π. χ. $(+8)\cdot(+1)=(+8)$ καὶ γενικῶς $\alpha\times(+1)=\alpha$

$(+8)\cdot(-1)=(-8)$ καὶ γενικῶς $\alpha\times(-1)=-\alpha$.

Ἀσκήσεις : 35, 36, 37.

57. Γινόμενον πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὁρισμός. *Γινόμενον πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ πραγματικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς :*

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο πρώτους παράγοντας· τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα· τὸ νέον ἐξαγόμε-

νον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τέταρτον παράγοντα καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας.

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον:

$(+5)\cdot(-3)\cdot(-6)\cdot(+8)\cdot(-2)$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἔχομεν διαδοχικῶς $(+5)\cdot(-3)=-15$, $(-15)\cdot(-6)=+90$,
$(+90)\cdot(+8)=+720$, $(+720)\cdot(-2)=-1440$

Θὰ εἶναι λοιπὸν $(+5)\cdot(-3)\cdot(-6)\cdot(+8)\cdot(-2)=-1440$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, ἡ *ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων* εἶναι ἴση μὲ τὸ *γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν* τῶν παραγόντων αὐτῶν.

Ἐὰν ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντας εἶναι μηδέν, τὸ γινόμενον εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

Π. χ. $(-4)\cdot(+10)\cdot(-9)\cdot 0\cdot(-18)=0$

Καὶ ἀντιστρόφως: Ὅταν ἕνα γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι μηδέν, ἕνας τοὐλάχιστον ἀπὸ τοὺς παράγοντας θὰ εἶναι μηδέν, διότι ἄλλως τὸ γινόμενον θὰ ἦτο διάφορον τοῦ μηδενός.

58. Σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν. *Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων.*

Τὸ σημεῖον εἶναι $+$, *ἐὰν ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοὶ ἢ ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον.*

Τὸ σημεῖον εἶναι $-$, *ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι περιττόν.*

Π. χ. $(+3)\cdot(+1)\cdot(+8)\cdot(+5)=+120$ (ὅλοι οἱ παράγοντες θετικοὶ)
$(+2)\cdot(-4)\cdot(-1)\cdot(+6)=+48$ (δύο ἀρνητικοὶ παράγοντες)
$(+10)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-1)=-300$ (τρεῖς ἀρνητικοὶ παράγοντες)

Ἀσκήσεις: 38, 39.

59. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.

60 I. ***Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων πραγματικῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις των.***

Πράγματι. 1ον. *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου δὲν μεταβάλλεται*, κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς, (τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως).

2ον. *Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δὲν μεταβάλλεται*, διότι τὸ σημεῖον του ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων καὶ ὄχι ἀπὸ τὴν θέσιν των.

Θὰ εἶναι λοιπὸν γενικῶς:

$$(-\alpha)\cdot(+\beta)\cdot(+\gamma)\cdot(-\delta)=(+\beta)\cdot(-\delta)\cdot(-\alpha)\cdot(+\gamma)$$

61. II. ***Εἰς ἕνα γινόμενον πολλῶν πραγματικῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας μὲ τὸ γινόμενόν των.***

Π. χ. $(-2)(-5)(+4)(-3)=(-2)(-20)(-3)$.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)(+\delta)=(-\alpha)\cdot[(+\beta)(+\delta)]\cdot(-\gamma)$$

62. III. ***Εἰς ἕνα γινόμενον πολλῶν πραγματικῶν παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα δι' ἄλλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.***

Π. χ. $(-5)(+12)(-7)=(-5)(-3)(-4)(-7)$.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$(+\alpha)\cdot[(-\beta)(+\delta)]\cdot(-\gamma)=(+\alpha)(-\beta)(-\gamma)(+\delta)$$

63. IV. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα γινόμενον πολλῶν πραγματικῶν παραγόντων ἐπὶ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕ ν α μ ό ν ο ν ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.***

Π. χ. $[(-4)(+5)(-9)(+2)]\cdot(-3)=(-4)(-15)(-9)(+2)=-1080$.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$[(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)]\cdot(-\mu)=(-\alpha)\cdot[(+\beta)(-\mu)]\cdot(-\gamma)$$

64. V. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα γινόμενα πραγματικῶν παραγόντων σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων.***

Π, χ. $[(-2)(+5)(-7)]\cdot[(+3)(-8)]=(-2)(+5)(-7)(+3)(-8)=-1680$.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$[(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)]\cdot[(+\delta)(-\varepsilon)]=(-\alpha)(+\beta)(-\gamma)(+\delta)(-\varepsilon)$$

65. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν ; Θεώρημα. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν (ἢ ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἕνα***

ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα), πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.

Τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι γνωστὸν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ὡς *ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης*. Θὰ τὸ ἐπαληθεύσωμεν ἐδῶ μὲ ἕνα παράδειγμα.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα 6—8+5 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν —4· δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(6-8+5)\cdot(-4)$

Ἐπειδὴ $6-8+5=+3$

θὰ εἶναι $(6-8+5)\cdot(-4)=(+3)\cdot(-4)=-12$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, θὰ ἔχωμεν

$$(6-8+5)\cdot(-4)=6(-4)-8(-4)+5(-4)=-24+32-20=-12$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτό· ὥστε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$(6-8+5)\cdot(-4)=6(-4)-8(-4)+5(-4)=-24+32-20=-12.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$(-9-6+7-2)\cdot(+5)=-9(+5)-6(+5)+7(+5)-2(+5)=$$
$$=-45-30+35-10=-50.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι:

$$(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\cdot\mu=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\delta\mu$$

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος (1) θὰ ἔχωμεν καὶ

$$\mu(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu-\delta\mu$$

66. Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 65 θὰ εἶναι $(\alpha+\beta-\gamma)\mu=\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu$

Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu=(\alpha+\beta-\gamma)\mu \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) συνάγομεν, ὅτι:

Ἐὰν ἔχωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα γινομένων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει κοινὸν παράγοντα, δυνάμεθα νὰ θέτωμεν τὸν κοινὸν αὐτὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἐντὸς αὐτῆς τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ κοινῶν παραγόντων.

Π.χ. θὰ εἶναι $-3\mu+7\mu-9\mu=(-3+7-9)\mu=-5\mu$

$$7\alpha-\frac{4}{5}\alpha+8\alpha-12\alpha=(7-\frac{4}{5}+8-12)\alpha=\left(3-\frac{4}{5}\right)\alpha=\frac{11\alpha}{5}$$

67. Πῶς πολλαπλασιάζομεν δύο ἢ περισσότερα ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα. Θεώρημα. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα***

ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς κάθε ὅρον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπὶ κάθε ὅρον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ ἐξαγόμενα

Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἀθροίσματα $(\alpha+\beta+\gamma)$ καὶ $(\delta+\varepsilon)$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\delta+\varepsilon)=\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon$$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα $(\delta+\varepsilon)$ ἔχει ἐκτελεσθῆ, θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta+\gamma)$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $(\delta+\varepsilon)$ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 65 θὰ ἔχωμεν: $(\alpha+\beta+\gamma)\,.\,(\delta+\varepsilon)=\alpha(\delta+\varepsilon)+\beta(\delta+\varepsilon)+\gamma(\delta+\varepsilon)=$
$=\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\beta\delta+\beta\varepsilon+\gamma\delta+\gamma\varepsilon$

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{(\alpha+\beta-\gamma)(\delta-\varepsilon)=\alpha\delta+\beta\delta-\gamma\delta-\alpha\varepsilon-\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon}$$

Π. χ. θὰ εἶναι:
$(-5+6+7)(8-10)=-5\cdot8+6\cdot8+7\cdot8-5(-10)+6(-10)+7(-10)=$
$=-40+48+56+50-60-70=-16.$

Γενικώτερον: ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο πρῶτα ἀθροίσματα, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον ἄθροισμα καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ἄθροισμα.***

Ἀσκήσεις: *40 41, 42, 43, 44.*

4. Διαίρεσις πραγματικῶν ἀριθμῶν

68. **Ὁρισμός.** *Πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β λέγεται ἕνας τρίτος πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει ὡς γινόμενον τὸν πρῶτον*

Τὸ πηλίκον τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α διὰ τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ β γράφεται $\alpha:\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν θὰ εἶναι

$\boxed{\alpha:\beta=x}$ ἢ $\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=x}$, ἐὰν $\boxed{\alpha=\beta x}$

Ὁ α λέγεται *διαιρετέος* καὶ ὁ β *διαιρέτης*. Τὸ σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$ ὀνο-

μάζεται *ἀλγεβρικὸν κλάσμα* ἢ *λόγος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β*. Ὁ α εἶναι ὁ *ἀριθμητὴς* τοῦ κλάσματος καὶ ὁ β ὁ *παρονομαστής* του· οἱ α καὶ β εἶναι οἱ *ὅροι* τοῦ κλάσματος ἢ οἱ *ὅροι* τοῦ λόγου.

69. Πῶς εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον (+24) : (—6).

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι —4, διότι (—4) · (—6)=+24=διαιρετέον.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$(+15):(+3)=+5,$ διότι $(+5)\cdot(+3)=+15$
$(-12):(-4)=+3,$ διότι $(+3)\cdot(-4)=-12$
$(-20):(+5)=-4,$ διότι $(-4)\cdot(+5)=-20$
$(+24):(-4)=-6,$ διότι $(-6)\cdot(-4)=+24.$

Ὁμοίως εἶναι

$\frac{+15}{+5}=+3,$ διότι $(+3)\cdot(+5)=+15$
$\frac{-18}{-9}=+2,$ διότι $(+2)\cdot(-9)=-18$
$\frac{-30}{+6}=-5,$ διότι $(-5)\cdot(+6)=-30.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου καὶ ἔμπροσθεν τοῦ πηλίκου θέτομεν τὸ σημεῖον* + *μέν, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, τὸ σημεῖον* — *δέ, ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερόσημοι.*

70. Παρατηρήσεις. I. Ἐὰν εἰς μίαν διαίρεσιν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁ διαιρέτης δὲν διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον, τότε τὸ πηλίκον παρίσταται ὑπὸ μορφὴν κλάσματος.

Π. χ. $(+3):(+5)=\frac{+3}{+5}=+\frac{3}{5},\quad (-3):(+5)=\frac{-3}{+5}=-\frac{3}{5},$

$(+3):(-5)=\frac{+3}{-5}=-\frac{3}{5},\quad (-3):(-5)=\frac{-3}{-5}=+\frac{3}{5}.$

II. Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δεικνύουν ἀκόμη, ὅτι τὸ πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν :

1ον. *Ἀλλάσσει σημεῖον, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἕνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν μὲ τὸν ἀντίθετόν του·*

καὶ ***2ον.*** *Δὲν ἀλλάσσει σημεῖον, ἂν ἀντικαταστήσωμεν καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς διὰ τῶν ἀντιθέτων των.*

71. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. I. *Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι μηδέν, ὁ δὲ διαιρέτης διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.*

Δηλ. θὰ εἶναι $0:3=0$, διότι ὁ διαιρέτης 3, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν, δίδει τὸν διαιρετέον 0.

Γενικῶς θὰ εἶναι $\boxed{\frac{0}{\alpha}=0}$

II. *Ἡ διαίρεσις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς διὰ 0, π.χ. ἡ 8 : 0, εἶναι ἀδύνατος.*

Διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον 8, ὁ ὁποῖος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ὥστε τὸ $\frac{\alpha}{0}$ **εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ ἀδυνάτου**

III. *Ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι 0, τὸ πηλίκον εἶναι τυχὼν ἀριθμός, δηλ. εἶναι ἀόριστον.*

Διότι κάθε ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 0.

Ὥστε τὸ $\frac{0}{0}$ **εἶναι τὸ σύμβολον τῆς ἀοριστίας**

Ἀσκήσεις : 45, 46, 47, 48.

72. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως Αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.

Κατωτέρω θὰ ἐπαληθεύσωμεν μερικὰς ἰδιότητας τῆς διαιρέσεως μὲ παραδείγματα.

73. Πῶς διαιροῦμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ. Θεώρημα. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν κάθε ὅρον τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα

$$(24-16+40) \text{ διὰ } -4$$

Ἐπειδὴ $24-16+40=+48$

θὰ εἶναι $(24-16+40):(-4)=(+48):(-4)=-12$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, θὰ ἔχωμεν

$$(24-16+40):(-4)=\frac{24}{-4}+\frac{-16}{-4}+\frac{40}{-4}=-6+4-10=-12.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτό.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$(\alpha-\beta+\gamma-\delta):\mu=\frac{\alpha}{\mu}-\frac{\beta}{\mu}+\frac{\gamma}{\mu}-\frac{\delta}{\mu}$$

Ἀσκήσεις : 49, 50.

74. Πῶς διαιροῦμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἀριθμοῦ ; *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕ ν α μ ό ν ο ν ἐκ τῶν παραγόντων αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον

$5\cdot(-21)\cdot 8$ διὰ τοῦ -7

Θὰ ἔχωμεν

$$[5\cdot(-21)\cdot 8]:(-7)=(-840):(-7)=+120.$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, καὶ διαιρέσωμεν μόνον τὸν παράγοντα (—21) διὰ τοῦ —7, θὰ ἔχωμεν

$$[5\cdot(-21)\cdot 8]:(-7)=5\cdot\frac{-21}{-7}\cdot 8=5\cdot 3\cdot 8=+120.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτό.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν : $$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta):\mu=\alpha\cdot\frac{\beta}{\mu}\cdot\gamma\cdot\delta$$

75. Πόρισμα. Ἔστω, ὅτι θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $[4\cdot(-5)(-8)]$ διὰ τοῦ -8. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν :

$$[4\cdot(-5)\cdot(-8)]:(-8)=4\cdot(-5)\cdot\frac{-8}{-8}=4\cdot(-5)\cdot 1=4\cdot(-5).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα γινόμενον πολλῶν παραγόντων διά τινος ἐκ τῶν παραγόντων του ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν.

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν : $$(\alpha\beta\gamma\delta):\gamma=\alpha\beta\delta$$

Ἀσκήσεις : 51, 52.

76. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος. 1. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴσοι εἶναι προφανές, ὅτι θὰ λάβωμεν ἀκόμη δύο ἴσους ἀριθμούς, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τοὺς α καὶ β ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\gamma\neq 0$. Δηλ. : ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma,\quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$$ (γ διάφορος τοῦ μηδενός).

Ὥστε : ***Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διαφόρου τοῦ μηδενός.

2. Ἐὰν ἔχωμεν τὰς ἰσότητας $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$ εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha \cdot \gamma=\beta \cdot \delta \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$$

Ὥστε : ***Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν κατὰ μέλη δύο ἰσότητας.***

5. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα

77. Ἀλγεβρικὸν κλάσμα. Ἔστωσαν α καὶ β δύο πραγματικοὶ ἀριθμοί· τὸ πηλίκον τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$, λέγεται *ἀλγεβρικὸν κλάσμα*.

Π. χ. Τὰ πηλίκα

$$\frac{+12}{+6}, \quad \frac{+25}{-8}, \quad \frac{-16}{-3}, \quad \frac{18}{-6}, \quad \frac{-5}{4}$$

εἶναι ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Ὁ παρονομαστὴς β ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει νὰ εἶναι *διάφορος τοῦ μηδενός*, διότι ἄλλως τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{0}$, ἐὰν $\alpha \neq 0$, δὲν θὰ εἶχεν καμμίαν ἔννοιαν· πράγματι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν ἀριθμὸν α.

Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta \neq 0$, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν· δηλ. εἶναι

$$\boxed{\frac{0}{\beta}=0}$$

Ἐὰν $\alpha=0$, $\beta=0$, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{0}{0}$ εἶναι ἴσον μὲ τυχόντα ἀριθμὸν (§ 71).

78. Παρατηρήσεις σχετικαὶ μὲ τὸ σημεῖον τῶν κλασμάτων. 1. Ἐπειδὴ ἕνα κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, *τὸ κλάσμα εἶναι θετικόν, ἐὰν οἱ δύο ὅροι του εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἀρνητικόν, ἐὰν οἱ δύο ὅροι του εἶναι ἑτερόσημοι* (§ 69).

Π. χ. $\frac{+15}{+8}=\frac{-15}{-8}=+\frac{15}{8}, \quad \frac{-15}{+8}=\frac{+15}{-8}=-\frac{15}{8}$

2. *Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν συγ-*

χρόνως τὸ σημεῖον ἑνὸς ὅρου του καὶ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ κλάσματος.

Πράγματι· ἡ ἀλλαγὴ τοῦ σημείου ἑνὸς μόνον ὅρου του, ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου, ἀλλὰ ἐπειδὴ ἀλλάσσομεν ἐπίσης καὶ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ κλάσματος, τὸ ἀρχικὸν σημεῖον τοῦ πηλίκου ἀποκαθίσταται.

Π. χ. $\frac{+18}{+9} = -\frac{-18}{+9} = -\frac{18}{-9} = +2$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰς δύο ἀνωτέρω παρατηρήσεις δυνάμεθα νὰ γράψωμεν γενικῶς

$$+\frac{+\alpha}{+\beta} = +\frac{-\alpha}{-\beta} = -\frac{-\alpha}{+\beta} = -\frac{+\alpha}{-\beta}$$

$$-\frac{+\alpha}{+\beta} = -\frac{-\alpha}{-\beta} = +\frac{-\alpha}{+\beta} = +\frac{+\alpha}{-\beta}$$

79. **'Αντίστροφος ἑνὸς ἀριθμοῦ.** *'Αντίστροφος ἑνὸς ἀριθμοῦ μ λέγεται τὸ πηλίκον τῆς θετικῆς μονάδος (+1) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.*

Π. χ. ὁ ἀντίστροφος τοῦ μ εἶναι ὁ $\frac{+1}{\mu}$.

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ —6 εἶναι ὁ $\frac{+1}{-6}$ ἢ $-\frac{1}{6}$.

Ὁ ἀντίστροφος τοῦ $+\frac{3}{5}$ εἶναι ὁ $\frac{1}{+\frac{3}{5}} = +\frac{5}{3}$.

80. **Παρατηρήσεις.** I. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν, ὁ ἀντίστροφος τοῦ +1 εἶναι $\frac{+1}{+1} = +1$. Παρατηροῦμεν, ὅτι :
Ὁ ἀριθμὸς 1 εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφόν του +1.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς —1 εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφόν του —1.

Οἱ ἀριθμοὶ +1 καὶ —1 εἶναι οἱ μόνοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς ἀντιστρόφους των.

II Ὁ ἀντίστροφος τοῦ α εἶναι ὁ $\frac{+1}{\alpha}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν α ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του $\frac{+1}{\alpha}$, εὑρίσκομεν γινόμενον :

$$\alpha \cdot \frac{+1}{\alpha} = +1.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι : *Τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του εἶναι ἴσον μὲ* +1.

81. **'Ιδιότητες τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.** Αἱ ἰδιότητες

τῶν κλασμάτων τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

82. Θεώρημα I. ***Ἡ ἀξία ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς μ θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἀλλὰ διάφορος τοῦ μηδενός.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}$$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ π τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ β ($\beta \neq 0$), θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\pi \quad \text{ἢ} \quad \alpha=\beta\pi. \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ καὶ ἔχομεν $\alpha\mu=\beta\pi\cdot\mu$ ἢ $\alpha\mu=\beta\mu\cdot\pi$. (2)

Ἐπειδὴ τὸ μ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ τὸ βμ θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (2) ἐκφράζει, ὅτι τὸ π εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ αμ διὰ βμ· δηλ. θὰ εἶναι

$$\pi=\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}$$

καὶ ἐπειδὴ $\pi=\frac{\alpha}{\beta}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\mu}{\beta\mu}}$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν, ὅτι: *ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του διὰ μ.*

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ ἀξία ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος...***

Π.χ. $\frac{5}{8}=\frac{5\times(-2)}{8\times(-2)}=\frac{-10}{-16}=+\frac{10}{16}$, $\frac{-24}{18}=\frac{-24:6}{18:6}=\frac{-4}{3}$.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ διαίρεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ α δι' ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ β ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ α ἐπὶ $\frac{1}{\beta}$, δηλ. ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ β.

Ὥστε: $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$.

Δηλ.: *Κάθε διαίρεσις δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ ἕνα πολλαπλασιασμόν.*

83. Πόρισμα. ***Ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο ὅρων του.***

Διότι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ —1.

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{+12}{+4}=\frac{-12}{-4},\quad \frac{+15}{-3}=\frac{-15}{+3}$$

84. Ἐφαρμογαί : *1ον. Ἁπλοποίησις τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.* Δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας καὶ τῶν δύο ὅρων.

Οὕτω:
$$\frac{35}{-42}=\frac{5\times7}{-6\times7}=-\frac{5}{6}$$

2ον. Τροπὴ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα. Ἡ τροπὴ ἑτερωνύμων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἰς ἄλλα ὁμώνυμα γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὰ κλάσματα

$$-\frac{8}{12},\quad \frac{18}{-24},\quad \frac{-5}{-6}$$

εἰς ὁμώνυμα.

Ἁπλοποιοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὰ κλάσματα καὶ ἔχομεν

$$-\frac{2}{3},\quad -\frac{3}{4},\quad \frac{5}{6}$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των εἶναι τὸ 12. Κατὰ τὰ γνωστά, τὰ ἀνωτέρω κλάσματα εἶναι ἴσα μὲ

$$-\frac{8}{12},\quad -\frac{9}{12},\quad \frac{10}{12}$$

Γενικῶς. Ἔστω, ὅτι θέλωμεν νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\alpha'}{\beta'},\ \frac{\alpha''}{\beta''}$

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\beta'\beta''}{\beta\beta'\beta''},\quad \frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha'\beta\beta''}{\beta\beta'\beta''},\quad \frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\alpha''\beta\beta'}{\beta\beta'\beta''}$$

Ἀσκήσεις : 53.

85. Θεώρημα II. ***Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πολλῶν ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{\alpha}{\Delta},\ \frac{\beta}{\Delta},\ \frac{\gamma}{\Delta}$

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\Delta}+\frac{\beta}{\Delta}+\frac{\gamma}{\Delta}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\Delta}$$

Ἀπόδειξις : Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν (§ 68):

ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\Delta}=\pi$, θὰ εἶναι $\alpha=\Delta\pi$ (1)

» » $\frac{\beta}{\Delta}=\pi'$, » » $\beta=\Delta\pi'$ (2)

» » $\frac{\gamma}{\Delta}=\pi''$, » » $\gamma=\Delta\pi''$ (3).

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) καὶ ἔχομεν

$$\alpha+\beta+\gamma=\Delta\pi+\Delta\pi'+\Delta\pi''$$

ἢ $\alpha+\beta+\gamma=\Delta(\pi+\pi'+\pi'')$ (§ 66)

Διαιροῦμεν διὰ Δ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος καὶ ἔχομεν $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\Delta}=\pi+\pi'+\pi''$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὰ π, π', π'' μὲ τὰ ἴσα των $\frac{\alpha}{\Delta}$, $\frac{\beta}{\Delta}$, $\frac{\gamma}{\Delta}$

καὶ ἔχομεν $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\Delta}=\frac{\alpha}{\Delta}+\frac{\beta}{\Delta}+\frac{\gamma}{\Delta}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι : ***Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα...***

Ἐὰν τὰ δοθέντα κλάσματα δὲν εἶναι ὁμώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$\frac{+3}{+4}+\frac{-5}{+6}-\frac{+4}{-3}+\frac{+7}{-8}$$

Τὸ δοθὲν ἄθροισμα γράφεται

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{7}{8}.$$

Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των εἶναι 24· ἔχομεν λοιπόν:

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{7}{8}=\frac{18}{24}-\frac{20}{24}+\frac{32}{24}-\frac{21}{24}=$$

$$=\frac{18-20+32-21}{24}=\frac{+9}{24}=\frac{3}{8}.$$

Ἀσκήσεις : 54.

86. Θεώρημα II. ***Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$, $\frac{\alpha''}{\beta''}$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha'}{\beta'}\times\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}$$

Ἀπόδειξις : Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν (§ 68) :

Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\pi$, θὰ εἶναι $\alpha=\beta\pi$ (1)

» » $\frac{\alpha'}{\beta'}=\pi'$, » » $\alpha'=\beta'\pi'$ (2)

» » $\frac{\alpha''}{\beta''}=\pi''$, » » $\alpha''=\beta''\pi''$ (3)

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\alpha\alpha'\alpha''=\beta\pi\cdot\beta'\pi'\cdot\beta''\pi'' \quad \text{ἢ} \quad \alpha\alpha'\alpha''=\beta\beta'\beta''\pi\pi'\pi'' \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ β, β', β'' εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ τὸ γινόμενόν των $\beta\beta'\beta''$ θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (4) ἐκφράζει, ὅτι τὸ $\pi\pi'\pi''$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha\alpha'\alpha''$ διὰ τοῦ $\beta\beta'\beta''$, δηλ. εἶναι

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}=\pi\pi'\pi'' \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\beta\beta'\beta''}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\alpha''}{\beta''}.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι : ***Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων...***

Παράδειγμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων $\frac{-1}{+2}$, $\frac{+2}{+3}$, $\frac{+5}{-6}$, $\frac{-10}{+3}$

Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{-1}{+2}\cdot\frac{+2}{+3}\cdot\frac{+5}{-6}\cdot\frac{-10}{+3}=\frac{(-1)\cdot(+2)\cdot(+5)\cdot(-10)}{(+2)\cdot(+3)\cdot(-6)\cdot(+3)}=\frac{+100}{-108}=-\frac{25}{27}$$

Ἀσκήσεις : *55, 56, 57.*

87. **Θεώρημα III.** ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ κλάσματος πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}.$$

Ἀπόδειξις : Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{\gamma}{\delta}$, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $\frac{\alpha}{\beta}$.

Πράγματι ἔχομεν

$$\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma\cdot\delta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\delta}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι : ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα...***

Π. χ. $\frac{-4}{+5} : \frac{+7}{-10} = \frac{-4}{+5} \cdot \frac{-10}{+7} = \frac{(-4)\cdot(-10)}{(+5)\cdot(+7)} = \frac{+8}{+7} = \frac{8}{7}$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\frac{\frac{+4}{-3}}{\frac{-5}{+6}} = \frac{+4}{-3} : \frac{-5}{+6} = \frac{+4}{-3} \cdot \frac{+6}{-5} = \frac{(+4)\cdot(+6)}{(-3)\cdot(-5)} = \frac{8}{5}.$$

Ἀσκήσεις : 58, 59.

Ἀσκήσεις

35. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $(+5)\cdot(+7)$ 2. $(-8)\cdot(+9)$ 3. $(+10)\cdot(-4)$
4. $(-3{,}5)\cdot(-0{,}6)$ 5. $(+1{,}4)\cdot(+2{,}3)$ 6. $(-0{,}7)\cdot(+0{,}8)$.

36. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$ 2. $(-9)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)$
3. $\left(+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(+\frac{2}{3}\right)$ 4. $\left(+9\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$.

37. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(+2)\cdot(-3)-(+5)\cdot(-8)+(-9)\cdot(-6)-3\cdot(-10)$
2. $(+5)\cdot(-2)+(-9)\cdot(-1)-(+8)\cdot(-3)-(-7)\cdot 4$
3. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)\left(+\frac{5}{8}\right)$

38. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $(+3)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(+4)\cdot(-7)$
2. $(-6)\cdot(-2)\cdot(-5)\cdot(+1)\cdot(-10)$
3. $(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(-1)$.

39. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(+2)(-3)(-5)-(+1)(-7)(+2)+(-2)(-4)(+6)$
2. $(-5)(-1)(+10)-(+2)(-3)(-1)(+5)$
3. $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$.

40. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $[(-4)\cdot(+9)\cdot(-2)]\cdot(-7)$ 2. $[(-7)(-5)(+1)]\cdot(+2)$
3. $[(-5)(+7)(-10)]\cdot[(-1)(+2)(-8)]$
4. $[2(-8)(+3)]\cdot[(-5)(-1)(+4)]\cdot[(+4)(+1)(-10)]$.

41. Νὰ ἐκτελεσθοῦν κατὰ δύο τρόπους, αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(14-6+2-10)\cdot(+5)$ 2. $(-4+9+8-25)\cdot(-4)$
3. $\left(-\frac{1}{3}+6+\frac{2}{5}-8\right)\cdot(-5)$ 4. $\left(-5+8-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-7\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$.

42. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-4+6+6-5)\cdot(+3-8)$ 2. $(-6+8-4-12)\cdot(5-9)$ 3. $(-2+5)\cdot(4-8)\cdot(3-11)$.

43. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-10+6-18)\cdot(12-9)\cdot(-4)$ 2. $(-4+10-1)(-3+8-5)(+4)$.

44. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-5+8-10)(-2)-(7+9-6)(+5)$
2. $(+12-7+24)(-3)-(-6+4)(-5)+(-3)(+7)$
3. $\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{8}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$.

45. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $(+30):(+5)$ 2. $(-20):(-4)$ 3. $(-32):(+8)$
4. $(+45):(-9)$ 5. $(-75):(+6)$ 6. $(+87):(-3)$
7. $(+4,5):(-0,9)$ 8. $(-8,75):(+0,25)$.

46. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου $\frac{\alpha}{\beta}$:

1. ἐὰν $\alpha=-216$, $\beta=+18$ 4. ἐὰν $\alpha=+12,6$, $\beta=-1,8$
2. » $\alpha=+248$, $\beta=-12$ 5. » $\alpha=-5,64$, $\beta=+0,6$
3. » $\alpha=-350$, $\beta=-25$ 6. » $\alpha=+29,6$, $\beta=-0,4$.

47. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα :

1. $\left(+\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{5}{6}\right)$ 5. $\left(-2\frac{1}{2}\right):\left(+1\frac{1}{4}\right)$
2. $\left(-\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$ 6. $\left(-5\frac{1}{3}\right):\left(-2\frac{1}{5}\right)$
3. $\left(-\frac{7}{8}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)$ 7. $\left(+5\frac{1}{2}\right):\left(+1\frac{2}{3}\right)$
4. $\left(+\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$ 8. $\left(-3\right):\left(+4\frac{3}{5}\right)$

48. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $[(-24):(+3)]-[(-18):(-6)]+[(+36):(-9)]$
2. $[(+5)\cdot(-4)]-[(-375):(-25)]+(-4+12-7)$.

49. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-8+12-24+2-10):(+2)$
2. $(-24+15-27+18-30):(-3)$
3. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{2}{5}-1+\frac{7}{8}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$.

50. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-16+24-40):(-4)-(-27+12-30):(-3)$
2. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right):\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{5}-\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$.

51. Νὰ ἐκτελεσθοῦν κατὰ δύο τρόπους αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $[(-24)(+35)(-16)(+43)]:(-4)$ 2. $[(-6)\cdot 7\cdot(-15)\cdot 8]:(-15)$.

52. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $[(+5)(-12)-(-20)(+6)]:(-3)$
2. $[(+5)(+9)+(-6)(+8)-(+4)(-15)]:(-3)$

53. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν καὶ νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα:

1. $\dfrac{-10}{+25}$, $\dfrac{+3}{-24}$, $\dfrac{-10}{-18}$, 2. $\dfrac{-9}{+4}$, $\dfrac{+5}{+5}$, (-10).

54. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $\dfrac{-3}{5}+\dfrac{2}{-7}$ 4. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}$

2. $\dfrac{+5}{-12}-\dfrac{-7}{36}$ 5. $\dfrac{-4}{5}-\dfrac{2}{-3}+\dfrac{-1}{10}$

3. $\dfrac{6}{11}-\dfrac{+5}{-33}$ 6. $\dfrac{-6}{8}-\dfrac{-2}{5}-\dfrac{-3}{+15}$.

55. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $\dfrac{4}{-5}\cdot\dfrac{-3}{8}$ 4. $\dfrac{-5}{6}\cdot\dfrac{+4}{-5}$ 7. $\dfrac{-1}{+4}\cdot\dfrac{+3}{-7}$

2. $\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{-9}{-10}$ 5. $\dfrac{-1}{+4}\cdot(-7)$ 8. $\dfrac{+6}{-2}\cdot\dfrac{-9}{+10}$

3. $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{-5}{+6}$ 6. $(-4)\cdot\dfrac{-7}{+12}$ 9. $\dfrac{-7}{8}\cdot\dfrac{6}{-7}$.

56. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $\dfrac{-15}{+4}\cdot\dfrac{+8}{-4}\cdot\dfrac{-3}{+5}$ 3. $(-5)\cdot\dfrac{-1}{+4}\cdot(-2)\cdot\dfrac{+3}{-5}$

2. $\dfrac{+7}{-2}\cdot\dfrac{-1}{+4}\cdot\dfrac{-3}{-5}$ 4. $\dfrac{-5}{+6}\cdot\dfrac{+2}{-5}\cdot(-10)\cdot\dfrac{-7}{+10}$.

57. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

1. $\left(-\dfrac{+3}{4}+\dfrac{-2}{+3}-\dfrac{-1}{-6}+\dfrac{2}{-5}\right)\cdot\dfrac{-7}{+3}$

2. $\left(-\dfrac{+1}{-3}+\dfrac{+5}{-4}+\dfrac{-3}{+2}\right)\cdot\left(\dfrac{-3}{+4}-\dfrac{-1}{+5}\right)$

3. $\dfrac{-4+7-2}{+1-12+5}\cdot\dfrac{9-3+8}{-7+2-1}\cdot\dfrac{-5+11}{-10+4+5}$.

58. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $\dfrac{2}{5}:\dfrac{-3}{8}$ 3. $\dfrac{-1}{+4}:\dfrac{-2}{-3}$ 5. $(-8):\dfrac{-4}{+5}$

2. $\dfrac{-4}{3}:\dfrac{-3}{+10}$ 4. $\dfrac{-6}{-7}:\dfrac{-3}{+4}$ 6. $(+9):\dfrac{-7}{-10}$.

59. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $\dfrac{5+3-10}{-4+2-7}:\dfrac{1-7+9}{2+5-11}$ 3. $\dfrac{-1+2-3}{(-5)\cdot(+6)-7}:\dfrac{(-8):(+4)}{5-7+11}$

2. $\dfrac{-12+15-18}{+6-7+11}:\dfrac{5-(4-3)}{-8-(6-7)}$ 4. $\dfrac{(-2)(+6)-10}{(+24):(-6)}:\dfrac{5-9+1}{5-4(4-9)}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ, ΡΙΖΑΙ, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

---

1. Δυνάμεις πραγματικῶν ἀριθμῶν

88. **Ὁρισμός.** *Δύναμις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.*

Π. χ. Τὸ γινόμενον $(-2)(-2)(-2)(-2)$ εἶναι ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ (-2) καὶ γράφεται συμβολικῶς $(-2)^4$· δηλ. εἶναι

$$(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=+16$$

Ὁμοίως ἡ πέμπτη δύναμις τοῦ $(+3)$ εἶναι

$$(+3)^5=(+3)(+3)(+3)(+3)(+3)=+243$$

Γενικῶς : *Νυοστὴ δύναμις ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α λέγεται τὸ γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν α.*

Π. χ. ἡ νυοστὴ δύναμις τοῦ α εἶναι

$$\alpha^\nu=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\cdots\cdot\alpha, \text{ (ν παράγοντες)}$$

Ὁ ἀριθμὸς α λέγεται βάσις τῆς δυνάμεως α^ν καὶ ὁ μικρὸς ἀριθμὸς ν, ὁ ὁποῖος γράφεται δεξιὰ καὶ ἄνω τῆς βάσεως, λέγεται ἐκθέτης τῆς δυνάμεως.

Π. χ. εἰς τὴν δύναμιν $(-5)^4$ βάσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς -5 καὶ ἐκθέτης ὁ 4.

Ὁ ἐκθέτης φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων, ὁ ἐκθέτης πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐπίσης ὁ ἐκθέτης δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 2, διότι ἄλλως δὲν θὰ εἴχομεν γινόμενον ἴσων παραγόντων καὶ ἑπομένως καὶ δύναμιν ἀριθμοῦ.

Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τετράγωνον αὐτοῦ, ἡ δὲ τρίτη δύναμις αὐτοῦ λέγεται καὶ κύβος αὐτοῦ.

Π. χ. τὸ γινόμενον $(-5)\cdot(-5)$ γράφεται $(-5)^2$ καὶ ἐκφωνεῖται: -5 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν ἢ -5 εἰς τὸ τετράγωνον.

Ἐπίσης τὸ γινόμενον $(+2)(+2)(+2)$ γράφεται $(+2)^3$ καὶ ἐκφωνεῖται: $+2$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ἢ $+2$ εἰς τὸν κύβον.

89. Σημεῖον τῶν δυνάμεων. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα πραγματικῶν παραγόντων, τὸ σημεῖον των ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων· ἂν λοιπὸν ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸν κανόνα τοῦ σημείου ἑνὸς γινομένου πολλῶν παραγόντων (§ 58) συνάγομεν, ὅτι:

1ον Κάθε δύναμις, ἡ ὁποία ἔχει ἄ ρ τ ι ο ν ἐκθέτην εἶναι θετική.

2ον Κάθε δύναμις, ἡ ὁποία ἔχει π ε ρ ι τ τ ὸ ν ἐκθέτην ἔχει τὸ σημεῖον τῆς βάσεώς της.

Π. χ. $(+3)^4=(+3)(+3)(+3)(+3)=+81$

$(-3)^4=+81$ (ἔχει 4 ἀρνητικοὺς παράγοντας)

$(-3)^3=-27$ (ἔχει 3 ἀρνητικοὺς παράγοντας)

$(-\alpha)^\nu = \alpha^\nu$, ἐὰν ν εἶναι ἄρτιος

$(-\alpha)^\nu = -\alpha^\nu$, ἐὰν ν εἶναι περιττός.

90. Παρατηρήσεις. I. Ἐπειδὴ $1^6=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$ συνάγομεν, ὅτι:

Ὅλαι αἱ δυνάμεις τῆς μονάδος εἶναι ἴσαι μὲ 1.

II. Εἴπομεν ἀνωτέρω (§ 88), ὅτι ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 2· ἐν τούτοις *παραδεχόμεθα*, ὅτι:

Π. χ. $8=8^1$, $(-5)^1=-5$, $\alpha^1=\alpha$, $\beta=\beta^1$ (βλέπε § 97).

III. Ὅταν ἡ βάσις μιᾶς δυνάμεως εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, πρέπει νὰ θέτωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ἐντὸς παρενθέσεως.

Διότι τὸ $(-5)^2$ εἶναι τελείως διάφορον τοῦ -5^2.

Πράγματι: $(-5)^2=(-5)(-5)=+25$

$-5^2=-5\cdot5=-25$.

Ἀσκήσεις: 60, 61, 62, 63, 64.

91. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

92. Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\alpha^4\cdot\alpha^2\cdot\alpha^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι:

$$\alpha^4\cdot\alpha^2\cdot\alpha^3=\alpha\alpha\alpha\alpha\cdot\alpha\alpha\cdot\alpha\alpha\alpha.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι τὸ γινόμενον $4+2+3=9$ παραγόντων ἴσων μὲ τὸν α· ὥστε εἶναι ἴσον μὲ $\alpha^{4+2+3}=\alpha^9$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\alpha^4\cdot\alpha^2\cdot\alpha^3=\alpha^{4+2+3}=\alpha^9.$$

Ὁμοίως εἶναι $(-3)^4\cdot(-3)^5\cdot(-3)^2=(-3)^{4+5+2}=(-3)^{11}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

I. Ἰδιότης. ***Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ***

εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν των.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\rho}=\alpha^{\mu+\nu+\rho}$$ καὶ ἀντιστρόφως $$\alpha^{\mu+\nu}=\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}$$

Ἀσκήσεις : 65, 66

93. Δύναμις μιᾶς δυνάμεως. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν πέμπτην δύναμιν τῆς δυνάμεως α^3, δηλ. νὰ εὕρωμεν μὲ τί ἰσοῦται τὸ $(\alpha^3)^5$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι

$$(\alpha^3)^5=\alpha^3\cdot\alpha^3\cdot\alpha^3\cdot\alpha^3\cdot\alpha^3$$

ἤ, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα

$$(\alpha^3)^5=\alpha^{3+3+3+3+3}=\alpha^{3\cdot5}=\alpha^{15}.$$

Ὁμοίως θὰ εἶναι $[(-5)^2]^3=(-5)^6$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

II. Ἰδιότης. ***Ἡ δύναμις μιᾶς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τῆς ὁποίας ὁ ἐκθέτης εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.***

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μίαν δύναμιν ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, σχηματίζομεν μίαν νέαν δύναμιν, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν καὶ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$$ καὶ ἀντιστρόφως $$\alpha^{\mu\nu}=(\alpha^{\mu})^{\nu}=(\alpha^{\nu})^{\mu}$$

Ἀσκήσεις : 67, 68, 69.

94. Πῶς ὑψώνομεν γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμιν; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^3&=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\\&=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\gamma\cdot\gamma\\&=\alpha^3\cdot\beta^3\cdot\gamma^3.\end{aligned}$$

Ὁμοίως εἶναι

$$[(-2)\cdot(-3)\cdot(+5)]^4=(-2)^4\cdot(-3)^4\cdot(+5)^4.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

III. Ἰδιότης. ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu\cdot\delta^\nu$$ καὶ ἀντιστρόφως $$\alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu=(\alpha\beta\gamma)^\nu$$

Ἀσκήσεις : 70, 71, 72, 73

95. Πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\alpha^7 : \alpha^4$.

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν παρίσταται καὶ ὑπὸ μορφὴν κλάσματος, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^7 : \alpha^4 = \frac{\alpha^7}{\alpha^4} = \frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot}{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot} = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot = \alpha^3.$$

Ὥστε εἶναι $\alpha^7 : \alpha^4 = \alpha^{7-4} = \alpha^3$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$(-5)^6 : (-5)^4 = (-5)^{6-4} = (-5)^2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

IV Ἰδιότης. ***Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτήν, ἐὰν εἶναι $\mu > \nu$, θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$$ ἢ καὶ $$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

καὶ ἀντιστρόφως $$\alpha^{\mu-\nu} = \alpha^\mu : \alpha^\nu$$

Ἀσκήσεις : 74, 75, 76.

96. Πῶς ὑψώνομεν ἕνα κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, δηλ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν, μὲ τί ἰσοῦται τὸ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot}{\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdot} = \frac{\alpha^3}{\beta^3}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι ;

V. Ἰδιότης. ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.***

Κατὰ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν θὰ εἶναι γενικῶς :

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}=\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}} \quad \text{καὶ ἀντιστρόφως} \quad \boxed{\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}}$$

Ἀσκήσεις : 77.

97. Πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως α^6 διὰ α^5. Κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θὰ εἶναι :

$$\frac{\alpha^6}{\alpha^5}=\alpha^{6-5}=\alpha^1 \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι προέκυψε τὸ σύμβολον α^1, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δύναμις τοῦ α, διότι ὁ ἐκθέτης τοῦ α εἶναι μικρότερος τοῦ 2.

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον $\alpha^6 : \alpha^5$ δύναται νὰ γραφῇ :

$$\frac{\alpha^6}{\alpha^5}=\frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot}{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot}=\alpha \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἀναγκαζόμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι τὸ σύμβολον α^1 παριστάνει τὸν ἀριθμὸν α, δηλ. εἶναι : $\alpha^1=\alpha$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\beta^1=\beta, \quad (-5)^1=-5, \quad (+12)^1=+12.$$

Ὥστε παραδεχόμεθα, ὅτι :

Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Δηλ. εἶναι γενικῶς $\boxed{\alpha^1=\alpha}$

Ἀσκήσεις : 78, 79.

98. Περί τοῦ συμβόλου α^0. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $(\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu})$, ὑπεθέσαμεν, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ τοῦ διαιρετέου α^{μ} εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου ν τοῦ διαιρέτου α^{ν} καὶ εὑρήκαμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu}.$$

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

1ον. Οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι ἴσοι. Ἔστω, ὅτι οἱ ἐκθέται μ καὶ

ν εἶναι ἴσοι καὶ ἔστω, ὅτι $\mu=\nu=5$. Ἐὰν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha^5}{\alpha^5}=\alpha^{5-5}=\alpha^0 \quad (1)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι προέκυψε τὸ σύμβολον α^0, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν.

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^5}{\alpha^5}$, ὡς πηλίκον δύο ἴσων ἀριθμῶν, εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα, δηλ. εἶναι $\frac{\alpha^5}{\alpha^5}=1$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἀναγκαζόμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι τὸ σύμβολον α^0 παριστάνει τὴν μονάδα 1, δηλ., ὅτι εἶναι $\alpha^0=1$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\beta^0=1, \quad (-4)^0=1, \quad (\alpha+\beta)^0=1.$$

Ὥστε παραδεχόμεθα, ὅτι :

Ἡ μηδενικὴ δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαφόρου τοῦ μηδενός, εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα 1.

Δηλ. γενικῶς εἶναι $\boxed{\alpha^0=1}$

2ον. Ὁ ἐκθέτης μ εἶναι μικρότερος τοῦ ν. Ἔστω, ὅτι εἶναι $\mu=3$ καὶ $\nu=5$. Ἂν παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων ὑφίσταται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^5}=\alpha^{3-5}=\alpha^{-2} \quad (3)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι προέκυψε τὸ σύμβολον α^{-2}, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν.

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦ α^3 διὰ τοῦ α^5 γράφεται :

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^5}=\frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot}{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot}=\frac{1}{\alpha^2} \quad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) ἀναγκαζόμεθα νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι : $\alpha^{-2}=\frac{1}{\alpha^2}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\beta^{-4}=\frac{1}{\beta^4}$

καὶ γενικῶς θὰ εἶναι $\boxed{\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}}$

Ὥστε παραδεχόμεθα, ὅτι :

Κάθε δύναμις ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην ἀρνητικὸν ἀριθμόν, εἶναι ἴση μὲ κ λ ά σ μ α, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα 1 καὶ παρονομαστὴν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ τὸν ἐκθέτην του θετικόν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \quad (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$$

καὶ ἀντιστρόφως:

$$\frac{1}{\alpha^3} = \alpha^{-3}, \quad \frac{1}{5^4} = 5^{-4}, \quad \frac{1}{\alpha^\nu} = \alpha^{-\nu}$$

Ἐπίσης εἶναι: $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1}$.

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὰ ἀνωτέρω:

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \begin{cases} \alpha^{\mu-\nu} & \text{ἐὰν εἶναι } \mu>\nu \\ 1 & \text{»} \quad \text{»} \quad \mu=\nu \\ \dfrac{1}{\alpha^{\nu-\mu}} & \text{»} \quad \text{»} \quad \mu<\nu \end{cases}$$

99. Παρατήρησις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν οἱ ἐκθέται των πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα (§ 98) μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ γενικεύσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἐ π ε κ τ ε ί ν ο ν τ ε ς α ὐ τ ὴ ν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ ο ἱ ἐ κ θ έ τ α ι ε ἶ ν α ι μ η δ ὲ ν ἢ ἀ ρ ν η τ ι κ ο ὶ ἀ ρ ι θ μ ο ί.

Οὕτω παρεδέχθημεν, ὅτι:

$$\alpha^0=1, \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}.$$

Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικοὺς καὶ ἀκεραίους ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ ἀρνητικούς.

Πράγματι ἔχομεν:

I $$\boxed{\alpha^{-\nu} \cdot \alpha^{-\mu}=\alpha^{-\nu-\mu}}$$

Διότι $\alpha^{-\nu} \cdot \alpha^{-\mu}= \frac{1}{\alpha^\nu} \cdot \frac{1}{\alpha^\mu} = \frac{1}{\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu} = \frac{1}{\alpha^{\nu+\mu}} =\alpha^{-(\nu+\mu)} = \alpha^{-\nu-\mu}$.

II. $$\boxed{(\alpha^\nu)^{-\mu}=\alpha^{-\nu\mu}}$$

Διότι $(\alpha^\nu)^{-\mu}= \frac{1}{(\alpha^\nu)^\mu} = \frac{1}{\alpha^{\nu\mu}} =\alpha^{-\nu\mu}$.

III. $$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{-\nu} = \alpha^{-\nu} \cdot \beta^{-\nu} \cdot \gamma^{-\nu}$$

Διότι

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{-\nu} = \frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} \cdot \gamma^{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} \cdot \frac{1}{\beta^{\nu}} \cdot \frac{1}{\gamma^{\nu}} = \alpha^{-\nu} \cdot \beta^{-\nu} \cdot \gamma^{-\nu}$$

IV. $$\alpha^{-\mu} : \alpha^{-\nu} = \alpha^{(-\mu)-(-\nu)} = \alpha^{\nu-\mu}$$

Διότι $$\alpha^{-\mu} : \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} : \frac{1}{\alpha^{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} \cdot \frac{\alpha^{\nu}}{1} = \frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\nu-\mu}.$$

Ἀσκήσεις : 80, 81, 82, 83, 84, 85.

2. Ρίζαι ἑνὸς ἀριθμοῦ

100. Ὁρισμός. *Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ A λέγεται ἕνας ἄλλος πραγματικὸς ἀριθμὸς x, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ A.*

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, ἐὰν $x^2=A$, ὁ x εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ A.

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ A παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt{A}$, τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται : τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ A.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι $$\sqrt{A} = x, \quad \text{ἐὰν} \quad x^2 = A$$

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ δευτέρα ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{\ }$ λέγεται ριζικὸν καὶ ὁ ἀριθμὸς A, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ὑπὸ τὸ ριζικὸν λέγεται ὑπόρριζον.

101. Κυβικὴ ρίζα. *Κυβικὴ ρίζα ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ A λέγεται ἕνας ἄλλος πραγματικὸς ἀριθμὸς x, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος εἶναι ἴσος μὲ A.*

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ὁ x θὰ εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ A, ἐὰν $x^3=A$.

Ἡ κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ A παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt[3]{A}$, τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται : κυβικὴ ρίζα τοῦ A ἢ τρίτη ρίζα τοῦ A.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι $$\sqrt[3]{A} = x, \quad \text{ἐὰν} \quad x^3 = A$$

Ἡ κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τρίτη ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $\sqrt[3]{27}=3$, διότι $3^3=27$.

102. Ὁρισμός. *Νιοστὴ ρίζα ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται ἕνας ἄλλος πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*

Ἡ νιοστὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ Α παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{A}$ καὶ ἐκφωνεῖται : νιοστὴ ρίζα τοῦ Α.
Ἡ νιοστὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ Α θὰ εἶναι ἕνας ἄλλος ἀριθμὸς x, ἐὰν $x^\nu = A$, δηλ. θὰ εἶναι :

$$\sqrt[\nu]{A} = x, \quad \text{ἐὰν} \quad x^\nu = A$$

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ λέγεται ριζικόν· ὁ ἀριθμὸς ν λέγεται δείκτης τοῦ ριζικοῦ καὶ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ὑπὸ τὸ ριζικὸν λέγεται ὑπόρριζον.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι $\sqrt[5]{32}=2$, διότι $2^5=32$.
Ἐὰν ὁ δείκτης ν μιᾶς ρίζης εἶναι ἄρτιος, ἡ ρίζα λέγεται ἀρτία ἢ ἀρτίας τάξεως, ἐὰν δὲ εἶναι περιττός, ἡ ρίζα λέγεται ρίζα περιττῆς τάξεως.

103 Παρατήρησις. Γνωρίζομεν, ὅτι :

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=\beta \quad (1), \quad \text{ἐὰν} \quad \beta^\nu = \alpha \quad (2).$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) θὰ ἔχωμεν $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \beta^\nu$.

Ἐπειδὴ $\beta^\nu = \alpha$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται : $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$.
Παρατηροῦμεν, ὅτι : *Ἐὰν ὑψώσωμεν τὴν νιοστὴν ρίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν, εὑρίσκομεν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα.*

Οὕτω θὰ εἶναι $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, $\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3 = \alpha$, $\left(\sqrt[8]{\alpha}\right)^8 = \alpha$

καὶ γενικῶς

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$$

104. Ρίζαι ἀρτίας τάξεως. *1ον.* Ἐπειδὴ $(\pm 6)^2=+36$ συνάγο-

μεν, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $+36$ εἶναι ὁ $+6$ καὶ ὁ -6· δηλ. εἶναι :

$$\sqrt{+36}=\pm 6, \quad \text{διότι} \quad (\pm 6)^2=+36.$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{81}=\pm 9$, διότι $(\pm 9)^2=81$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(\pm 2)^4=+16$, ἕπεται, ὅτι ἡ τετάρτη ρίζα τοῦ $+16$ εἶναι ὁ $+2$ καὶ ὁ -2· δηλ. εἶναι :

$$\sqrt[4]{+16}=\pm 2, \quad \text{διότι} \quad (\pm 2)^4=+16.$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt[4]{81}=\pm 3$, διότι $(\pm 3)^4=81$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(\pm 2)^6=+64$ ἕπεται, ὅτι ἡ ἕκτη ρίζα τοῦ $+64$ εἶναι ὁ $+2$ καὶ ὁ -2· δηλ. εἶναι

$$\sqrt[6]{+64}=\pm 2, \quad \text{διότι} \quad (\pm 2)^6=+64.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο τετραγωνικὰς ρίζας καὶ γενικῶς δύο ρίζας ἀρτίας τάξεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντίθετοι.

2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ -81.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς -81 δὲν ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς x, θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν νὰ μᾶς δίδῃ τὸν -81.

Ὥστε ἡ $\sqrt{-81}$ δὲν ὑπάρχει.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι : $\sqrt[4]{-64}$ δὲν ὑπάρχει.

Ὥστε δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν νὰ δίδῃ ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τετραγωνικὰς ρίζας ἢ ρίζας ἀρτίας τάξεως.

105. Παρατηρήσεις. Εἰς τὰς ἐφαρμογάς, ἐκ τῶν δύο τετραγωνικῶν ριζῶν ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, θὰ λαμβάνωμεν ἐκείνην, ἡ ὁποία ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον, μὲ τὸ σημεῖον ποὺ εὑρίσκεται ἔμπροσθεν τοῦ ριζικοῦ.

Π. χ. $+\sqrt{16}=+4$, $\quad -\sqrt{16}=-4$, $\quad \pm\sqrt{16}=\pm 4$

$\sqrt{25}=5$, $\quad -\sqrt{25}=-5$, $\quad \pm\sqrt{25}=\pm 5$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(\pm\alpha)^2=\alpha^2$ αἱ ρίζαι τοῦ α^2 θὰ εἶναι :

$$\pm\sqrt{\alpha^2}=\pm\alpha$$

ἀλλὰ

$$\sqrt{\alpha^2}=\begin{cases}+\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha>0\\ -\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha<0\end{cases}$$

$$-\sqrt{\alpha^2}=\begin{cases}-\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha>0\\ +\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha<0\end{cases}$$

106. Ρίζαι περιττῆς τάξεως. Ἐπειδὴ $(+2)^3=+8$ συνάγομεν, ὅτι ἡ κ υ β ι κ ὴ ρ ί ζ α τοῦ $+8$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $+2$· δηλ. εἶναι

$$\sqrt[3]{+8}=+2, \quad \text{διότι} \quad (+2)^3=8.$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt[3]{64}=+4$, διότι $4^3=64$.

Ἐπίσης ἐπειδὴ $(-5)^3=-125$ ἕπεται, ὅτι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ -125 εἶναι ὁ ἀριθμὸς -5· δηλ. εἶναι

$$\sqrt[3]{-125}=-5, \quad \text{διότι} \quad (-5)^3=-125.$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ $(+2)^5=+32$, $(-2)^5=-32$ συνάγομεν, ὅτι :

$$\sqrt[5]{+32}=+2, \quad \text{διότι} \quad (+2)^5=-32$$

$$\sqrt[5]{-32}=-2, \quad \text{διότι} \quad (-2)^5=-32.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν μόνον κυβικὴν ρίζαν καὶ γενικῶς μίαν μόνον ρίζαν περιττῆς τάξεως.

Παρατήρησις. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις εἶναι

$$\sqrt[\nu]{0}=0$$

Ἀσκήσεις: 86, 87, 88.

3. Ἀνισότητες

107. Ὁρισμοί. *Λέγομεν, ὅτι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλύτερος ἑνὸς ἄλλου β, καὶ γράφομεν $\alpha>\beta$, ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha-\beta>0$.*

Λέγομεν, ὅτι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς α εἶναι μικρότερος ἑνὸς ἄλλου β, καὶ γράφομεν $\alpha<\beta$, ἐὰν ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha-\beta<0$.

Κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς αὐτοὺς θὰ εἶναι:

$3>-8$, διότι $3-(-8)=3+8=+11$

$-5>-7$, διότι $-5-(-7)=-5+7=+2$

$2>0$, διότι $2-0=2$

$0>-5$, διότι $0-(-5)=0+(+5)=+5$.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅπως καὶ εἰς τὴν § 21, ὅτι:

1ον. Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

2ον. Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ποὺ ἔχει τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

3ον. Τὸ μηδὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ κάθε ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Διὰ τοῦτο, ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν, ὅτι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς α εἶναι θετικός, γράφομεν $\alpha>0$ καὶ ὅταν ὁ α εἶναι ἀρνητικός, γράφομεν $\alpha<0$.

Ἡ σχέσις $\alpha>\beta$ λέγεται ἀ ν ι σ ό τ η ς· τὸ α εἶναι τὸ π ρ ῶ τ ο ν μ έ λ ο ς τῆς ἀνισότητος· τὸ β εἶναι τὸ δ ε ύ τ ε ρ ο ν μ έ λ ο ς τῆς ἀ ν ι σ ό τ η τ ο ς

Αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ λέγονται ὁ μ ο ι ό σ τ ρ ο φ ο ι ἀνισότητες, ἢ λέγομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ ἔχουν τὴν α ὐ τ ὴ ν σ τ ρ ο φ ή ν.

Αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma<\delta$ λέγονται ἑ τ ε ρ ό σ τ ρ ο φ ο ι ἢ λέγομεν, ὅτι ἔχουν ἀ ν τ ί θ ε τ ο ν σ τ ρ ο φ ή ν.

108. Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων. Θεώρημα I. ***Ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἡ στροφὴ τῆς ἀνισότητος δὲν μεταβάλλεται.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$ καὶ μ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\alpha+\mu>\beta+\mu.$$

Ὑπόθ.	$\alpha>\beta$
Συμπ.	$\alpha\pm\mu>\beta\pm\mu$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι, κατὰ τὸν ὁρισμόν, $\alpha-\beta>0$ (1)

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ ἀφαιρέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (1) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀνισότης δὲν ἀλλάσσει στροφήν· θὰ εἶναι λοιπόν:

$$\alpha+\mu-\beta-\mu>0 \quad ἢ \quad (\alpha+\mu)-(\beta+\mu)>0.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀνισοτήτων ἡ τελευταία ἀνισότης ἐκφράζει, ὅτι ὁ $(\alpha+\mu)$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $(\beta+\mu)$· δηλ. εἶναι:

$$\alpha+\mu>\beta+\mu.$$

'Ομοίως ἔχομεν :

$α-μ-β+μ>0$ ἢ $(α-μ)-(β-μ)>0$ ἢ $α-μ>β-μ$.

'Εδείχθη λοιπὸν ὅτι : ***'Εὰν προσθέσωμεν...***

"Ωστε :

'Εὰν εἶναι $α>β$ θὰ εἶναι καὶ $α±μ>β±μ$

Π. χ. : 'Επειδὴ εἶναι $18>11$ θὰ εἶναι καὶ $18+5>11+5$ καὶ $18-5>11-5$.

109. Πορίσματα Ι. ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον της ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος της εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον του.***

'Υπόθεσις : "Εστω ἡ ἀνισότης

$α>β+γ$ (1)

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι καὶ $α-γ>β$.

'Υπόθ.	$α>β+γ$
Συμπ.	$α-γ>β$

'Απόδειξις : 'Εὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1), τὸν ἀριθμὸν γ, θὰ ἔχωμεν $α-γ>β+γ-γ$ ἢ $α-γ>β$.

Π. χ. 'Εὰν εἶναι $25>7+9$ θὰ εἶναι καὶ $25-7>9$ ἢ $18>9$.

'Ομοίως, ἐὰν εἶναι $8>15-12$ θὰ εἶναι καὶ $8+12>15$.

ΙΙ. ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους ἑνὸς μέλους της εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν ὅλα τὰ πρόσημά των· δηλ. δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μίαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς*** $Α>0$ ἢ $Α<0$.

Π. χ. 'Εὰν εἶναι $α+β>γ-δ$ θὰ εἶναι $α+β-γ+δ>0$.

110. Θεώρημα ΙΙ. ***'Εὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας προκύπτει ὁμοιόστροφος ἀνισότης.***

'Υπόθεσις : "Εστωσαν αἱ ὁμοιόστροφοι ἀνισότητες

$α>β$, $γ>δ$, $ε>ζ$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι $α+γ+ε>β+δ+ζ$.

'Υπόθ.	$α>β$ $γ>δ$ $ε>ζ$
Συμπ.	$α+γ+ε>β+δ+ζ$

'Απόδειξις : 'Επειδὴ εἶναι $α>β$, θὰ εἶναι $α-β>0$ (1).

'Ομοίως, ἐπειδὴ εἶναι $γ>δ$ καὶ $ε>ζ$, θὰ εἶναι καὶ

$γ-δ>0$ (2), $ε-ζ>0$ (3).

'Εὰν προσθέσωμεν τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς $(α-β)$, $(γ-δ)$, $(ε-ζ)$, τὸ ἄθροισμά των θὰ εἶναι θετικόν· ἤτοι θὰ εἶναι

$$(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)+(\varepsilon-\zeta)>0$$

ἢ $$\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon-\zeta>0$$

ἢ $$(\alpha+\gamma+\varepsilon)-(\beta+\delta+\zeta)>0.$$

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $(\alpha+\gamma+\varepsilon)-(\beta+\delta+\zeta)$ εἶναι θετική, ἕπεται, ὅτι θὰ εἶναι

$$\alpha+\gamma+\varepsilon>\beta+\delta+\zeta.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι : ***Ἐὰν προσθέσωμεν...***

Παρατήρησις. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθές, ἐὰν μία ἐκ τῶν ἀνισοτήτων ἀντικατασταθῇ διὰ μιᾶς ἰσότητος. Δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha>\beta,\quad \gamma=\delta,\quad \varepsilon>\zeta$

θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ $\alpha+\gamma+\varepsilon>\beta+\delta+\zeta.$

111. Θεώρημα III. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν ἡ ἀνισότης δὲν ἀλλάσσει στροφήν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$.

Συμπέρασμα : Ἐὰν $\mu>0$, θὰ δείξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha\mu>\beta\mu$ καὶ $\alpha:\mu>\beta:\mu$.

Ὑπόθ.	$\alpha>\beta,\ \mu>0$
Συμπ.	$\alpha\cdot\mu>\beta\cdot\mu$ $\frac{\alpha}{\mu}>\frac{\beta}{\mu}$

Ἀπόδειξις : Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha>\beta$· ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀνισοτήτων, θὰ εἶναι $\alpha-\beta>0$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $(\alpha-\beta)$ ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν μ, τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\mu$ θὰ εἶναι προφανῶς θετικόν· δηλ. θὰ εἶναι : $(\alpha-\beta)\mu>0$ ἢ $\alpha\mu-\beta\mu>0$.

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\alpha\mu-\beta\mu$ εἶναι θετική, θὰ εἶναι

$$\alpha\mu>\beta\mu.$$

Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν *διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ μ·* διότι ἡ διαίρεσις διὰ μ ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\mu}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν...***

Ὥστε :

> **Ἐὰν εἶναι $\alpha>\beta$ καὶ $\mu>0$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\mu>\beta\mu$ καὶ $\frac{\alpha}{\mu}>\frac{\beta}{\mu}$**

Π. χ. Ἔστω ἡ ἀνισότης $18>12$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ 2, θὰ ἔχωμεν

$$18\cdot2>12\cdot2 \quad ἢ \quad 36>24.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ 2, θὰ ἔχωμεν $9>6$,

112. Θεώρημα IV. ***'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ ἕνα ἀρνητικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει στροφήν.***

'Υπόθ.	$\alpha > \beta$, $\mu < 0$
Συμπ	$\alpha \cdot \mu < \beta \cdot \mu$ $\frac{\alpha}{\mu} < \frac{\beta}{\mu}$

'Υπόθεσις : "Εστω ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$.

Συμπέρασμα : 'Εὰν $\mu < 0$ θὰ δείξωμεν, ὅτι $\alpha\mu < \beta\mu$ καὶ $\alpha : \mu < \beta : \mu$.

'Απόδειξις : 'Εξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha > \beta$· ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀνισοτήτων θὰ εἶναι $\alpha - \beta > 0$ (1). 'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $(\alpha - \beta)$ ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν μ, τὸ γινόμενον $(\alpha - \beta)\mu$ θὰ εἶναι ἀρνητικόν· δηλ θὰ εἶναι $(\alpha - \beta)\mu < 0$ ἢ $\alpha\mu - \beta\mu < 0$.

'Επειδὴ ἡ διαφορὰ $\alpha\mu - \beta\mu$ εἶναι ἀρνητική, ὁ ἀριθμὸς $\alpha\mu$ εἶναι μικρότερος τοῦ $\beta\mu$· δηλ. θὰ εἶναι $\alpha\mu < \beta\mu$.

Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ μ· διότι ἡ διαίρεσις διὰ μ ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\mu}$.

'Εδείχθη λοιπὸν ὅτι : ***'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν...***

"Ωστε :

'Εὰν εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\mu < 0$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\mu < \beta\mu$, $\frac{\alpha}{\mu} < \frac{\beta}{\mu}$

Π. χ. "Εστω ἡ ἀνισότης $30 > 24$.

'Εὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ -2, θὰ λάβωμεν τὴν ἀνισότητα

$$30 \cdot (-2) < 24 \cdot (-2) \quad \text{ἢ} \quad -60 < -48.$$

'Εὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ -2, θὰ λάβωμεν

$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2} \quad \text{ἢ} \quad -15 < -12.$$

113. Πόρισμα. ***'Εὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἀνισότητος, πρέπει ἐπίσης νὰ ἀλλάξωμεν καὶ τὴν στροφήν της.***

Διότι πολλαπλασιάζονται καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1.

Π. χ. 'Απὸ τὴν ἀνισότητα $7 > -5$ λαμβάνομεν $-7 < 5$.

'Ασκήσεις : *89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.*

Ἀσκήσεις

Δυνάμεις πραγματικῶν ἀριθμῶν :

60. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις :

1. $(-12)^2$ 2. $(+10)^3$ 3. $(-2)^5$
4. $-(-3)^3$ 5. $+(-5)^2$ 6. $-(-1)^6$
7. $(-0{,}5)^4$ 8. $(+3{,}2)^2$ 9. $(0{,}001)^6$.

61. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $x=\alpha^\nu$,

1. ἐὰν $\alpha=-12$, $\nu=3$ 3. ἐὰν $\alpha=-2{,}5$ $\nu=3$
2. ἐὰν $\alpha=-7$, $\nu=2$ 4. ἐὰν $\alpha=0{,}003$ $\nu=4$.

62. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $(-2)^3-(+3)^3$ 4. $(-1)^5-(-2)^4-(-3)^3$
2. $(-5)^1+(-2)^4$ 5. $(+1)^3+(-3)^2-(-5)^2$
3. $(+10)^2-(-100)^3$ 6. $(0{,}5)^2-(1{,}2)^3-(+0{,}25)^4$.

63. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $2^3 \cdot 3^2$ 3. $(-5)^2 \cdot (-1)^5$ 5. $(-10)^3 \cdot (-1)^5$
2. $(-2)^2 \cdot (-3)^2$ 4. $(-6)^2 \cdot (+4)^3$ 6. $(+0{,}6)^2 \cdot (-1{,}3)^2$.

64. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $3^2-4(-2)^2(-1)$ 3. $2(-3)^2(-1)^4+5(-5)^2 \cdot 2^3-(-1)^2(-7)^2$
2. $3(-4)^2+(-5)(-1)^4-6(-2)^4$ 4. $6^2-3 \cdot 2^3(-3)^2+4^2(-3)^2-5(-6)^2(-1)^7$.

65. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $(-2)^2 \cdot (-2^3)$ 3. $(-5)^2 \cdot (-5)^3 \cdot (-5)$
2. $(-3)^4 \cdot (-3^2)$ 4. $(-1)^6 \cdot (-1)^7 \cdot (-1)^8$.

66. Μὲ τί ἰσοῦνται τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $\alpha^3 \cdot \alpha^2$ 4. $x^5 \cdot x^3$ 7. $y^2 \cdot y^3 \cdot y^4$
2. $\alpha \cdot \alpha^5$ 5. $x^4 \cdot x^2 \cdot x$ 8. $y^2 \cdot y^5 \cdot y^6$
3. $\alpha^2 \cdot \alpha^6$ 6. $x^2 \cdot x^3 \cdot x^3$ 9. $y^2 \cdot y \cdot y^3 \cdot y^4$.

67. Μὲ τί ἰσοῦνται αἱ κάτωθι δυνάμεις :

1. $(\alpha^2)^3$ 3. $(x^3)^2$ 5. $(y^{10})^2$
$(\alpha^3)^4$ 4. $(x^4)^5$ 6. $(y^7)^3$.

68. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $[(-3)^2]^3$ 3. $[(-2)^3]^2$ 5. $+[(-2)^4]^3$
2. $[(+1)^5]^2$ 4. $[(-0{,}03)^3]^2$ 6. $-[(-1)^3]^6$.

69. Να ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $(-5)^2+(-3)^2-[(-2)^2]^3$ 3. $(-2)^3 \cdot [(-3)^2]^2 \cdot (-10)^2$
2. $(-6)^3-(-2)^4+[(-1)^6]^2$ 4. $(-3)^2 \cdot [(-1)^4]^2 \cdot [(+2)^3]^2$.

70. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $(\alpha\beta\gamma)^4$ 3. $(-4\alpha x\omega)^2$ 5. $(-\alpha\beta\gamma)^\nu$
2. $(5xy\omega)^3$ 4. $(+5\beta\gamma\delta)^3$ 6. $(-5xy\omega)^\mu$.

71. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $[(-3) \cdot (+2) \cdot (-5)]^2$ 3. $[3 \cdot 5 \cdot (-4)]^2$
2. $[(+3) \cdot (-1) \cdot (-10)]^3$ 4. $[(-5)(+3)(-1)]^4$.

72. Τὸ γινόμενον $9 \cdot 8 \cdot 4^3 \cdot 27 \cdot 3^2$ νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενα δύο δυνάμεων.

73. Τὸ γινόμενον $9 \cdot 25 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 5^4$ νὰ μετασχηματισθῇ εἰς δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ.

74. Μὲ τί ἰσοῦνται τὰ κάτωθι πηλίκα ;

1. $\alpha^8 : \alpha^5$ 2. $\alpha^7 : \alpha^6$ 3. $x^8 \, . \, x^4$
4. $x^5 : x^4$ 5. $y^6 : y^4$ 6. $y^{10} : y^7$.

75. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα :

1. $7^8 : 7^5$ 3. $(-5)^4 : (-5)^2$ 5. $(-6)^6 : (-6)^4$
2. $9^{15} : 9^{13}$ 4. $(+10)^5 : (+10)^2$ 6. $(-0{,}03)^4 : (-0{,}03)^2$.

76. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-5)^2 + [(-3)^5 : (-3)^2]$ 3. $[(-3)^2]^3 - [(-5)^5 : (-5)^3] + (-1)^7$
2. $[(-2)^4 : (-2)^3] + (-3)^2 \cdot (+5)^2$ 4. $[(-2) \cdot (+3)]^2 - [(+2)^3]^2 + [(-10]^5 : (-10)^4]$.

77. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ 3. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ 4. $\left(\frac{-5}{+6}\right)^3$.

78. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις :

1. $(-5)^1$ 3. $(-7{,}24)^1$ 5. $(-35 \cdot 1)^1$
2. $(+18)^1$ 4. $(+0{,}05)^1$ 6. $(+0{,}75)^1$.

79. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $(-3)^2 + (+5)^2 - (+25)^1$ 3. $(-5)^2 + (-7)^1 - (+12)^1$
2. $(-2)^3 \cdot (-5)^2 \cdot (-8)^1$ 4. $(-12)^1 - (-6)^1 + (-3)^2$.

80. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

1. $(-8)^0$ 3. $(-7{,}25)^0$ 5. $-(-8)^0$
2. $(+7)^0$ 4. $(+0{,}004)^0$ 6. $-(+2{,}5)^0$.

81. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $(-9)^0 + (-8)^1 + (-25)^0$ 3. $(-5)^0 \cdot (+4)^1 \cdot (-25)^0 \cdot (-2)^0$
2. $(-7)^1 - (-6)^0 - (-2)^2$ 4. $(+3)^2 \cdot (-22)^0 \cdot (-7)^2 \cdot (-19)^0$.

82. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις :

1. 2^{-5} 3. -5^{-3} 5. $0{,}2^{-3}$ 7. $(0{,}04)^{-3}$
2. $(-3)^{-4}$ 4. $(+4)^{-2}$ 6. $(-0{,}6)^{-2}$ 8. $(-1{,}2)^{-2}$.

83. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $(-2)^{-3} + (-3)^{-2} - (-10)^{-2}$ 2. $(-3)^{-3} \cdot (-2)^2 \cdot (+8)^{-1}$.

84. Νὰ γραφοῦν ὡς δυνάμεις, χωρὶς παρονομαστάς, τὰ κλάσματα :

1. $\frac{3}{4}$, 2. $-\frac{3}{5}$, 3. $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

85. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων :

1. $\alpha^{-2} \cdot \alpha^0 \cdot \alpha^2$ 3. $[(-\alpha)^2]^{-3}$ 5. $(3\alpha\beta\gamma)^{-2}$
2. $\beta^{-3} \cdot \beta^1 \cdot \beta^9 \cdot \beta^4$ 4. $(\beta^\nu)^{-\mu}$ 6. $x^6 : x^{-7}$.

Ρίζαι ἑνὸς ἀριθμοῦ :

86. Να εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι ρίζαι :

1. $\pm\sqrt{100}$, 2. $+\sqrt{121}$, 3. $-\sqrt{49}$, 4. $\sqrt[3]{-64}$,
5. $-\sqrt[3]{1000}$, 6. $+\sqrt[3]{216}$, 7. $-\sqrt[4]{81}$, 8. $\sqrt{-100}$,
9. $+\sqrt[4]{625}$.

87. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις :

1. $\sqrt{25}-\sqrt{2}+\sqrt{16}-\sqrt{100}$, 3. $\sqrt[3]{64}-\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{8}$

2. $\sqrt{49}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt[3]{27}+\sqrt{64}$, 4. $\sqrt{36}-\sqrt{16}+\sqrt[3]{216}$.

88. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1. $\sqrt{(-3)(-8)\cdot 2+1}-\sqrt[3]{(+3)(-4)+(-6)(+9)+2}$

2. $$\frac{\left(\sqrt[3]{-27}+1\right)\left[(-5)-(+3)+\left(\frac{-2}{+3}\cdot\frac{-4}{-8}\right)\right]}{\sqrt{(-5)-(-21)}-\sqrt[3]{(-15)+(-7)\cdot\left(\frac{210}{-3}\right)+(-350)}}.$$

'Ἀνισότητες :

89. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν διπλῆν ἀνισότητα :

1. $-3{,}5<x<8{,}2$, 2. $-8\leqslant x\leqslant -3$,

3. $-5<x<0$, 4. $-7{,}5<x<1$.

90. (91) *. Ἐὰν εἶναι $\alpha>\beta$ καὶ $\delta<\gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\alpha-\delta>\beta-\gamma$.

91. (92). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ὅλα τὰ μέλη πολλῶν ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων εἶναι θετικά, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας αὐτὰς καὶ νὰ λάβωμεν ὁμοιόστροφον ἀνισότητα.

92. (93). Ἐὰν εἶναι $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma<\delta$ καὶ οἱ α, β, γ, δ εἶναι θετικοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\delta}$.

93. (94). Ἐὰν εἶναι $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$, ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ καὶ ὁ ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, δηλ. φυσικὸς ἀριθμός.

94. (95). Ἐὰν τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης γίνεται ἑτερόστροφος.

95. (96). Ἐὰν εἶναι $\alpha>1$, θὰ εἶναι $\alpha^{\nu}<1$, ἄν $\nu<0$ καὶ ἀκέραιος.

96. (97). Ἐὰν εἶναι $0<\alpha<1$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{\mu}>1$ ἄν $\mu<0$ καὶ ἀκέραιος.

97. (98). Ἐὰν $\alpha>1$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^{-3}<\alpha^{-2}<\alpha^{-1}<\alpha^{0}<\alpha<\alpha^{2}$.

98. (99). Ἂν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος, θὰ εἶναι $\alpha^{-3}>\alpha^{-2}>\alpha^{-1}>\alpha^{0}>\alpha>\alpha^{2}\ldots$

99. Νὰ δειχθῇ διὰ παραδειγμάτων ἀριθμητικῶν, ὅτι : 1ον. ἐὰν τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται ἢ ἀντιστρέφεται, καθόσον ὁ ἐκθέτης εἶναι περιττὸς ἢ ἄρτιος, 2ον. ἐὰν τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶναι ἀριθμοὶ ἑτερόσημοι καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην περιττόν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται. Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ προεικάσωμεν τί ἀνισότης θὰ προκύψῃ, ἐὰν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος.

---

* Ὁ δεύτερος ἀριθμός, ὁ εὑρισκόμενος ἐντὸς παρενθέσεως, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν αὔξοντα ἀριθμὸν τῶν λύσεων τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων Ἀλγέβρας ὑπὸ Π. Γ. Τόγκα.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοί

114. Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις *Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ἕνα σύνολον ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων ἢ μόνον γραμμάτων, τὰ ὁποῖα συνδέονται μὲ τὰ σημεῖα τῶν πράξεων.*

Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$6\alpha^2\beta,\quad 2(\alpha+\beta),\quad \frac{\alpha+\beta}{2\gamma},\quad \frac{3}{4}x^2y\omega,\quad \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{3x}$$

εἶναι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

115. Ρηταὶ καὶ ἄρρητοι παραστάσεις. *Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ρητή, ὅταν κανένα γράμμα της δὲν εὑρίσκεται ὑπὸ ριζικόν· ἄλλως λέγεται ἄρρητος.*

Π. χ. αἱ παραστάσεις $3\alpha^2+\beta$, $\alpha^2\beta\sqrt{3}$, $\frac{4x^2y}{\omega}$ εἶναι ρηταί.

Αἱ παραστάσεις $\alpha\sqrt{\beta}$, $\alpha^2\beta\sqrt{3\gamma}$, εἶναι ἄρρητοι παραστάσεις.

Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ρητὴ ὡς πρὸς ἕνα γράμμα, ὅταν τὸ γράμμα αὐτὸ δὲν κεῖται ὑπὸ τὸ ριζικόν.

Π. χ. ἡ παράστασις $\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma}+\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4\beta}$ εἶναι ρητὴ ὡς πρὸς τὸ γράμμα α.

116. Ἀκέραιαι καὶ κλασματικαὶ παραστάσεις. *Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ἀκεραία, ὅταν δὲν περιέχῃ διαίρεσιν διὰ γράμματος· ἄλλως λέγεται κλασματική.*

Π. χ. αἱ παραστάσεις $4\alpha^2+\frac{\beta}{5}$, $\frac{4}{3}\pi R^3$, $\frac{8\alpha^2\beta}{15}$ εἶναι ἀκέραιαι.

Αἱ παραστάσεις $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}$ εἶναι κλασματικαί.

Μία παράστασις λέγεται ἀκεραία ὡς πρὸς ἕνα γράμμα, ὅταν τὸ γράμμα αὐτὸ δὲν εἶναι παρονομαστής.

Π. χ. ἡ παράστασις $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}+\frac{4\alpha^2x}{\beta}$ εἶναι ἀκεραία ὡς πρὸς τὸ γράμμα α.

117. 'Αριθμητικὴ τιμὴ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εὑρίσκεται, ὅπως καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑνὸς τύπου (§ 8).

Π. χ. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $4\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2$ διὰ $\alpha=3$ καὶ $\beta=2$ εἶναι

$$\begin{aligned}4\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2 &= 4\cdot 3^2-5\cdot 3\cdot 2+3\cdot 2^2\\ &= 4\cdot 9-5\cdot 3\cdot 2+3\cdot 4\\ &= 36-30+12=18.\end{aligned}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$(5x^2-3xy)(x^3+y^2) \quad \text{διὰ} \quad x=-2, \quad y=4$$

εἶναι

$$\begin{aligned}(5x^2-3xy)(x^3+y^2) &= [5\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)\cdot 4]\cdot[(-2)^3+4^2]\\ &= [5\cdot 4-3\cdot(-2)\cdot 4]\cdot[(-8)+16]\\ &= (20+24)\cdot(+8)\\ &= 44\cdot 8=352.\end{aligned}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$x=3\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\frac{4\alpha(2\beta-\alpha)}{2} \quad \text{διὰ} \quad \alpha=5, \quad \beta=3$$

εἶναι

$$\begin{aligned}x &= 3\cdot\sqrt{5^2-3^2}+\frac{4\cdot 5\cdot(2\cdot 3-5)}{2}\\ &= 3\cdot\sqrt{16}+\frac{4\cdot 5\cdot 1}{2}\\ &= 3\cdot 4+10=12+10=22.\end{aligned}$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ τιμὰς πραγματικὰς τῶν γραμμάτων μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἡ ἀριθμητική της τιμὴ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.

118. 'Ισοδύναμοι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις. *Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ἰσοδύναμοι, ὅταν λαμβάνουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των.*

Π. χ. αἱ παραστάσεις $\alpha(\beta+\gamma)$ καὶ $\alpha\beta+\alpha\gamma$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι· ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς πρώτης παραστάσεως διὰ

$$\alpha=2, \quad \beta=3, \quad \gamma=5 \quad \text{εἶναι} \quad 2(3+5)=2\cdot 8=16.$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς δευτέρας παραστάσεως διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων α, β, γ, δηλ. διὰ

$$\alpha=2, \quad \beta=3, \quad \gamma=5 \quad \text{εἶναι} \quad 2\cdot 3+2\cdot 5=6+10=16.$$

Ἀσκήσεις : 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106.

2. Μονώνυμα

119. Ὁρισμός. *Μονώνυμον λέγεται ἡ παράστασις, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν σημειώνεται οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις.*

Π. χ. αἱ παραστάσεις $-6\alpha^2\beta$, $\frac{4}{3}\alpha\beta\sqrt{x}$, $\frac{3\alpha^2\beta}{\gamma\delta}$ εἶναι μονώνυμα.

Ἕνα μονώνυμον δύναται νὰ εἶναι ρητὸν ἢ ἄρρητον, ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ὡς πρὸς ἕνα γράμμα, ἢ πρὸς περισσότερα γράμματα ἢ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων του.

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἕνα μονώνυμον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα γινόμενον παραγόντων.

Π. χ. $10\alpha^2\beta^3\gamma = 10 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^3 \cdot \gamma$, $-\frac{5x^2y}{\omega^2} = -5 \cdot x^2 \cdot y \cdot \frac{1}{\omega^2}$.

Εἰς κάθε μονώνυμον διακρίνομεν τὸ ἀριθμητικὸν μέρος του, δηλ. τὸν ἀριθμητικὸν παράγοντα καὶ τὸ ἐγγράμματον μέρος του.

Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων ἑνὸς μονωνύμου λέγεται συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου.

Π. χ. τὸ μονώνυμον $-15\alpha^2\beta$ ἔχει συντελεστὴν τὸ -15 καὶ ἐγγράμματον μέρος τὸ $\alpha^2\beta$.

Ἐπίσης τὰ μονώνυμα

$$-\frac{5}{9}xy, \quad 3\alpha\sqrt{\beta}, \quad -4x^2y\omega, \quad -7\beta^2\gamma^3\delta$$

ἔχουν ὡς συντελεστὰς ἀντιστοίχως τοὺς

$$-\frac{5}{9}, \quad 3, \quad -4, \quad -7.$$

Ὅταν ἕνα μονώνυμον δὲν ἔχῃ κανένα ἀριθμητικὸν παράγοντα, λαμβάνομεν ὡς συντελεστήν του τὸν $+1$ ἢ -1, καθόσον ἔμπροσθέν του ὑπάρχει τὸ σημεῖον $+$ ἢ τὸ $-$.

Π. χ. τὸ μονώνυμον $\alpha^3\beta^2$ ἔχει συντελεστὴν τὸ 1.
τὸ μονώνυμον $-\beta^2\gamma\delta$ ἔχει συντελεστὴν τὸ -1.

120. Παρατηρήσεις. I. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις ἕνα ἀπὸ τὰ γράμματα ἑνὸς μονωνύμου θεωρεῖται ὡς ἄγνωστος καὶ τὰ ὑπόλοιπα γράμματά του ὡς γνωστοὶ ἀριθμοί. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὡς συντελεστὴν τοῦ μονωνύμου λαμβάνομεν ὅλον τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου, ἐκτὸς τοῦ ἀγνώστου.

Π. χ. Ἐὰν εἰς τὸ μονώνυμον $5\alpha\beta x$ θεωρήσωμεν ὡς ἄγνωστον τὸ γράμμα x, ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου αὐτοῦ εἶναι ὁ $5\alpha\beta$.

II. *Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν τὸν συντελεστὴν μὲ τὸν ἐκθέτην.*

Πράγματι: $4\alpha = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha$
$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$.

121. Ὅμοια μονώνυμα. *Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ὅ μ ο ι α, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐγγράμματον μέρος καὶ διαφέρουν* (ἂν διαφέρουν) *μόνον κατὰ τοὺς συντελεστάς των.*

Π. χ. Τὰ μονώνυμα $5\alpha^2\beta$, $-8\alpha^2\beta$, $\frac{4}{5}\alpha^2\beta$ εἶναι ὅμοια· ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐγγράμματον μέρος $\alpha^2\beta$.

Ὁμοίως καὶ τὰ μονώνυμα $2\alpha x$, $-3\beta x$, $7x$, εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς τὸ γράμμα x.

122. Ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων:

$$5\alpha^2\beta,\quad -2\alpha^2\beta,\quad 6\alpha^2\beta.$$

Τὸ ἄθροισμά των σημειώνεται ὡς ἑξῆς:

$$(+5\alpha^2\beta)+(-2\alpha^2\beta)+(+6\alpha^2\beta)$$

ἢ ἁπλούστερον (§ 38) $5\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+6\alpha^2\beta$.

Τὸ ἄθροισμα αὐτὸ περιλαμβάνει $(5-2+6)=9$ φορὰς τὴν κοινὴν τιμὴν $\alpha^2\beta$, δηλ. εἶναι ἴσον μὲ $9\alpha^2\beta$. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$5\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+6\alpha^2\beta=9\alpha^2\beta.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι: *Τὸ ἄ θ ρ ο ι σ μ α ὁ μ ο ί ω ν μ ο ν ω ν ύ μ ω ν εἶναι ἕνα μονώνυμον, ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν των.*

Π. χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων

$$-7\alpha\beta^2x,\quad +10\alpha\beta^2x,\quad -12\alpha\beta^2x$$

εἶναι $-7\alpha\beta^2x+10\alpha\beta^2x-12\alpha\beta^2x=(-7+10-12)\alpha\beta^2x=-9\alpha\beta^2x$.

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $3\alpha x$, $4\beta x$, $-5\gamma x$, ὁμοίων ὡς πρὸς τὸ γράμμα x, εἶναι

$$3\alpha x+4\beta x-5\gamma x=(3\alpha+4\beta-5\gamma)x.$$

123. Βαθμὸς ἑνὸς μονωνύμου. *Ὁ ἐκθέτης ἑνὸς γράμματος ἑνὸς μονωνύμου ὁρίζει τὸν β α θ μ ὸ ν τ ο ῦ μ ο ν ω ν ύ μ ο υ ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτό.*

Π. χ. Τὸ μονώνυμον $4\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι δ ε υ τ έ ρ ο υ β α θ μ ο ῦ πρὸς τὸ γράμμα α, τ ρ ί τ ο υ β α θ μ ο ῦ πρὸς τὸ γράμμα β, καὶ π ρ ώ τ ο υ β α θ μ ο ῦ πρὸς τὸ γράμμα γ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν δύο ἢ περισσοτέρων γραμμάτων ἑνὸς μονωνύμου ὁρίζει τὸν β α θ μ ὸ ν τ ο ῦ μ ο ν ω ν ύ μ ο υ ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά.

Π. χ. Τό μονώνυμον $5\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶναι π έ μ π τ ο υ β α θ μ ο ῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β, ἕ κ τ ο υ β α θ μ ο ῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ, καὶ τ ρ ί τ ο υ β α θ μ ο ῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ γ.

Σημ. Ὅταν ἕνα γράμμα δὲν ὑπάρχῃ εἰς ἕνα μονώνυμον, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος αὐτοῦ εἰς τὸ μονώνυμον εἶναι μ η δ ὲ ν

ἢ ὅτι τὸ μονώνυμον εἶναι β α θ μ ο ῦ μ η δ ὲ ν ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτό. Π. χ. Τὸ μονώνυμον $5\alpha^2\beta$ εἶναι βαθμοῦ μηδὲν ἢ μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ γράμμα γ ἢ ὡς πρὸς τὸ x, διότι $5\alpha^2\beta\gamma^0x^0=5\alpha^2\beta$.

Ἀσκήσεις : *107, 108, 109, 110, 111.*

3. Πολυώνυμα

124. Ὁρισμός. *Π ο λ υ ώ ν υ μ ο ν λέγεται μία ἀλγεβρικὴ παράστασις, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ μονώνυμα, τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των μὲ τὰ σημεῖα τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.*

Π. χ. ἡ παράστασις $2\alpha-3\alpha^2\beta+5\beta\delta$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον.

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἀκόμη, ὅτι :

Π ο λ υ ώ ν υ μ ο ν εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μονωνύμων.

Καθένα ἀπὸ τὰ μονώνυμα, ποὺ ἀποτελοῦν ἕνα πολυώνυμον, λαμβανόμενον μὲ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἔμπροσθέν του, λέγεται ὅ ρ ο ς τ ο ῦ π ο λ υ ω ν ύ μ ο υ.

Π. χ. Οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου $4\alpha^3+5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+8\beta^3$ εἶναι οἱ $+4\alpha^3$, $+5\alpha^2\beta$, $-3\alpha\beta^2$, $+8\beta^3$.

Ἐὰν ἕνα πολυώνυμον ἔχῃ δ ύ ο ὅ ρ ο υ ς, λέγεται δ ι ώ ν υ μ ο ν.

Ἐὰν ἔχῃ τ ρ ε ῖ ς ὅ ρ ο υ ς λέγεται τ ρ ι ώ ν υ μ ο ν.

Π. χ. ἡ παράστασις $\alpha x+\beta$ εἶναι ἕνα διώνυμον
ἡ παράστασις $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι ἕνα τριώνυμον.

Ἕνα πολυώνυμον λέγεται ἀ κ έ ρ α ι ο ν πολυώνυμον, ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραιοι.

Ἐπειδὴ ἕνα πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων, δηλ. πραγματικῶν ἀριθμῶν (§ 117), θὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα αἱ ἰδιότητες τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων (§ 46). Οὕτω δυνάμεθα :

Νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ὅρων του ἢ νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους ὅρους μὲ τὸ ἄθροισμά των.

125. Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων. Ὅταν εἰς ἕνα πολυώνυμον ὑπάρχουν πολλὰ ὅμοια μονώνυμα, τὰ ἀντικαθιστῶμεν μὲ τὸ ἄθροισμά των, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ ὑπολογίζωμεν (§ 122).

Π. χ. Ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$4\alpha^2\beta-5\beta\gamma+3\alpha^2\beta+8\alpha\beta^2-5\alpha^2\beta+12\beta\gamma.$$

Εἰς τὸ πολυώνυμον αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ὁμοίους ὅρους $4\alpha^2\beta$, $+3\alpha^2\beta$, $-5\alpha^2\beta$ μὲ τὸ ἄθροισμά των

$$(4\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta-5\alpha^2\beta)=2\alpha^2\beta$$

καὶ τοὺς ὁμοίους ὅρους $-5\beta\gamma$ καὶ $+12\beta\gamma$ μὲ τὸ ἄθροισμά των

$$(-5\beta\gamma+12\beta\gamma)=+7\beta\gamma.$$

Μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν αὐτὴν τὸ δοθὲν πολυώνυμον γίνεται

$$2\alpha^2\beta+7\beta\gamma+8\alpha\beta^2.$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$4\alpha^2\beta - 5\beta\gamma + 3\alpha^2\beta + 8\alpha\beta^2 - 5\alpha^2\beta + 12\beta\gamma = 2\alpha^2\beta + 7\beta\gamma + 8\alpha\beta^2.$$

Ἡ ἀντικατάστασις πολλῶν ὁμοίων ὅρων δι' ἑνὸς λέγεται ἀ ν α γ ω γ ὴ τ ῶ ν ὁ μ ο ί ω ν ὅ ρ ω ν, τὸ δὲ προκῦπτον πολυώνυμον ἀ ν η γ μ έ ν ο ν τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου.

126. Βαθμὸς ἑνὸς πολυωνύμου. *Ὁ β α θ μ ὸ ς ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς ἕ ν α γ ρ ά μ μ α τ ο υ, ὁρίζεται ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ γράμματος αὐτοῦ εἰς τὸ πολυώνυμον.*

Π. χ. Τὸ πολυώνυμον $8\alpha^2x^4 + 5\alpha\beta^3x^3 - 6\alpha\beta x$ εἶναι τ ε τ ά ρ τ ο υ β α θ μ ο ῦ ὡς πρὸς x, τ ρ ί τ ο υ β α θ μ ο ῦ ὡς πρὸς β καὶ δ ε υ τ έ ρ ο υ β α θ μ ο ῦ ὡς πρὸς α.

Ὁ β α θ μ ὸ ς ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς π ε ρ ι σ σ ό τ ε ρ α γράμματα ὁρίζεται ἀπὸ τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων αὐτῶν εἰς τὸν αὐτὸν ὅρον, δηλ. ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον $5xy^2 - 6x^2y^4 + 2x^5y^2$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν x καὶ y εἶναι 3 εἰς τὸν πρῶτον ὅρον, 6 εἰς τὸν δεύτερον ὅρον καὶ 7 εἰς τὸν τρίτον ὅρον· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι ἑ β δ ό μ ο υ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Σημ. Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὸν βαθμὸν ἑνὸς πολυωνύμου, πρέπει προηγουμένως νὰ κάμνωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων του, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Π. χ. Τὸ πολυώνυμον $3\alpha^5 - 12\alpha^3 + 2\alpha^5 + 4\alpha^2 - 5\alpha^5$ δὲν εἶναι τοῦ 5ου βαθμοῦ, ἀλλὰ τοῦ 3ου βαθμοῦ. Πράγματι· ἐὰν κάμωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων του, λαμβάνομεν τὸ πολυώνυμον $-12\alpha^3 + 4\alpha^2$.

127. Διατεταγμένα πολυώνυμα. Λέγομεν, ὅτι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν ο ν κ α τ ὰ τ ὰ ς ἀ ν ι ο ύ σ α ς (ἢ κ α τ ὰ τ ὰ ς κ α τ ι ο ύ σ α ς) δ υ ν ά μ ε ι ς ἑ ν ὸ ς γ ρ ά μ μ α τ ο ς, ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι γραμμένοι κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος αὐτοῦ νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι (ἢ ἐλαττούμενοι) ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου πρὸς τὸν τελευταῖον.

Π. χ. Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $5\alpha x^4 - 6\alpha^2x + 3\alpha\beta + 2x^5$ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x γράφεται

$$2x^5 + 5\alpha x^4 - 6\alpha^2x + 3\alpha\beta$$

καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x γράφεται

$$3\alpha\beta - 6\alpha^2x + 5\alpha x^4 + 2x^5.$$

Ὁ ὅρος $3\alpha\beta$, ὁ ὁποῖος δὲν περιέχει τὸ γ ρ ά μ μ α τ ῆ ς δ ι α τ ά ξ ε ω ς x λέγεται ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς ὅ ρ ο ς ἢ β α θ μ ο ῦ μ η δ ὲ ν πρὸς τὸ γράμμα x ἢ καὶ σ τ α θ ε ρ ὸ ς ὅ ρ ο ς.

128. Ὁμογενῆ πολυώνυμα. *Ἕνα πολυώνυμον λέγεται ὁ μ ο γ ε ν ὲ ς πρὸς ἕνα γράμμα ἢ πρὸς περισσότερα γράμματα, ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, εἴτε πρὸς τὸ ἐξεταζόμενον γράμμα, εἴτε πρὸς τὰ δοθέντα γράμματα.*

Π. χ. Τὸ πολυώνυμον $3αx^4 - 7αβx^4 + 9x^4$ εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον τοῦ τ ε τ ά ρ τ ο υ β α θ μ ο ῦ πρὸς x.

Τὸ πολυώνυμον $3α^6 + 4α^4β - 7α^3β^3 - α^2β^3$ εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον τοῦ π έ μ π τ ο υ β α θ μ ο ῦ πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β.

Ὁ βαθμὸς ἑνὸς ὁμογενοῦς πολυωνύμου λέγεται β α θ μ ὸ ς ὁ μ ο γ ε ν ε ί α ς.

Ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον, ὅπως τὸ

$$5α^5 - 4α^4β - 3α^3β^2 + 9α^2β^3 + αβ^4 - β^5$$

εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος β.

129. Πλήρη πολυώνυμα. *Ἕνα πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον εἶναι διατεταγμένον ὡς πρὸς ἕνα γράμμα, λέγεται π λ ῆ ρ ε ς, ὅταν περιέχῃ ὅρους ὅλων τῶν βαθμῶν, ὡς πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως.*

Π. χ. Τὸ πολυώνυμον $5αx^3 + 3βx^2 - x + 8$, τὸ ὁποῖον εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x, εἶναι πλῆρες· ὁ τελευταῖος ὅρος του 8 λέγεται σ τ α θ ε ρ ὸ ς ὅ ρ ο ς καὶ εἶναι βαθμοῦ μηδὲν ὡς πρὸς τὸ γράμμα x (§ 123).

Τὸ πολυώνυμον $8x^5 - 7αx^2 + 6x - 2$ εἶναι ἐ λ λ ι π ὲ ς πολυώνυμον πρὸς τὸ γράμμα x, διότι λείπουν οἱ ὅροι τοῦ 4ου καὶ 3ου βαθμοῦ.

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ συμπληρώσωμεν ἕνα ἐλλιπὲς πολυώνυμον, ἐὰν εἰσαγάγωμεν εἰς αὐτὸ τοὺς ὅρους, ποὺ λείπουν, μὲ συντελεστὴν μηδέν.

Π. χ. Τὸ προηγούμενον πολυώνυμον δύναται νὰ γραφῇ :

$$8x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 7αx^2 + 6x - 2.$$

Ἀσκήσεις : 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120.

Ἀσκήσεις

100. Γράψατε : 1. τρεῖς ῥητὰς παραστάσεις. 2. τρεῖς ἀρρήτους παραστάσεις. 3. τρεῖς ἀκεραίας παραστάσεις. 4. τρεῖς κλασματικὰς παραστάσεις. 5. τρεῖς ἀκεραίας καὶ ἀρρήτους παραστάσεις.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

101. (113). 1. $α^2β^3 - 4α^2γ + 4α^3β$, ἐὰν $α = 2$, $β = 4$, $γ = -5$
2. $α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$, ἐὰν $α = 10$, $β = -1$
3. $α^2 + β^2 + γ^2 - 2αβ + 2αγ - 2βγ$ ἐὰν $α = 5$, $β = 3$, $γ = 3$.

102. (114). 1. $(α+β)^2 - (α-β)^2 - αβ$, ἐὰν $α = 5$, $β = -4$
2. $(α+β)^3 - (α-β)^3 + α^3 - β^3$, ἐὰν $α = 6$, $β = -3$
3. $x(y+ω)^2 + y(ω+x)^2 + ω(x+y)^2$, ἐὰν $x = 3$, $y = -2$, $ω = 1$.

103. (115). $\frac{5\alpha^2\beta}{2} - \frac{8\alpha\beta^2}{9} + \frac{\alpha^2\beta^2}{2}$, ἐὰν $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$.

104. (116). 1. $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ἐὰν $\alpha=35$, $\beta=28$, $\gamma=21$, $\tau=42$

2. $\frac{1}{3}\upsilon(B+\beta+\sqrt{\beta B})$, ἐὰν $\upsilon=5$, $\beta=49$, $B=144$

3. $\frac{1}{3}\pi(A^2+\alpha^2+A\alpha)\upsilon$, ἐὰν $\alpha=3{,}2$, $A=5$, $\upsilon=6$, $\pi=3{,}14$.

105. (117). 1. $\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{2}{(\alpha+\beta)^3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$, ἐὰν $\alpha=-2$, $\beta=5$

2. $\frac{\alpha(\beta-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta(\gamma-\alpha)^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma(\alpha-\beta)^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$, ἐὰν $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=-1$.

106. (118). 1. $\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}$, ἐὰν $x=-4$.

2. $\dfrac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x(x-1)}{x+1}}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}$.

Μονώνυμα:

107. (101). Γράψατε: 1ον. τρία ἀκέραια μονώνυμα· 2ον. τρία κλασματικὰ μονώνυμα.

108. (102). 1ον. Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν κάτωθι μονωνύμων:

$5\alpha^3x$, $\quad -\frac{2x^3y}{5}$, $\quad -3\alpha^2\beta^2x$, $\quad \frac{4\alpha^4\beta x^3}{5}$, $\quad \frac{3\alpha\beta y}{5}$.

2ον. Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων, ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὰ γράμματα **x** καὶ **y** ὡς ἀγνώστους.

109. (103). Τίνος βαθμοῦ εἶναι τὰ κάτωθι μονώνυμα ὡς πρὸς α· ὡς πρὸς β· ὡς πρὸς γ· ὡς πρὸς β καὶ γ· ὡς πρὸς α, β, γ.

1. $5\alpha^2\beta$, 2. $-4\alpha^3\beta^2\gamma^4$, 3. $\frac{4}{5}\beta\gamma^3$, 4. $\alpha^4\beta\gamma$.

110. (104). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων:

1. $-3x^2$, $\quad 5x^2$, $\quad +12x^2$, $\quad -20x^2$

2. $-3x^2y$, $\quad 5x^2y$, $\quad \frac{1}{4}x^2y$, $\quad -\frac{3}{4}x^2y$.

111. (105). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων, ὡς πρὸς τὸ γράμμα **x**.

1. $-5\alpha x$, $\quad 2\alpha^2x$, $\quad -\beta x$, $\quad +\gamma x$

2. $2\lambda x^2$, $\quad -\mu x^2$, $\quad -2\nu x^2$, $\quad -x^2$.

Πολυώνυμα:

112. (106). Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα:

1. $3\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+5\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2$ 3. $3x-5\beta x+5\beta-4\beta x-3\beta-x+\beta$
2. $5\alpha x-4\beta y-12\alpha x+9\beta y-\alpha x-\beta y$ 4. $9\alpha\beta\gamma^2-7\alpha^3\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+6\alpha^3\beta\gamma-5\alpha\beta\gamma^2$.

113. (107). Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

1. $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}x+3x-\frac{8}{3}x$ 2. $2\alpha-\frac{3}{4}\beta^2-\alpha+\frac{7}{8}\beta^2+4\beta^2$.

114. (108). Τίνος βαθμοῦ εἶναι τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

1. $3x^2-4x^3y+5xy^2+x^3y$ 3. $3xy^3-4x^3y^4+2x^3y+4x^2y^4+y^3-x^5$
2. $2y^5-4x^3y^3+11xy-8x^5$ 4. $2\alpha x^5-\beta x^5+\beta x^2-2\alpha x^5+\beta x+\beta x^5$.

115. (109). Γράψατε τρία πολυώνυμα ὁμογενῆ πρὸς τὰ γράμματα x καὶ y.

116. (110). Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x.

1. $9x+4x^2-10+2x-5x^3+1+8x^3$
2. $4y^4+6x^2y^2-7x^3-2x^2y^2-6y^4+4x^3y-9xy^3$
3. $2\alpha^4x+5\beta^2x^3-6\alpha^5-5\alpha^4x+\alpha^2x^3+2x^5-\alpha^3x-4\alpha x^4$.

117. (111). Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x.

1. $15x^4-4\alpha^4+3\alpha^3x-2\alpha^2x^2+11\alpha x^3-14\alpha^2x^2+5\alpha x^3$
2. $5x^3-4xy^2+7x^2y+8x^3+6xy^2+xy^2-y^3$.

118. (112). Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα : 1ον. κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α καὶ 2ον. κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ β.

1. $3\alpha^3-5\alpha\beta\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma-4\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-5\beta^3+6\alpha^2\beta$
2. $-10\alpha^2\beta^3-4\alpha^5+2\beta^5-18\beta^2\alpha^3+\beta^3\alpha^2-9\alpha^3\beta^2-\alpha^4\beta-3\alpha\beta^4+7\alpha^5$.

119. Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα: 1ον. κατὰ τὰς ἀνιούσας καὶ 2ον. κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x.

1. $5x^3-\frac{7}{2}+\frac{2}{5}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x^3-5+\frac{2}{5}x^3+6-7x$
2. $\frac{3x^2}{2}-\frac{5}{4}x+3x^3-6+\frac{x}{2}-\frac{3x^2}{4}-x^3$.

120. Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x τὸ πολυώνυμον

$$3x^6-\alpha^4+3\alpha x^5+3x^5-7\alpha^4x-6\alpha^4x^2-\alpha^4-2x^6-3\alpha x^5+5\alpha^4x^2+4\alpha^4x+2x^4.$$

Τοῦ ἀνηγμένου τούτου πολυωνύμου νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμή, ὅταν : 1ον. $x=\alpha$, 2ον. $x=-\alpha$, 3ον. $x=-1$ καὶ 4ον. $x=-2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

---

1. Πρόσθεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

130. Ἀλγεβρικὸς λογισμός. Ὅπως ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν διαφόρους πράξεις, πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμόν, διαίρεσιν κλπ., οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς αὐτὰς πράξεις.

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις περιέχουν γράμματα, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις αὐτάς, ὅπως εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, καὶ νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον. Δυνάμεθα ὅμως μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων, νὰ μετασχηματίσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον καὶ ἁπλουστέραν, δηλ. νὰ κάμωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν.

Τὸ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται ἀλγεβρικὸς λογισμός.

Οἱ κανόνες τῶν πράξεων, τοὺς ὁποίους ἐγνωρίσαμεν εἰς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς μένουν οἱ αὐτοὶ καὶ διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, διότι εἰς τὰς παραστάσεις τὰ γράμματα παριστάνουν ἀριθμούς.

131. Ἄθροισμα μονωνύμων. *Τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονωνύμων εἶναι ἕνα πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλα τὰ δοθέντα μονώνυμα μὲ τὰ σημεῖα των.*

Π.χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

$$A=3\alpha^2\beta, \quad B=-5\alpha\beta^2, \quad \Gamma=\frac{4}{5}\alpha\beta\gamma$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον

$$\Pi=A+B+\Gamma=3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\frac{4}{5}\alpha\beta\gamma.$$

Δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν εὐκόλως, ὅτι διὰ κάθε σύστημα τιμῶν, τὰς ὁποίας θὰ δώσωμεν εἰς τὰ γράμματα τῶν μονωνύμων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν ἑκάστου μονωνύμου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου.

Ὥστε : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονωνύμων, ἀρκεῖ*

νὰ γράψωμεν τὸ ἕνα μονώνυμον κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὰ σημεῖα των.

Εἶναι φανερόν, ὅτι πρέπει πάντοτε νὰ κάμνωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ πολυωνύμου, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Π. χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

$$-5x^2y, \quad -4xy^2, \quad +8x^2y$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον $\qquad -5x^2y-4xy^2+8x^2y.$

Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων του αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ

$$3x^2y-4xy^2.$$

132. Ἄθροισμα πολυωνύμων. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα

$$A=6\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2+2, \quad B=-9\alpha\beta+4\alpha^2-12, \quad \Gamma=\beta^2-7\alpha^2+4.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων αὐτῶν σημειώνεται :

$$A+B+\Gamma=(6\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2+2)+(-9\alpha\beta+4\alpha^2-12)+(\beta^2-7\alpha^2+4).$$

Κατὰ τὴν § 47 πρέπει νὰ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ πρώτου πολυωνύμου τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου πολυωνύμου μὲ τὰ σημεῖα των καὶ οὕτω καθεξῆς, ἢ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰδιότητα IV τῆς § 37. Θὰ ἔχωμεν

$$A+B+\Gamma=6\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2+2-9\alpha\beta+4\alpha^2-12+\beta^2-7\alpha^2+4.$$

Κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ εὑρίσκομεν τελικῶς, ὅτι : $\qquad A+B+\Gamma=3\alpha^2-13\alpha\beta+9\beta^2-6.$

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ κάθε σύστημα τιμῶν, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰ γράμματα τῶν πολυωνύμων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν δοθέντων πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ εὑρεθέντος πολυωνύμου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών : *Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰ πολυώνυμα σχηματίζομεν ἕνα πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς ὅρους τῶν πολυωνύμων μὲ τὰ σημεῖα των καὶ κάμνομεν ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.*

Παρατήρησις. Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν πολυωνύμων δυνάμεθα, διὰ νὰ γίνεται εὐκολώτερον ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων, νὰ *γράφωμεν τὸ ἕνα πολυώνυμον κάτωθι τοῦ ἄλλου* οὕτως, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι των νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

Π. χ. Διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα

$$A=3x^2+2y^2-5xy+8, \quad B=5y^2-12-7x^2 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma=x^2+xy-15$$

δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\begin{array}{rrrrr} A= & 3x^2 & -5xy & +2y^2 & +8 \\ B= & -7x^2 & & +5y^2 & -12 \\ \Gamma= & x^2 & +xy & & -15 \\ \hline A+B+\Gamma= & -3x^2 & -4xy & +7y^2 & -19 \end{array}$$

Ἀσκήσεις : *121, 122, 123, 124, 125.*

2. 'Αφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

133 'Ορισμός *'Αφαιρῶ μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν Β ἀπὸ μίαν ἄλλην παράστασιν Α, σημαίνει, ὅτι εὑρίσκω μίαν τρίτην ἀλγεβρικὴν παράστασιν Δ τοιαύτην, ὥστε* $Δ=Α-Β$.

134. Πῶς ἀφαιροῦμεν μονώνυμα; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ μονώνυμον $-7αβ^2$ ἀπὸ τὸ μονώνυμον $4α^2βγ$· δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $4α^2βγ-(-7αβ^2)$.

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 40 πρέπει εἰς τὸν μειωτέον $4α^2βγ$ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου· δηλ. θὰ εἶναι

$$4α^2βγ-(-7αβ^2)=4α^2βγ+7αβ^2.$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ κάθε σύστημα τιμῶν, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὰ γράμματα τῶν μονωνύμων, ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν μονωνύμων $4α^2βγ$ καὶ $-7αβ^2$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ διωνύμου $4α^2βγ+7αβ^2$.

'Ομοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$-8αx^2-(+5αx^2)=-8αx^2-5αx^2$$
$$=-13αx^2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών: *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα μονώνυμον Β ἀπὸ ἕνα ἄλλο Α, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸ μονώνυμον Β πλησίον τοῦ Α μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖον του.*

135 Πῶς ἀφαιροῦμεν πολυώνυμον ἀπὸ ἄλλο πολυώνυμον; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $Β=-5α+4β-γ$ ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $Α=7α-9β+4γ$, δηλαδὴ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν

$$Α-Β=(7α-9β+4γ)-(-5α+4β-γ).$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 50 πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον πολυώνυμον τὸ ἀντίθετον τοῦ δευτέρου· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$Α-Β=(7α-9β+4γ)-(-5α+4β-γ)$$
$$=(7α-9β+4γ)+(5α-4β+γ)$$
$$=7α-9β+4γ+5α-4β+γ$$
$$=12α-13β+5γ$$ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

Κανών: *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον Β ἀπὸ ἕνα ἄλλο πολυώνυμον Α, γράφομεν δεξιὰ τοῦ πολυωνύμου Α τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου Β μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα των καὶ κάμνομεν ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.*

136. Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν πολυωνύμων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ πολυώνυμον τοῦ ἀφαιρετέου κάτωθι τοῦ πολυωνύμου τοῦ μειωτέου, οὕτως ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

Π. χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$B=3x^4-8x^2-x+8$$

ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $A=5x^4+2x^3+6x^2-5x+1$.

Ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γράφομεν

$$\begin{array}{rl} A= & 5x^4+2x^3+\ 6x^2-5x+1 \\ -B= & -3x^4 \qquad\ +\ 8x^2+\ x-8 \\ \hline A-B= & 2x^4+2x^3+14x^2-4x-7 \end{array}$$

Γενικῶς : Ἔστω, ὅτι εἶναι

$$A=3\alpha^3+7\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$B=5\beta^3+6\alpha\beta^2+5\alpha^3$$
$$\Gamma=-7\alpha\beta^2+8\alpha^2\beta-\alpha^3-\beta^3$$

καί, ὅτι ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\Pi=A-B-\Gamma$.

Διὰ νὰ κάμωμεν τὸν ὑπολογισμὸν αὐτόν, πρέπει νὰ γράψωμεν τὰ δοθέντα πολυώνυμα, τὸ ἕνα κάτωθι τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων B καὶ Γ· ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὸ ἄθροισμα

$$\Pi=A+(-B)+(-\Gamma).$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$\begin{array}{rl} A= & 3\alpha^3+7\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\ \beta^3 \\ -B= & -5\alpha^3 \qquad\quad -6\alpha\beta^2-5\beta^3 \\ -\Gamma= & +\ \alpha^3-8\alpha^2\beta+7\alpha\beta^2+\ \beta^3 \\ \hline A-B-\Gamma= & -\ \alpha^3-\ \alpha^2\beta-4\alpha\beta^2-3\beta^3. \end{array}$$

Ἀσκήσεις : 132, 134, 136, 137.

137. Πῶς ἀπαλείφομεν παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας ; Εἰς τὴν Ἄλγεβραν συναντῶμεν συνήθως ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι περικλείονται ὑπὸ παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν ἢ καὶ ἑνωτικῶν γραμμῶν.

Αἱ παρενθέσεις κλπ. δύνανται νὰ παραλειφθοῦν διαδοχικῶς, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τοὺς κανόνας τῶν § 48 καὶ 51.

Συνιστῶμεν ὅμως, ὅπως ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν παρενθέσεων γίνεται κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν :

Νὰ ἀπαλείφωμεν πρῶτον τὴν παρένθεσιν ἢ ἀγκύλην, ποὺ συναντῶμεν πρῶτον, χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψει τὰς παρενθέσεις, ποὺ

περικλείει ἡ ἀγκύλη· ἔπειτα ἀπαλείφομεν πάλιν τὴν πρώτην παρένθεσιν ἢ ἀγκύλην καὶ οὕτω καθεξῆς, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον.

$$(2\alpha-\beta+3\gamma)-[3\alpha+(\alpha+\beta-7\gamma)]=2\alpha-\beta+3\gamma-3\alpha-(\alpha+\beta-7\gamma)=$$
$$=2\alpha-\beta+3\gamma-3\alpha-\alpha-\beta+7\gamma$$
$$=-2\alpha-2\beta+10\gamma.$$

Παράδειγμα 2ον.

$$-\{3x-[5y+(2x+y)-y]\}=7x-3x+[5y+(2x+y)-y]=$$
$$=7x-3x+5y+(2x+y)-y$$
$$=7x-3x+5y+2x+y-y$$
$$=6x+5y.$$

Παράδειγμα 3ον.

$$-(2x+3y-5\omega)-\{(x+y)+[5x-(2y-\omega)+y]-x+3y\}=$$
$$=-2x-3y+5\omega-(x+y)-[5x-(2y-\omega)+y]+x-3y$$
$$=-2x-3y+5\omega-x-y-5x+(2y-\omega)-y+x-3y$$
$$=-2x-3y+5\omega-x-y-5x+2y-\omega-y+x-3y$$
$$=-7x-6y+4\omega.$$

'Ασκήσεις : 138, 139, 143, 144, 145, 146, 147, 151, 152.

'Ασκήσεις

Πρόσθεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων :

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι πολυωνύμων : (119).

121. 1. $3\alpha+4\beta-\gamma-\delta$ καὶ $-5\alpha+3\beta+2\gamma+3\delta$

2. $2\beta+6\gamma-4\alpha$ καὶ $-3\alpha+\beta-5\gamma$.

122. 1. $4\alpha\beta-6\alpha\gamma+5\beta\gamma$ καὶ $\alpha\gamma-5\alpha\beta-3\beta\gamma$

2. $5\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-\beta^3$ καὶ $3\beta^3-5\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι πολυωνύμων : (120).

123. $3\alpha-4\beta$, $4\alpha-2\beta$, $7\alpha+8\beta$, $3\beta-6\alpha$

124. $4x^2-5y^2$, $2x^2+7y^2$, $-9x^2+6y^2$, x^2+y^2.

125. $x^3-2x^2y+4yx^2$, $-3x^2y-xy^2-y^3$, x^3+4y^3.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν κάτωθι πολυωνύμων : (121).

126. $\frac{3\alpha^2}{4}-\frac{2\alpha^2\beta}{3}$, $\frac{3\alpha^2}{5}+\alpha^2\beta$, $\frac{\alpha\beta^2}{2}-\frac{\alpha^2\beta}{4}$.

127. $-\frac{2}{5}x^2-4xy+y^2-\frac{1}{2}x+3y-1$, $3x^2-5xy+\frac{y^2}{3}-\frac{1}{4}$,

$\frac{2}{3}xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$.

128. (122). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα : 1ον. τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν. 2ον. τριῶν διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν. 3ον. τριῶν διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων (123).

129. $(4\alpha^2x-\alpha\beta+4\beta^2x^2)+(3\alpha\beta x^2+\beta^2x-3\alpha\beta)+(-7\alpha^2x+5\beta^2x^2-6\alpha\beta x^2)$

130. $(3x^{\mu}y-2x^{\mu-1}y^2+5x^{\mu-3}y^3-7x^{\mu-\nu})+(-x^{\mu-1}y^2-10x^{\mu-3}y^5)+$
$+(9x^{\mu}y-10x^{\mu-3}y^5+x^{\mu-1}y^2-2x^{\mu-\nu})$.

'Αφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων:

Νὰ ἀφαιρεθῇ: (125).

131. τὸ $-3\mu^2+2\nu^2+\mu\nu$ ἀπὸ τὸ $-4\mu^2+2\nu^2-3\mu\nu$

132 » $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ » » $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Νὰ ἀφαιρεθῇ τό: (126).

133. τὸ $\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2-3\alpha\beta^3+7\beta$ ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}\alpha^2\beta^2+3\alpha\beta^3+7\beta$

134. τὸ $\frac{2}{3}x^2y-\frac{1}{4}xy^2-\frac{5}{8}y^2$ » » $\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\frac{2}{3}y^2$.

135. Τί πρέπει νὰ προσθέσωμεν: (127).

1. εἰς τὸ $x^2+\beta x+\gamma$ διὰ νὰ λάβωμεν $3x^2+\beta x$
2. » » $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ » » » $-2\alpha\beta$.

136. Νὰ προστεθοῦν τὰ πολυώνυμα: (128).

$3x^2-5xy+4y^2$ καὶ $5x^2+6xy-7y^2$

καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των νὰ ἀφαιρεθῇ:

1ον. τὸ $3xy-y^2+x^2$ 2ον. τὸ $2y^2+3x^2+7xy$.

137. (129). 'Απὸ τὸ πολυώνυμον $\Pi=6\alpha^2-5\alpha\gamma-3\gamma^2+4\beta\gamma+3\beta^2-\alpha\beta$ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$A=3\beta^2-\alpha^2+4\gamma^2-3\beta\gamma+2\alpha\beta$ καὶ $B=3\alpha^2+2\beta^2-5\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta+\gamma^2$.

138 Νὰ ἀπαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων: (130).

1. $(\alpha-4+3\beta)+(5-3\alpha+\beta)$ 2. $x-(2y+5x)+(3x-y)+2y$

139. 1. $(\alpha^2+\beta^2-5\alpha\beta)-(\alpha^2-2\beta^2+6\alpha\beta)-(\beta^2+\alpha\beta)$
2. $2\tau-(\tau-\alpha)+2\tau-(\tau-\beta)+2\tau-(\tau-\gamma)$.

Νὰ ἀπαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι τῶν κάτωθι παραστάσεων καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων: (131).

140. $(\alpha+\beta-3\gamma)-[\alpha-(\beta+2\gamma)+2\beta]$

141. $4\alpha^2-[2\beta^2-(\alpha+\beta^2-\alpha^2)+(\alpha-2\beta)]$

142. $2\alpha\beta+\beta^2-[3\alpha\beta-(-\beta^2-6\alpha\beta)+\beta^2-\alpha^2]$

143. $2x-8y+\omega-(4x-y+3\omega)-[x+2y-\omega-(3x+5\omega)]$

144. $7\alpha-\{-3\beta-[2\alpha+(4\alpha-3\beta)]+(\alpha-5\beta)-2\alpha\}$

145. $\alpha-\{-3\beta+\alpha+[\beta-(\alpha+\gamma)-2\alpha]+[\alpha-(\beta+2\gamma)]\}$.

146. (132). Οἱ τρεῖς τελευταῖοι ὅροι τῶν κάτωθι παραστάσεων νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας νὰ ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον — (§ 51, II)

1. $2\alpha-3\beta+4\gamma-7\delta$ 3. $3x^3-x^2+2x+5$
2. $\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-\beta^3+4\alpha^3$ 4. $7\alpha^4-4\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3$.

147. (133). Νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχε τὸ σημεῖον —, οἱ δύο πρῶτοι ὅροι καὶ ἐντὸς παρενθέσεως, ἔμπροσθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ σημεῖον +, οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι τῶν κάτωθι παραστάσεων:

1. $-2\alpha x^2+\beta y^2-3\beta x^2+\gamma y$ 2. $2xy^2-y^3-\alpha x^2+\beta xy-5$
3. $-\alpha x^2y+\beta xy^2-x^2y^2-\alpha x^2+\beta y^2$.

148. (134). Ὁ Παῦλος ἔχει x δραχμάς, ὁ Πέτρος ἔχει $x+4$ δρχ. Ὁ πρῶτος κερδίζει $y+12$ δρχ. καὶ ὁ δεύτερος χάνει $\omega-20$ δρχ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν χρημάτων τοῦ Παύλου καὶ τοῦ Πέτρου; Ποία εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ διαφορά, ἐάν: $x=420$, $y=25$, $\omega=40$.

149. (135). Μία ἁμαξοστοιχία Α κινεῖται μὲ ταχύτητα α χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Μία ἄλλη ἁμαξοστοιχία Β κινεῖται μὲ ταχύτητα β χιλιομ. τὴν ὥραν. Ἡ Α αὐξάνει τὴν ταχύτητά της κατὰ γ χλμ. καὶ ἡ Β ἐλαττώνει τὴν ταχύτητά της κατὰ δ χλμ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ταχυτήτων τῶν Α καὶ Β: Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ διαφορά, ἐάν: $\alpha=70$, $\beta=60$, $\gamma=15$, $\delta=12$.

150. (136). Δίδονται τὰ πολυώνυμα:

$A=\alpha^2+2\beta^2+8\gamma^2$ $\quad\quad \Gamma=2\alpha^2-\beta^2+5\gamma^2$

$B=-\alpha^2-3\beta^2+\gamma^2$ $\quad\quad \Delta=5\beta^2-\gamma^2+3\alpha^2$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα:

1. $A-B+\Gamma-\Delta$ $\quad\quad$ 2. $A+(B-\Gamma-\Delta)$.

151. (137). Δίδονται τὰ πολυώνυμα:

$A=4x^3-2x^2+x-5$, $\quad B=2x^3+4x^2-3x+1$, $\quad \Gamma=-3x^3+x^2-7x-3$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα $A+B-\Gamma$, $A-B+\Gamma$, $-A+B+\Gamma$ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα:

1. $A+B+\Gamma$ $\quad\quad$ 3. $A-(B+\Gamma)$

2. $A+B-\Gamma$ $\quad\quad$ 4. $A-(-B-\Gamma)$.

Νὰ συγκριθῇ τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον πρὸς τὸ πρῶτον. Νὰ ἐξηγηθῇ.

152. (342). Δίδονται τὰ πολυώνυμα:

$A=2x^3-5x^2y+4xy^2+y^3$ $\quad\quad \Gamma=y^3-5xy^2+x^3+2x^2y$

$B=-x^3-xy^2+7x^2y+4y^3$ $\quad\quad \Delta=3x^3+x^2y-7xy^2+4y^3$.

1. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα $A+B-\Gamma$, $A-B+\Gamma$, $-A+B+\Gamma$ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma$.

2. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα:

$A+B-\Gamma-\Delta$, $\quad A-B+\Gamma-\Delta$, $\quad -A+B+\Gamma+\Delta$, $\quad -A-B-\Gamma+\Delta$

καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων αὐτῶν πολυωνύμων εἶναι μηδέν.

3. Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

138. Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀκέραια μονώνυμα; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μονώνυμα $5\alpha^3\beta^2\gamma$ καὶ $8\alpha^2\beta^3\gamma^3\delta$, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$5\alpha^3\beta^2\gamma\times8\alpha^2\beta^3\gamma^3\delta.$$

Ἐπειδὴ τὰ μονώνυμα παριστάνουν πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ εἶναι γινόμενα πολλῶν παραγόντων, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἰδιότητας τοῦ γινομένου πραγματικῶν ἀριθμῶν· ἐδῶ λοιπὸν ἔχομεν νὰ

πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα πολλῶν παραγόντων καὶ κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα (§ 64) ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$5\alpha^3\beta^2\gamma \times 8\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta = 5 \cdot \alpha^3 \cdot \beta^2 \cdot \gamma \cdot 8 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^3 \cdot \gamma^2 \cdot \delta \qquad (1)$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ γινομένου των. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γράφεται

$$5\alpha^3\beta^2\gamma \times 8\alpha^2\beta^3\gamma^2\delta = 5 \cdot 8 \cdot \alpha^3 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot \beta^3 \cdot \gamma \cdot \gamma^2 \cdot \delta$$
$$= 40 \cdot \alpha^5 \cdot \beta^5 \cdot \gamma^3 \cdot \delta$$
$$= 40\alpha^5\beta^5\gamma^3\delta.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$-2\alpha x^2 y \times \frac{4}{3}\alpha^2 x y^3 \times 5\alpha x y^2 = (-2) \cdot \frac{4}{3} \cdot 5 \cdot \alpha \cdot \alpha^2 \cdot \alpha \cdot x^2 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y^3 \cdot y^2$$
$$= -\frac{40}{3}\alpha^4 x^4 y^6.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών: *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα:*

1ον. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστάς των.

2ον. Γράφομεν δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτοῦ τῶν συντελεστῶν, ὅλα τὰ διάφορα γράμματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα καὶ μὲ ἐκθέτην, εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τὸ κοινὸν αὐτὸ γράμμα εἰς τοὺς διαφόρους παράγοντας.

Π. χ. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν

$$(4\alpha^3\beta^2\gamma) \cdot (-6\alpha^2\beta\gamma^3) \cdot (\alpha^4\beta^3) = -24\alpha^9\beta^6\gamma^4$$

καὶ γενικῶς

$$\mathbf{A}x^{\mu} y^{\nu} \omega^{\varrho} \times \mathbf{B}x^{\mu'} y^{\nu'} \omega^{\varrho'} = \mathbf{AB}x^{\mu+\mu'} y^{\nu+\nu'} \omega^{\varrho+\varrho'}$$

139. Ἰδιαιτέρα περίπτωσις. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν $(2\alpha^2\beta^3\gamma)^3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι

$$(2\alpha^2\beta^3\gamma)^3 = 2\alpha^2\beta^3\gamma \times 2\alpha^2\beta^3\gamma \times 2\alpha^2\beta^3\gamma = 8\alpha^6\beta^9\gamma^3.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι

$$(x^{\alpha} y^{\beta} \omega^{\gamma})^{\mu} = x^{\alpha\mu} y^{\beta\mu} \omega^{\gamma\mu}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα μονώνυμον εἰς τὴν μυοστὴν δύναμιν (ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς) ὑψώνομεν κάθε παράγοντα τοῦ μονωνύμου εἰς τὴν μ δύναμιν.

Ἀσκήσεις : *153, 155, 156, 158, 159, 161.*

140. Πῶς πολλαπλασιάζομεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πολυώνυμον

$5α^3-3α^2β+αβ^2-2β^3$ ἐπὶ τὸ μονώνυμον $-4αβ$

δηλ. νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(5α^3-3α^2β+αβ^2-2β^3)\times(-4αβ).$$

Ἐπειδὴ ἕνα πολυώνυμον εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμὸν (§ 65). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$(5α^3-3α^2β+αβ^2-2β^3)\times(-4αβ)=-20α^4β+12α^3β^2-4α^2β^3+8αβ^4.$$

Γενικῶς διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα πολυώνυμον ἐπὶ ἕνα μονώνυμον ἐφαρμόζομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών : *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα πολυώνυμον ἐπὶ ἕνα μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μονωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον.

Π. χ. $(-3αx)\cdot(4x^3-7x^2+2x-1)=-12αx^4+21αx^3-6αx^2+3αx.$

Ἀσκήσεις : *163, 164, 168, 170, 172.*

141. Πῶς πολλαπλασιάζομεν δύο ἀκέραια πολυώνυμα ;

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(α^2-3αβ+2β^2)\times(2α-5β).$$

Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀνωτέρω πολυωνύμων εἶναι ἕνα γινόμενον ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ ἕνα ἄλλο ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα (§ 67), δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών : *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα πολυώνυμον ἐπὶ ἄλλο πολυώνυμον πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου πολυωνύμου ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ δευτέρου πολυωνύμου καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα γινόμενα· κάμνομεν ἔπειτα τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.*

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned}(α^2-3αβ+2β^2)(2α-5β) &= (α^2-3αβ+2β^2)\cdot 2α+(α^2-3αβ+2β^2)\cdot(-5β)\\ &= 2α^3-6α^2β+4αβ^2-5α^2β+15αβ^2-10β^3\\ &= 2α^3-11α^2β+19αβ^2-10β^3.\end{aligned}$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$(2x-3y)(5x+y)=(2x-3y)\cdot 5x+(2x-3y)\cdot y$$
$$=10x^2-15xy+2xy-3y^2$$
$$=10x^2-13xy-3y^2.$$

Ἀσκήσεις : *174, 176, 178, 180, 182.*

142. Σύντομος πολλαπλασιασμός. Τὰ γινόμενα τῆς μορφῆς $(x\pm\alpha)(x\pm\beta)$ δύνανται νὰ εὑρεθοῦν ἀμέσως.

Πράγματι· ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\alpha=8$, $\beta=5$, θὰ ἔχωμεν τὰς περιπτώσεις :

$$(x+8)(x+5)=x^2+8x+5x+40=x^2+13x+40$$
$$(x-8)(x-5)=x^2-8x-5x+40=x^2-13x+40$$
$$(x+8)(x-5)=x^2+8x-5x-40=x^2+3x-40$$
$$(x-8)(x+5)=x^2-8x+5x-40=x^2-3x-40.$$

Καὶ εἰς τὰς τέσσαρας περιπτώσεις τὸ γινόμενον ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀμέσως :

Ὁ 1ος ὅρος εἶναι x^2*· εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διωνύμου.*

Ὁ 2ος ὅρος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διωνύμου ἐπὶ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων ὅρων.

Ὁ 3ος ὅρος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν τελευταίων ὅρων.

Π. χ.
$$(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$$
$$(y-9)(y-6)=y^2-15y+54.$$

Γενικῶς θὰ εἶναι

$$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

Ἀσκήσεις : *184, 186, 187.*

143. Γινόμενον δύο διατεταγμένων πολυωνύμων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι προτιμότερον νὰ διατάσσωμεν τὰ δοθέντα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ νὰ κατατάσσωμεν τὴν πρᾶξιν, ὅπως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίων ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

Π. χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(-4\alpha^2\beta-\beta^3+2\alpha^3+3\alpha\beta^2)\cdot(\alpha\beta-5\beta^2+3\alpha^2).$$

Διατάσσομεν πρῶτον τὰ δοθέντα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α καὶ γράφομεν τὸ ἕνα πολυώνυμον κάτωθι τοῦ ἄλλου, ὅπως φαίνεται κατωτέρω :

Πολλαπλασιαστέος :	$\Pi = 2\alpha^3 - 4\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Πολλαπλασιαστής :	$\Pi' = 3\alpha^2 + \alpha\beta - 5\beta^2$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $3\alpha^2$	$6\alpha^5 - 12\alpha^4\beta + 9\alpha^3\beta^2 - 3\alpha^2\beta^3$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $\alpha\beta$	$+ 2\alpha^4\beta - 4\alpha^3\beta^2 + 3\alpha^2\beta^3 - \alpha\beta^4$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $-5\beta^2$	$-10\alpha^3\beta^2 + 20\alpha^2\beta^3 - 15\alpha\beta^4 + 5\beta^5$
Γινόμενον	$6\alpha^5 - 10\alpha^4\beta - 5\alpha^3\beta^2 + 20\alpha^2\beta^3 - 16\alpha\beta^4 + 5\beta^5$

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἐλλιπῶν πολυωνύμων ἐργαζόμεθα ὅπως ἀνωτέρω, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ ἀφήνωμεν κενὰς θέσεις, διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς ὁμοίους ὅρους εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

Π. χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta^3 - \beta^4)(2\alpha^3 + \alpha^2\beta - \beta^3).$$

Διάταξις τῆς πράξεως

Πολλαπλασιαστέος :	$\Pi = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta^3 - \beta^4$
Πολλαπλασιαστής :	$\Pi' = 2\alpha^3 + \alpha^2\beta - \beta^3$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $2\alpha^3$	$2\alpha^7 \quad - 4\alpha^5\beta^2 + 6\alpha^4\beta^3 - 2\alpha^3\beta^4$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $\alpha^2\beta$	$+ \alpha^6\beta \quad - 2\alpha^4\beta^3 + 3\alpha^3\beta^4 - \alpha^2\beta^5$
Γινόμενον τοῦ Π ἐπὶ $-\beta^3$	$- \alpha^4\beta^3 \quad + 2\alpha^2\beta^5 - 3\alpha\beta^6 + \beta^7$
Γινόμενον	$2\alpha^7 + \alpha^6\beta - 4\alpha^5\beta^2 + 3\alpha^4\beta^3 + \alpha^3\beta^4 + \alpha^2\beta^5 - 3\alpha\beta^6 + \beta^7.$

Ἀσκήσεις : 188, 190, 194, 196, 199, 201.

144. Πῶς πολλαπλασιάζομεν πολλὰ πολυώνυμα ; *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολλὰ πολυώνυμα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο πρῶτα πολυώνυμα, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ τρίτον πολυώνυμον ... καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλα τὰ δοθέντα πολυώνυμα*

Παράδειγμα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸ $x-\alpha$ ἐπὶ $x-\beta$ καὶ ἔχομεν (§ 142)

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta.$$

Πολλαπλασιάζομεν τώρα τὸ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ ἐπὶ $x-\gamma$ καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{l} x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \\ x - \gamma \\ \hline x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x \\ \quad - \gamma x^2 + (\alpha+\beta)\gamma x - \alpha\beta\gamma \\ \hline x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + [\alpha\beta + (\alpha+\beta)\gamma]x - \alpha\beta\gamma. \end{array}$$

Ὥστε θὰ εἶναι

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

145. Θεώρημα I. ***Τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων περιέχει***

τοὐλάχιστον δύο ὅρους, οἱ ὁποῖοι δὲν δύνανται νὰ ἀναχθοῦν.

Ἀπόδειξις : Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν δύο πολυώνυμα, διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος, εὑρίσκομεν ὅρους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας ἔχει τὴν μεγαλυτέραν δύναμιν (μεγιστοβάθμιος ὅρος), καὶ ὁ ἄλλος ἔχει τὴν μικροτέραν δύναμιν (ἐλαχιστοβάθμιος ὅρος). Ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πρώτων ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ὁ ἐλαχιστοβάθμιος προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν τελευταίων ὅρων τῶν δύο πολυωνύμων. Οἱ δύο αὐτοὶ ὅροι δὲν δύνανται νὰ ἀναχθοῦν ποτέ· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον ἔχει δύο τοὐλάχιστον ὅρους.

Τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ κάτωθι γινόμενον:

Πολλαπλασιαστέος :	$x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha^3$
Πολλαπλασιαστής :	$x-\alpha$
	$x^4+\alpha x^3+\alpha^2 x^2+\alpha^3 x$
	$-\alpha x^3-\alpha^2 x^2-\alpha^3 x-\alpha^4$
Γινόμενον	$x^4-\qquad\qquad-\alpha^4$

146. Πόρισμα. ***Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν πολυωνύμων αὐτῶν.***

147. **Θεώρημα II.** ***Τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.***

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα αὐτὰ εἶναι ὁμογενῆ, ὅλοι οἱ ὅροι ἑκάστου εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενόν των θὰ εἶναι προφανῶς ἕνα πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι θὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, δηλ. θὰ εἶναι ὁμογενές, καὶ κάθε ὅρος τοῦ γινομένου θὰ ἔχῃ βαθμὸν ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν ἑνὸς ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἑνὸς ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Π.χ. εἰς τὸ παράδειγμα τῆς § 143 ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολλαπλασιαστέου εἶναι τοῦ τρίτου βαθμοῦ, ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καὶ ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ γινομένου εἶναι ἀναγκαστικῶς τοῦ πέμπτου βαθμοῦ.

Σημ. Ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ὁμογενῆ πολυώνυμα, τὸ γινόμενόν των πρέπει νὰ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον καὶ βαθμοῦ ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Ἐὰν λοιπόν, κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, εὕρωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων δὲν εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον εἶναι ἐσφαλμένον καὶ πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ πάλιν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἀσκήσεις : 203, 205, 206.

4. Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες

148. Ταυτότης. *Ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.*

Π. χ. Ἡ ἰσότης $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ εἶναι μία ταυτότης, διότι αἱ παραστάσεις $\alpha(\beta+\gamma)$ καὶ $\alpha\beta+\alpha\gamma$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 118.

Συνήθως διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι μία ἰσότης εἶναι μία ταυτότης, ἀντικαθιστῶμεν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος $=$ μὲ τὸ σημεῖον $\equiv$.

Π. χ. γράφομεν $\alpha(\beta+\gamma)\equiv\alpha\beta+\alpha\gamma$, $\alpha+\beta\equiv\beta+\alpha$.

Αἱ κατωτέρω ταυτότητες εἶναι ἀ ξ ι ο σ η μ ε ί ω τ ο ι, διότι χρησιμοποιοῦνται κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ τὰς ἐνθυμούμεθα ἀπὸ μνήμης.

149. Τετράγωνον ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν. Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντες ἀριθμοὶ ἢ δύο μονώνυμα. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν α καὶ β εἶναι $(\alpha+\beta)^2$ ἢ $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$. Τὸ δὲ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς των εἶναι $(\alpha-\beta)^2$ ἢ $(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)$. Ἂν ἐκτελέσωμεν τοὺς πολλαπλασιασμοὺς θὰ ἔχωμεν :

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο αὐτῶν πολλαπλασιασμῶν παρίστανται συνήθως ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta} \qquad \boxed{(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

καὶ ἐκφράζουν, ὅτι :

I. *Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀριθμῶν ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν.*

II. *Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀριθμῶν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν.*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι :

1. $(3\alpha x+5\beta y)^2=(3\alpha x)^2+(5\beta y)^2+2\cdot 3\alpha x\cdot 5\beta y$
$\quad=9\alpha^2x^2+25\beta^2y^2+30\alpha\beta xy$

2. $(5xy^2-7\omega^3)^2=(5xy^2)^2+(7\omega^3)^2-2\cdot 5xy^2\cdot 7\omega^3$
$\quad=25x^2y^4+49\omega^6-70xy^2\omega^3$

3. $\left(4\alpha\beta^2\pm\frac{2}{5}x\right)^2=(4\alpha\beta^2)^2+\left(\frac{2}{5}x\right)^2\pm2\cdot 4\alpha\beta^2\cdot\frac{2}{5}x$
$\quad=16\alpha^2\beta^4+\frac{4}{25}x^2\pm\frac{16}{5}\alpha\beta^2x.$

Ὁμοίως εἶναι

$$81^2=(80+1)^2=80^2+1+2\cdot 80\cdot 1=6400+1+160=6561$$
$$59^2=(60-1)^2=60^2+1-2\cdot 60\cdot 1=3600+1-120=3481.$$

Ἀσκήσεις : 208, 210, 212, 214, 217, 220, 224, 225.

150. Γινόμενον ἀθροίσματος δύο μονωνύμων ἐπὶ τὴν διαφοράν των. Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντες ἀριθμοὶ ἢ δύο τυχόντα μονώνυμα. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματός των $\alpha+\beta$ ἐπὶ τὴν διαφοράν των $\alpha-\beta$ εἶναι : $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2.$$

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\boxed{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2}$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ ἐκφράζει, ὅτι :

Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἢ δύο μονωνύμων ἐπὶ τὴν διαφοράν των εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν ἢ μονωνύμων.

Π. χ. 1. $(2\alpha\beta+3\gamma\delta)(2\alpha\beta-3\gamma\delta)=(2\alpha\beta)^2-(3\gamma\delta)^2=4\alpha^2\beta^2-9\gamma^2\delta^2$

2. $\left(3x^2y-\frac{4}{5}\alpha\beta^2\right)\left(3x^2y+\frac{4}{5}\alpha\beta^2\right)=9x^4y^2-\frac{16}{25}\alpha^2\beta^4$

3. $(\alpha+\beta+3\gamma)(\alpha+\beta-3\gamma)=[(\alpha+\beta)+3\gamma][(\alpha+\beta)-3\gamma]$
$=(\alpha+\beta)^2-(3\gamma)^2$
$=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-9\gamma^2.$

Ἀσκήσεις : 230, 232, 235, 239, 241, 245.

151. Τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $\alpha+\beta+\gamma$, ὅπου α, β, γ εἶναι τυχόντες ἀριθμοὶ ἢ μονώνυμα· δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν μὲ τί ἰσοῦται τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)^2$.

Ἐπειδὴ $(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$ θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=$$
$$=(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma)+(\alpha\beta+\beta^2+\beta\gamma)+(\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2)$$
$$=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta^2+\beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2$$
$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma.$$

Ὥστε εἶναι

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta.$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἴσον : 1ον. μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του καὶ 2ον. μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διπλασίων γινομένων τῶν ὅρων του (ἀνὰ δύο λαμβανομένων).

Σημ. Τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

$$(\Sigma\alpha)^2=\Sigma\alpha^2+2\Sigma\alpha\beta$$

ὅπου $(\Sigma\alpha)^2$ παριστάνει τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$, τὸ $\Sigma\alpha^2$ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του, δηλ. τὸ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots$, καὶ τὸ $2\Sigma\alpha\beta$ παριστάνει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται, ὅπως ὁ $\alpha\beta$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned}(3x^2-4x+5)^2&=(3x^2)^2+(-4x)^2+5^2+2\cdot3x^2\cdot(-4x)+2\cdot3x^2\cdot5+2\cdot(-4x)\cdot5\\&=9x^4+16x^2+25-24x^3+30x^2-40x\\&=9x^4-24x^3+46x^2-40x+25.\end{aligned}$$

Τὸ κάτωθι θεώρημα ἀποδεικνύει τὸν ἀνωτέρω κανόνα τοῦ τετραγώνου ἑνὸς πολυωνύμου.

★ 152. Θεώρημα. ***Τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ὅρων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν διπλασίων γινομένων ὅλων τῶν ὅρων του ἀνὰ δύο λαμβανομένων, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.***

'Εὰν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ δύο ὅρους, δηλ. ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha+\beta$, τὸ τετράγωνόν του θὰ εἶναι (§ 149)

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta.$$

'Εὰν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ τρεῖς ὅρους, δηλ. ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha+\beta+\gamma$, τὸ τετράγωνόν του, ὡς εἴδομεν ἤδη, θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθές, ὅταν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ δύο ὅρους ἢ καὶ τρεῖς ὅρους.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ ν ὅρους. Πρὸς τοῦτο θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν *μέθοδον τῆς ἐπαγωγῆς* *.

---

* Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἐπαγωγῆς ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ θεώρημα αὐτὸ εἶναι ἀληθὲς δι' ἕνα ἄθροισμα (ν—1) ὅρων καὶ ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀκόμη ἀληθὲς δι' ἕνα ἄθροισμα ν ὅρων. Τότε, ἐὰν τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ δύο ὅρους, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ τρεῖς ὅρους· ἐὰν εἶναι

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $\Pi=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\varkappa+\lambda+\mu$ τὸ ὁποῖον ἔχει ν ὅρους.

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς διὰ τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον ἔχει (ν—1) ὅρους.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὺς (ν—1) ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π, δηλ. ἐὰν θέσωμεν

$$E=\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\varkappa+\lambda$$

θὰ ἔχωμεν

$$E^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\varkappa^2+\lambda^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\ldots+2\alpha\lambda+2\beta\gamma+\ldots+2\beta\lambda+2\gamma\delta\ldots+2\gamma\lambda+\ldots+2\varkappa\lambda.$$

Ἐπειδὴ $\Pi=E+\mu$ θὰ εἶναι $\Pi^2=(E+\mu)^2$

ἢ $$\Pi^2=E^2+\mu^2+2E\mu.$$

Ἡ τελευταία ταυτότης δεικνύει, ὅτι τὸ Π^2 ἀποτελεῖται: πρῶτον ἀπὸ τὸ E^2, δηλ. ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν—1 ὅρων, ηὐξημένον κατὰ τὰ διπλάσια γινόμενα αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων· δεύτερον ἀπὸ τὸ μ^2, δηλ. ἀπὸ τὸ τετράγωνον τοῦ νιοστοῦ ὅρου καὶ τρίτον ἀπὸ τὸ 2Εμ, δηλ. ἀπὸ τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν (ν—1) πρώτων ὅρων ἐπὶ τὸν νιοστὸν ὅρον μ· ὥστε θὰ εἶναι

$$\Pi^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots+\varkappa^2+\lambda^2+\mu^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\ldots+2\alpha\mu+2\beta\gamma+\ldots+2\beta\mu+2\gamma\delta+\ldots+2\lambda\mu.$$

Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ δύο ὅρους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τρεῖς ὅρους· ἐπίσης ἐπειδὴ ἀληθεύει διὰ τρεῖς ὅρους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τέσσαρας ὅρους.....καὶ οὕτω καθεξῆς· ἑπομένως τὸ θεώρημα ἀληθεύει γενικῶς.

Ἀσκήσεις: 252, 255, 261.

153. Κύβος ἑνὸς διωνύμου. Ἔστωσαν α καὶ β δύο τυχόντες ἀριθμοὶ ἢ δύο μονώνυμα· ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματός των εἶναι $(\alpha+\beta)^3$ ἢ $(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)$ ἢ $(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha+\beta)$, ὁ δὲ κύβος τῆς διαφορᾶς των εἶναι

$$(\alpha-\beta)^3 \quad ἢ \quad (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta) \quad ἢ \quad (\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)(\alpha-\beta).$$

Ἂν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, θὰ ἔχωμεν:

ἀληθὲς διὰ τρεῖς ὅρους, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ τέσσαρας ὅρους καὶ οὕτω καθεξῆς· ἑπομένως τὸ θεώρημα ἀληθεύει ὁσοιδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος.

$$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$$
$$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta)=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)$$
$$=\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3$$
$$=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3.$$

Ὥστε εἶναι :

$$\boxed{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3} \qquad (1)$$

$$\boxed{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3} \qquad (2)$$

καὶ ἐκφράζουν, ὅτι :

I. *Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ καὶ μὲ τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ μὲ τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου καὶ μὲ τὸν κύβον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.*

II. *Ὁ κύβος τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, πλὴν τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν δεύτερον, καὶ μὲ τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, πλὴν τὸν κύβον τοῦ δευτέρου.*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι :

1. $(x+5)^3=x^3+3x^2\cdot 5+3x\cdot 5^2+5^3=x^3+15x^2+75x+125$
2. $(x-1)^3=x^3-3x^2\cdot 1+3x\cdot 1^2-1^3=x^3-3x^2+3x-1$
3. $(2\alpha+5\beta)^3=(2\alpha)^3+3\cdot(2\alpha)^2\cdot 5\beta+3\cdot 2\alpha\cdot(5\beta)^2+(5\beta)^3$
   $=8\alpha^3+60\alpha^2\beta+150\alpha\beta^2+125\beta^3$
4. $(3\mu x^2-4\nu y^2)^3=(3\mu x^2)^3-3\cdot(3\mu x^2)^2\cdot 4\nu y^2+3\cdot 3\mu x^2\cdot(4\nu y^2)^2-(4\nu y^2)^3$
   $=27\mu^3x^6-108\mu^2\nu x^4y^2+144\mu\nu^2x^2y^4-64\nu^3y^6.$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι (1) καὶ (2) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)}$$

Ἀσκήσεις : *247, 249, 250.*

★154. Κύβος ἑνὸς πολυωνύμου. Θεώρημα. ***Ὁ κύβος ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων ὅλων τῶν ὅρων του, ηὐξημένον κατὰ τὰ τριπλάσια γινόμενα τοῦ τετραγώνου ἑκάστου ὅρου ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων ὅρων, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους καὶ ηὐξημένον ἀκόμη κατὰ τὰ ἑξαπλάσια γινόμενα τῶν ὅρων του, λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.***

Ἔστω τὸ πολυώνυμον $\alpha+\beta+\gamma$, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς ὅρους, ὁ κύβος του θὰ εἶναι:

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+\gamma)^3 &= [(\alpha+\beta)+\gamma]^3 \\
&= (\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\
&= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3 \\
&= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma+ \\
&\qquad +3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+\gamma^3 \\
&= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma+3\beta^2\alpha+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+6\alpha\beta\gamma.
\end{aligned}
$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει, ὅταν τὸ πολυώνυμον ἔχῃ τρεῖς ὅρους.

Θὰ δείξωμεν ἀκόμη, ὅτι ἐὰν τὸ θεώρημα ἀληθεύῃ διὰ τὸν κύβον ἑνὸς πολυωνύμου μὲ $(\nu-1)$ ὅρους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τὸν κύβον ἑνὸς πολυωνύμου μὲ ν ὅρους.

Πράγματι· ἔστω, ὅτι, θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν κύβον τοῦ πολυωνύμου $\Pi=\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\kappa+\lambda+\mu$

τὸ ὁποῖον ἔχει ν ὅρους.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὺς $\nu-1$ ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π, δηλ. ἐὰν θέσωμεν

$$E=\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\kappa+\lambda$$

θὰ ἔχωμεν $$E^3=(\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\kappa+\lambda)^3.$$

Ἐπειδὴ $\Pi=E+\mu$ θὰ εἶναι

$$\Pi^3=(E+\mu)^3 \quad \text{ἢ} \quad \Pi^3=E^3+\mu^3+3E^2\mu+3E\mu^2 \qquad (1)$$

Ἡ ταυτότης (1) δεικνύει, ὅτι τὸ Π^3 ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ $E^3+\mu^3$, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ν ὅρων τοῦ πολυωνύμου καὶ ὅλα τὰ τριπλάσια γινόμενα τῆς μορφῆς $3\alpha^2\beta$ καὶ τὰ ὁποῖα δὲν περιέχουν τὸν μ, καὶ ἀκόμη τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξαπλασίων γινομένων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου Ε ἀνὰ τρεῖς λαμβανομένων.

Ἐπὶ πλέον ὅλα τὰ τριπλάσια γινόμενα τοῦ μ περιέχονται εἰς τὸ $3E^2\mu$ καὶ ὅλα τὰ τριπλάσια γινόμενα τοῦ μ^2 περιέχονται εἰς τὸ $3\mu^2E$. Ἐξ ἄλλου οἱ ὅροι τοῦ $3E^2\mu$ εἶναι τοιοῦτοι, ὅπως οἱ

$$\ldots 3(2\alpha\beta+2\alpha\gamma+\ldots+2\kappa\lambda)\cdot\mu\equiv 6\alpha\beta\mu+6\alpha\gamma\mu+\ldots+6\kappa\lambda\mu,$$

δηλ. περιέχουν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξαπλασίων γινομένων δύο τυχόντων ὅρων τοῦ Ε ἐπὶ μ.

Ὥστε τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ τὸ πολυώνυμον Π.

Ἐπειδὴ τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ τρεῖς ὅρους, θὰ ἀληθεύῃ καὶ διὰ τέσσαρας ὅρους . . . ., καὶ ἑπομένως εἶναι γενικόν.

Σημ. Ὁ κύβος ἑνὸς πολυωνύμου παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$(\Sigma\alpha)^3=\Sigma\alpha^3+3\Sigma\alpha^2\beta+6\Sigma\alpha\beta\gamma$$

ὅπου τὸ $(\Sigma\alpha)^3$ παριστάνει τὸν κύβον τοῦ πολυωνύμου $(\alpha+\beta+\gamma+\dots)$, τὸ $\Sigma\alpha^3$ παριστάνει τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου, δηλ. τὸ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\dots$, τὸ $3\Sigma\alpha^2\beta$ παριστάνει τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται, ὅπως ὁ $\alpha^2\beta$, δηλ. τῶν ὅρων $\alpha^2\beta$, $\alpha^2\gamma$, ... Τὸ $6\Sigma\alpha\beta\gamma$ παριστάνει τὸ ἑξαπλάσιον ἄθροισμα τοῦ γινομένου τῶν ὅρων ἀνὰ τρεῖς λαμβανομένων.

Ἀσκήσεις: *265*, *266*.

155. Διώνυμον τοῦ Νεύτωνος. Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ *διωνύμου τοῦ Νεύτωνος*, περὶ τοῦ ὁποίου θὰ γίνῃ λόγος εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

Δυνάμεθα πρακτικῶς νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\mu$, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών: Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμον πρὸς τὰ γράμματα x καὶ α, βαθμοῦ μ καὶ περιέχει $\mu+1$ ὅρους. Οἱ ἐκθέται τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, τοῦ δὲ α αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα.

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι πάντοτε x^μ καὶ ὁ τελευταῖος α^μ.

Διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ ἕνα ὅρον τοῦ ἀναπτύγματος εἰς τὸν ἑπόμενον, πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x, ποὺ ἔχει ὁ ὅρος αὐτὸς καὶ τὸ γινόμενον αὐτὸ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α ηὐξημένου κατὰ 1· παραπλεύρως δὲ τοῦ πηλίκου αὐτοῦ γράφομεν τὸν α μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μεγαλύτερον καὶ τὸν x μὲ ἐκθέτην κατὰ μονάδα μικρότερον.

Π. χ.
$$(x+\alpha)^4=x^4+4\alpha x^3+6\alpha^2x^2+4\alpha^3x+\alpha^4$$
$$(x+\alpha)^5=x^5+5\alpha x^4+10\alpha^2x^3+10\alpha^3x^2+5\alpha^4x+\alpha^5$$
$$(x+\alpha)^6=x^6+6\alpha x^5+15\alpha^2x^4+20\alpha^3x^3+15\alpha^4x^2+6\alpha^5x+\alpha^6.$$

Σημ. Διὰ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x-\alpha)^\mu$ ἰσχύει ὁ αὐτὸς κανὼν μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι πρέπει νὰ θέτωμεν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα + καὶ — πρὸ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος.

Π. χ. $(x-\alpha)^5=x^5-5\alpha x^4+10\alpha^2x^3-10\alpha^3x^2+5\alpha^4x-\alpha^5$.

***Τρίγωνον τοῦ** Pascal.* Ὁ κάτωθι πίναξ, ὁ ὁποῖος λέγεται

ἀριθμητικὸν τρίγωνον τοῦ *Pascal*, περιέχει τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἀναπτύγματος $(\alpha+\beta)^\mu$.

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ	*εἶναι*							
$(\alpha+\beta)^0$	1							
$(\alpha+\beta)^1$	1	1						
$(\alpha+\beta)^2$	1	2	1					
$(\alpha+\beta)^3$	1	3	3	1				
$(\alpha+\beta)^4$	1	4	6	4	1			
$(\alpha+\beta)^5$	1	5	10	10	5	1		
$(\alpha+\beta)^6$	1	6	15	20	15	6	1	
$(\alpha+\beta)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1
$(\alpha+\beta)^8$								

Κατὰ τὸν πίνακα αὐτὸν ἕκαστος ὅρος ἔχει συντελεστὴν ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ συντελεστοῦ, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἄνωθεν αὐτοῦ καὶ τοῦ γειτονικοῦ του πρὸς τὰ ἀριστερά.

Οὕτω διὰ νὰ γράψωμεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἀναπτύγματος $(\alpha+\beta)^7$ λέγομεν: πρῶτος συντελεστὴς 1, δεύτερος συντελεστὴς $6+1=7$, τρίτος συντελεστὴς $15+6=21$, τέταρτος συντελεστὴς $20+15=35$ καὶ οὕτω καθεξῆς. (Οἱ ὑπόλοιποι συντελεσταὶ ἐπαναλαμβάνονται οἱ αὐτοί, ἀλλὰ κατ' ἀντίθετον τάξιν).

Ἀσκήσεις : 247, 249, 250, 251, 262, 263, 265.

156. Ἄλλαι ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες. Γνωρίζομεν (§ 149), ὅτι $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ (1), $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$ (2).

1. Ἀπὸ τὴν ταυτότητα (1) λαμβάνομεν

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}$$

2. Ἀπὸ τὴν ταυτότητα (2) λαμβάνομεν

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta}$$

3) Ἂν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)}$$

4. Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta}$$ (ταυτότης τοῦ Legendre)

Γνωρίζομεν (§ 153), ὅτι

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ (3) καὶ $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$ (4).

5. Ἀπὸ τὴν ταυτότητα (3) λαμβάνομεν

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

6. Ἀπὸ τὴν ταυτότητα (4) λαμβάνομεν

$$\boxed{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)}$$

5. Διαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

157. Ὁρισμοί. *Διαίρεσις μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Α διὰ ἄλλης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Β λέγεται ἡ εὕρεσις μιᾶς τρίτης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Π, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν δευτέραν Β, δίδει τὴν πρώτην Α.*

Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὴν διαίρεσιν τῆς Α διὰ Β γράφομεν

$$A:B \quad \text{ἢ} \quad \frac{A}{B}.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\frac{A}{B}=\Pi \quad \text{ἢ} \quad A=B\cdot\Pi.$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει, ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι μία ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Πράγματι, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ζητοῦμεν ἕνα γινόμενον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τοὺς δύο παράγοντας, ἐνῷ εἰς τὴν διαίρεσιν γνωρίζομεν τὸ γινόμενον (διαιρετέον) καὶ τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων του (διαιρέτην) καὶ ζητοῦμεν τὸν ἄλλον παράγοντα (πηλίκον).

158. Πῶς διαιροῦμεν ἀκέραια μονώνυμα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ μονώνυμον $-27\alpha^3\beta^4\gamma^2$ διὰ τοῦ $9\alpha^2\beta^3$. Τὸ πηλίκον τῶν δύο αὐτῶν μονωνύμων θὰ εἶναι

$$\frac{-27\alpha^3\beta^4\gamma^2}{9\alpha^2\beta^3}=\frac{-27\cdot\alpha^3\cdot\beta^4\cdot\gamma^2}{9\cdot\alpha^2\cdot\beta^3}=\frac{-27}{9}\cdot\frac{\alpha^3}{\alpha^2}\cdot\frac{\beta^4}{\beta^3}\cdot\gamma^2=$$
$$=-3\cdot\alpha^{3-2}\cdot\beta^{4-3}\cdot\gamma^2=-3\alpha\beta\gamma^2.$$

Πράγματι· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην $9\alpha^2\beta^3$ ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον $-3\alpha\beta\gamma^2$, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον

$$9\alpha^2\beta^3 \cdot (-3\alpha\beta\gamma^2) = -27\alpha^3\beta^4\gamma^2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών :

Κανών : *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων μονωνύμων, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τῶν συντελεστῶν γράφομεν ἕκαστον γράμμα τοῦ διαιρετέου, ἀφοῦ προηγουμένως ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.*

Κατὰ τὸν κανόνα αὐτὸν θὰ εἶναι :

$36\alpha^2\beta^3xy^2 : (-9\alpha\beta^3xy) = -4\alpha y, \qquad (-4x^3y^2\omega) : (-2xy\omega) = 2x^2y.$

159. Παρατηρήσεις I. *Ἕνα γράμμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ἐκθέτην εἰς τὸν διαιρετέον καὶ εἰς τὸν διαιρέτην, ἐξαλείφεται εἰς τὸ πηλίκον.*

Πράγματι κατὰ τὰς § 95, 98 θὰ εἶναι

$$\frac{\beta^4}{\beta^4} = \beta^{4-4} = \beta^0 = 1.$$

II. *Ἐὰν ἕνα γράμμα δὲν ὑπάρχῃ εἰς τὸν διαιρέτην, μένει εἰς τὸ πηλίκον, ὅπως εἶναι εἰς τὸν διαιρετέον.*

Διότι δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει εἰς τὸν διαιρέτην μὲ ἐκθέτην 0.

Πράγματι θὰ εἶναι $\quad \dfrac{\alpha^2\beta^3\gamma}{\alpha\beta^2} = \dfrac{\alpha^2\beta^3\gamma}{\alpha\beta^2\gamma^0} = \alpha\beta\gamma.$

160. Πότε ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατή; Διὰ νὰ εἶναι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων μονωνύμων, ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον, *πρέπει ὁ διαιρετέος νὰ ἔχῃ ὅλα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου καὶ μὲ ἐκθέτας τὸ ὀλιγώτερον ἴσους μὲ τοὺς ἐκθέτας τοῦ διαιρέτου.*

Πράγματι· ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιον, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει, ὡς διαιρετέον, ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου μὲ ἐκθέτας τὸ ὀλιγώτερον ἴσους μὲ τοὺς ἐκθέτας τῶν αὐτῶν γραμμάτων τοῦ διαιρέτου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατὴ (τελεία) ἤ, ὅτι ὁ διαιρετέος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου.

Π. χ. Ἡ διαίρεσις $10x^3y^2\omega : 5x^2y^2\omega$ εἶναι τελεία· τὸ πηλίκον εἶναι $2x$.

161. Πότε ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος. Ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἀδύνατος :

1ον. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἕνα ἢ περισσότερα γράμματα, τὰ ὁποῖα δὲν περιέχονται εἰς τὸν διαιρετέον.

2ον. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἕνα γράμμα μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ γράμματος αὐτοῦ εἰς τὸν διαιρετέον.

Ὅταν ἡ διαίρεσις δύο μονωνύμων εἶναι ἀδύνατος, παριστάνομεν τὸ πηλίκον των μὲ μίαν **κλασματικὴν παράστασιν**, ἡ ὁποία ἔχει ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Π. χ. Τὸ πηλίκον τοῦ $16\alpha\beta^2$ διὰ τοῦ $7\alpha^3$ εἶναι ἡ κλασματικὴ παράστασις:

$$\frac{16\alpha\beta^2}{7\alpha^3} \quad ἢ \quad \frac{16\beta^2}{7\alpha^2}.$$

Ἐπίσης τὸ πηλίκον τοῦ $9\alpha\beta\gamma^2$ διὰ τοῦ $4\alpha^2\beta^2\delta$ εἶναι

$$\frac{9\alpha\beta\gamma^2}{4\alpha^2\beta^2\delta} \quad ἢ \quad \frac{9\gamma^2}{4\alpha\beta\delta}.$$

Ἀσκήσεις : 267, 269, 271, 273, 276, 277.

162 Πῶς διαιροῦμεν ἀκέραιον πολυώνυμον διὰ ἀκεραίου μονωνύμου; Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $6\alpha^4-3\alpha^3\beta+10\alpha^2\beta^2$ διὰ τοῦ μονωνύμου $2\alpha^2$.

Ἐπειδὴ ἕνα πολυώνυμον εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὅρων του, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δι' ἀριθμοῦ (§ 73), δηλ. νὰ διαιρέσωμεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ $2\alpha^2$. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$(6\alpha^4-3\alpha^3\beta+10\alpha^2\beta^2) : 2\alpha^2 = \frac{6\alpha^4}{2\alpha^2} - \frac{3\alpha^3\beta}{2\alpha^2} + \frac{10\alpha^2\beta^2}{2\alpha^2}$$
$$= 3\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha\beta + 5\beta^2.$$

Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον $3\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha\beta+5\beta^2$ εἶναι πράγματι τὸ ζητούμενον, διότι πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $2\alpha^2$, δίδει τὸν διαιρετέον. Πράγματι ἔχομεν:

$$2\alpha^2(3\alpha^2 - \frac{3\alpha\beta}{2} + 5\beta^2) = 6\alpha^4-3\alpha^3\beta+10\alpha^2\beta^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{5\alpha^2\beta^3x-7\alpha\beta^2x^2+15\alpha\beta\gamma x}{3\alpha\beta x} = \frac{5\alpha^2\beta^3x}{3\alpha\beta x} - \frac{7\alpha\beta^2x^2}{3\alpha\beta x} + \frac{15\alpha\beta\gamma x}{3\alpha\beta x}$$
$$= \frac{5}{3}\alpha\beta^2 - \frac{7}{3}\beta x + 5\gamma.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών : *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα πολυώνυμον διὰ μονωνύμου διαιροῦμεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.*

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εἶναι ἡ διαίρεσις δυνατή, πρέπει κάθε ὅρος τοῦ διαιρετέου νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διαιρέτου. Ὅταν ἡ

διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος, τὸ πηλίκον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα κλασματικῶν πηλίκων, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει πάντοτε νὰ δίδωμεν τὴν ἁπλουστέραν μορφήν.

Π. χ. $\frac{3\alpha\beta+4\beta\gamma-6\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}+\frac{4\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}-\frac{6\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{\gamma}+\frac{4}{\alpha}-\frac{6}{\beta}.$

Ἀσκήσεις : *278, 280, 282 284.*

163 Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως. Ἔστω τὸ γινόμενον $3\alpha^2\beta\times(4\alpha^2-5\alpha+2)$. Γνωρίζομεν, ὅτι

$$3\alpha^2\beta(4\alpha^2-5\alpha+2)=12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta \quad (1)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι κάθε ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (1) εἶναι γινόμενον τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta$ ἐπὶ ἕνα μονώνυμον τῆς παρενθέσεως. Ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου $12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta$ περιέχουν τὸν παράγοντα $3\alpha^2\beta$, ὁ ὁποῖος, διὰ τὸν λόγον αὐτόν, λέγεται κ ο ι ν ὸ ς π α ρ ά γ ω ν.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) διὰ τοῦ πρώτου, δηλ. ἐὰν γράψωμεν

$$12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta=3\alpha^2\beta(4\alpha^2-5\alpha+2)$$

θὰ λέγωμεν, ὅτι ἐ θ έ σ α μ ε ν τ ὸ ν κ ο ι ν ὸ ν π α ρ ά γ ο ν τ α $3\alpha^2\beta$ ἐ κ τ ὸ ς π α ρ ε ν θ έ σ ε ω ς (§ 66).

Ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ὑπάρχει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $12\alpha^4\beta-15\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta$ διὰ τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta$.

Γενικῶς : Ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι ἑνὸς πολυωνύμου ἔχουν ἕνα κ ο ι ν ὸ ν π α ρ ά γ ο ν τ α, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸν παράγοντα αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἐντὸς αὐτῆς νὰ θέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ δοθέντος πολυωνύμου διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτοῦ παράγοντος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι *ἀνελύσαμεν τὸ πολυώνυμον εἰς γινόμενον παραγόντων.*

Π. χ. Εἰς τὸ πολυώνυμον $12x^2y-8xy^2-4xy\omega$ οἱ ὅροι του ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸ μονώνυμον $4xy$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$12x^2y-8xy^2-4xy\omega=4xy(3x-2y-\omega).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta-\gamma).$$

Ἀσκήσεις : *285, 287, 288.*

164. Τί ὀνομάζομεν διαίρεσιν δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ; *Διαίρεσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου Α δι' ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου Β λέγεται ἡ εὕρεσις ἑνὸς τρίτου πολυωνύμου Π, τοιούτου ὥστε νὰ εἶναι $A=B\cdot\Pi$.*

Τὸ πολυώνυμον Α λέγεται δ ι α ι ρ ε τ έ ο ς, τὸ Β δ ι α ι ρ έ τ η ς καὶ τὸ Π π η λ ί κ ο ν.

Τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων σπανίως ἐκφράζεται μὲ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον Π.

Θὰ ἴδωμεν κατωτέρω εἰς ποίας περιπτώσεις ἡ διαίρεσις Α : Β εἶναι δυνατὴ καὶ θὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον Π, ἐὰν ὑπάρχῃ τοιοῦτον.

165. Διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων διατεταγμένων. Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ **x**, διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ Α διὰ τοῦ Β.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει ἕνα τρίτον πολυώνυμον Π τοῦ **x**, ἀκέραιον καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ τοιοῦτον, ὥστε, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην Β, νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον Α, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $A \equiv B \cdot \Pi$ (1)

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_\nu$ τοὺς διαδοχικοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π, δηλ. ἂν θέσωμεν

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \ldots + \Pi_\nu$$

ἡ ταυτότης (1) γράφεται

$$A = B \cdot (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \ldots + \Pi_\nu) \qquad (2)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 145), ὅτι, ὅταν δύο πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ πολλαπλασιασθοῦν, ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ γινομένου δὲν ἀνάγονται μὲ κανένα ἄλλον ὅρον καὶ προκύπτουν ὁ μὲν πρῶτος ὅρος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων, ὁ δὲ τελευταῖος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τελευταίων ὅρων των.

Ἐξ αὐτοῦ λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πολυωνύμου Α εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου Β ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου Π· ἑπομένως θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον Π_1 τοῦ πηλίκου Π, ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου Α διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου Β.

Ἂς ἴδωμεν τώρα, πῶς θὰ εὕρωμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου Π. Ἡ ταυτότης (2) γράφεται

$$A = B\Pi_1 + B(\Pi_2 + \Pi_3 + \ldots + \Pi_\nu).$$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη αὐτῆς τὸ $B\Pi_1$ καὶ ἔχομεν

$$A - B\Pi_1 = B(\Pi_2 + \Pi_3 + \ldots + \Pi_\nu) \qquad (3)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Y_1 τὴν διαφορὰν $A - B\Pi_1$, τοῦ διαιρετέου Α καὶ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου Β ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον Π_1

τοῦ πηλίκου, καὶ τὴν ὁποίαν διαφορὰν ὀνομάζομεν *πρῶτον ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως, ἡ ταυτότης (3) γράφεται

$$Y_1 = B(\Pi_2 + \Pi_3 + \ldots + \Pi_\nu) \quad (4)$$

Ἐὰν ἐργασθῶμεν καὶ ἐπὶ τῆς ταυτότητος (4), ὅπως εἰργάσθημεν καὶ εἰς τὴν ταυτότητα (2), θὰ ἴδωμεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου Y_1 διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου B.

Συνεχίζοντες κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὴν ἐργασίαν, θὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου Π. Οἱ βαθμοὶ τῶν διαδοχικῶν ὅρων Π_1, Π_2, ..., Π_ν τοῦ πηλίκου βαίνουν ἐλαττούμενοι.

Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι μ η δ έ ν, τότε τὸ πολυώνυμον A εἶναι δ ι α ι ρ ε τ ὸ ν δ ι ὰ τ ο ῦ B καὶ τὸ πηλίκον ἐκφράζεται μὲ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον Π·

δηλ. εἶναι $\frac{A}{B} = \Pi$ ἢ $A = B \cdot \Pi$

δηλ. **Διαιρετέος = διαιρέτην × πηλίκον**

Ἐάν, τοὐναντίον, τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι δ ι ά φ ο ρ ο ν τ ο ῦ μ η δ ε ν ὸ ς καὶ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ς καὶ λέγομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον A δ ὲ ν ε ἶ ν α ι δ ι α ι ρ ε τ ὸ ν δ ι ὰ τ ο ῦ B.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἂν παραστήσωμεν μὲ Y τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$A = B \cdot \Pi + Y \quad (5)$$

δηλ. **Διαιρετέος = διαιρέτην × πηλίκον + ὑπολοίπῳ**

Ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητος (5) διὰ B, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{A}{B} = \Pi + \frac{Y}{B}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων πολυωνύμων:

Κανών: *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x δι' ἄλλου ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x, τὰ ὁποῖα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x:*

1ον Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου

ὅρου τοῦ διαιρέτου· τὸ προκῦπτον ἐξαγόμενον εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου.

2ον. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον αὐτὸν ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρετέον καὶ εὑρίσκομεν ἕνα ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν π ρ ῶ τ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν.

3ον. Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πρώτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ προκῦπτον ἐξαγόμενον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ πηλίκου.

4ον. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον. Τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ εἶναι τὸ δ ε ύ τ ε ρ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν.

Συνεχίζομεν ἔπειτα τὴν πρᾶξιν μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἕνα ὑπόλοιπον μηδὲν (διαίρεσις τελεία), *ἢ ἕνα ὑπόλοιπον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ διαιρέτου* (διαίρεσις ἀτελής).

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A=6x^4-19x^3+15x^2-x-6$ διὰ τοῦ πολυωνύμου $B=2x^2-3x+2$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον $6x^4$ τοῦ A διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $2x^2$ τοῦ B καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $6x^4 : 2x^2 = 3x^2$. Ὁ $3x^2$ εἶναι ὁ π ρ ῶ τ ο ς ὅ ρ ο ς τ ο ῦ π η λ ί κ ο υ.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ὅρον $3x^2$ τοῦ πηλίκου Π ἐπὶ τὸν διαιρέτην B καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $6x^4-9x^3+6x^2$. Ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρετέον A· διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὴν ἀφαίρεσιν αὐτὴν γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ γινομένου, μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα των, κάτωθι τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ διαιρετέου A καὶ κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

Ἂν ἀφαιρέσωσεν τὸ $6x^4-9x^3+6x^2$ ἀπὸ τὸν διαιρετέον A εὑρίσκομεν τὸ π ρ ῶ τ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν $Y_1=-10x^3+9x^2-x-6$.

Διαιροῦμεν τώρα τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ Y_1 διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ B καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $-10x^3 : 2x^2 = -5x$. Τὸ $-5x$ εἶναι ὁ δ ε ύ τ ε ρ ο ς ὅ ρ ο ς τ ο ῦ π η λ ί κ ο υ. Πολλαπλασιάζομεν τὸν δεύτερον ὅρον $-5x$ τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην B καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον

$$-10x^3+15x^2-10x,$$

τὸ ὁποῖον θέτομεν κάτωθι τοῦ πρώτου ὑπολοίπου Y_1, μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα τῶν ὅρων του. Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $Y_2=-6x^2+9x-6$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ δ ε ύ τ ε ρ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν.

Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον $-6x^2$ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου Y_2 διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου B καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $-6x^2 : 2x^2 = -3$· τὸ -3 εἶναι ὁ τ ρ ί τ ο ς ὅ ρ ο ς τ ο ῦ π η λ ί κ ο υ.

Πολλαπλασιάζομεν τὸν τρίτον ὅρον -3 τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην B καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον $-6x^2+9x-6$. Τὸ γινόμενον αὐτὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ Y_2 καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μηδέν.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον A διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ πο-

λυωνύμου Β καὶ δίδει ἕνα πηλίκον Π ἴσον μὲ $3x^2-5x-3$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν :

$$\frac{A}{B}=\Pi \quad \text{ἤ} \quad \frac{6x^4-19x^3+15x^2-x-6}{2x^2-3x+2}=3x^2-5x-3$$

$$\text{ἤ} \quad A=B\Pi \quad \text{ἤ} \quad 6x^4-19x^3+15x^2-x-6=(2x^2-3x+2)(3x^2-5x-3).$$

Διάταξις τῆς πράξεως :

	$A=\ 6x^4-19x^3+15x^2-x-6$	$2x^2-3x+2 \quad =B$
	$-6x^4+9x^3-6x^2$	$3x^2-5x-3 \quad =\Pi$
1ον ὑπόλοιπον	$0-10x^3+9x^2-x-6$	
	$+10x^3-15x^2+10x$	
2ον ὑπόλοιπον	$0-6x^2+9x-6$	
	$+6x^2-9x+6$	
3ον ὑπόλοιπον	0	

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A=2x^5-11x^4+3x^3+31x^2+2x+5$ διὰ τοῦ $B=2x^3-5x^2-4x+1$.

Διάταξις τῆς πράξεως :

	$A=\ 2x^5-11x^4+3x^3+31x^2+2x+5$	$2x^3-5x^2-4x+1 \quad =B$
	$-2x^5+5x^4+4x^3-x^2$	$x^2-3x-4 \quad =\Pi$
1ον ὑπόλοιπον	$-6x^4+7x^3+30x^2+2x+5$	
	$+6x^4-15x^3-12x^2+3x$	
2ον ὑπόλοιπον	$-8x^3+18x^2+5x+5$	
	$+8x^3-20x^2-16x+4$	
3ον ὑπόλοιπον	$-2x^2-11x+9$	

εὑρήκαμεν πηλίκον $\Pi=x^2-3x-4$ καὶ ὑπόλοιπον $-2x^2-11x+9$.

166. Παρατηρήσεις. I. *Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν οἱ ἄκροι ὅροι τοῦ διαιρετέου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι μὲ τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων ὅρων τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου.*

Π. χ. Εἰς τὸ παράδειγμα 1ον εἶναι

$$6x^4=2x^2\cdot 3x^2 \quad \text{καὶ} \quad -6=2\cdot(-3).$$

II. *Ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστου ὑπολοίπου ἐξαλείφεται.*

III. *Ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου Π εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου.*

Ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ Α εἶναι μ καὶ τοῦ Β εἶναι ν, ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου εἶναι μ—ν· ὑποθέτομεν πάντοτε, ὅτι μ>ν.

IV. Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι ἕνα ἐλλιπὲς πολυώνυμον, κατὰ τὴν διάταξιν τῶν πράξεων, ἀ φ ή ν ο μ ε ν χ ῶ ρ ο ν διὰ τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸν διαιρετέον.

Π. χ. Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $(x^4-y^4):(x-y)$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\qquad\qquad -y^4 & x-y \\
-x^4+x^3y & x^3+x^2y+xy^2+y^3 \\
\hline
\quad x^3y \qquad\qquad -y^4 & \\
\quad -x^3y+x^2y^2 & \\
\hline
\qquad x^2y^2 \qquad -y^4 & \\
\qquad -x^2y^2+xy^3 & \\
\hline
\qquad\quad xy^3 \quad -y^4 & \\
\qquad\quad -xy^3 \quad +y^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Ἀσκήσεις : *289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303.*

167. Διαίρεσις δύο πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις. Ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος γίνεται κατὰ τὸν κανόνα (§ 165) τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Τὸ πηλίκον ὅμως τῆς διαιρέσεως δύο τοιούτων πολυωνύμων δὲν εὑρίσκεται ποτὲ (ἀ τ έ ρ μ ω ν δ ι α ί ρ ε σ ι ς), ἐκτὸς ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A=6+19x+3x^2-19x^3+6x^4$ διὰ τοῦ πολυωνύμου $B=-3-5x+3x^2$.

Διάταξις τῶν πράξεων :

$$\begin{array}{ll|ll}
A= & 6+19x+3x^2-19x^3+6x^4 & -3-5x+3x^2 & =B \\
 & -6-10x+6x^2 & -2-3x+2x^2 & =\Pi \\
\hline
\text{1ον ὑπόλοιπον} & 9x+9x^2-19x^3+6x^4 & & \\
 & -9x-15x^2+9x^3 & & \\
\hline
\text{2ον ὑπόλοιπον} & -6x^2-10x^3+6x^4 & & \\
 & +6x^2+10x^3-6x^4 & & \\
\hline
\text{3ον ὑπόλοιπον} & 0 & &
\end{array}$$

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $A=4-3x+4x^2+5x^3$ διὰ τοῦ $B=1+2x-5x^2$.

Διάταξις τῶν πράξεων :

$$\begin{array}{ll|ll}
A= & 4-3x+4x^2+5x^3 & 1+2x-5x^2 & =B \\
 & -4-8x+20x^2 & 4-11x & =\Pi \\
\hline
\text{1ον ὑπόλοιπον} & -11x+24x^2+5x^3 & & \\
 & +11x+22x^2-55x^3 & & \\
\hline
\text{2ον ὑπόλοιπον} & 46x^2-50x^3 & &
\end{array}$$

Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον, ἀλλὰ συνήθως σταματῶμεν τὴν πρᾶξιν μετὰ τὴν χρησιμοποίησιν ὅλων τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα

$$4-3x+4x^2+5x^3=(1+2x-5x^2)(4-11x)+(46x^2-50x^3).$$

Ὅταν θέλωμεν τὸ πηλίκον νὰ εἶναι ν βαθμοῦ, τότε συνεχίζομεν τὴν διαίρεσιν.

Ἀσκήσεις : 304, 306, 307, 308, 309

Ἀσκήσεις

Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικῶν παραστάσεων :

Νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ κάτωθι μονώνυμα : (138).

153. 1 $3\alpha^2\beta\gamma\cdot5\alpha\beta^2\gamma^3\delta$ 2. $-5\alpha y^2\cdot(-4\alpha y^3)$
3. $-3\alpha^2xy\cdot(-2\alpha x^2)$

154. 1. $\left(-\frac{1}{2}x^3y\omega^2\right)\left(\frac{1}{3}x^2y^2\omega\right)$ 2. $\alpha^2\beta^3\cdot\alpha\beta\gamma$

155. 1. $-8\alpha\beta x\cdot(-\alpha^2\beta^3x^3)$ 2. $2\alpha\cdot\alpha\beta^2\cdot(-\alpha\gamma)$

156. $\left(-4xy^2\omega\right)\left(-\frac{3}{2}x^2y\right)\left(-5x^2y^3\omega\right)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις : (139)

157. 1. $(3\alpha\beta)^2$ 2. $(-2\alpha\beta^3)^3$ 3. $(-4\alpha\beta^2)^3$

158. 1. $(-3\alpha^2x^3y)^2$ 2. $(-9\alpha^3\beta x^4)^3$ 3. $(-4\alpha x^3y^2)^2$

159. 1. $\left(\frac{2}{5}\alpha^2\beta\gamma\right)^2$ 2. $\left(\frac{4}{3}\alpha^3\beta^2\gamma\right)^2$ 3. $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\omega\right)^4$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις : (140).

160. 1. $[(-2\alpha^2\beta\gamma^3)^2]^3$ 2. $[(2x^{\mu}y^{\nu}\omega^{\varrho})^2]^3$

161. 1. $\left[\left(-\frac{1}{2}\alpha^3\beta^2\gamma^4\right)^2\right]^4$ 2. $[(-x^{\alpha}y^{\beta}\omega^{\gamma})^{\mu}]^{\nu}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα : (141).

162 1. $(\alpha^2-\beta^2)\alpha\beta$ 2. $(x^2y-3xy^2)\cdot2xy$

163. 1. $-3xy^2\cdot(\alpha x^2-\beta xy+y^2)$ 2. $(3\alpha^2-5\alpha\beta-2\beta^2)\cdot(-5\alpha\beta)$

164. 1. $(3x^3-4x^2+1)\cdot(-3\alpha x^2]$ 2. $4\mu^2\nu^3\cdot(\mu^3-3\mu^2\nu+3\mu\nu^2)$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα : (142).

165. $\left(3\alpha x^3-\frac{4}{5}\beta x^2+\frac{1}{3}\gamma x\right)\cdot3\alpha\beta\gamma x$

166. $\left(\frac{4}{5}\alpha^2\gamma-\frac{1}{3}\beta\gamma^2+\frac{5}{4}\alpha\beta\gamma\right)\cdot\frac{3}{4}\alpha^2\beta\gamma$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων : (143).

167. $(2\alpha+3\beta)\cdot4\alpha-(3\alpha-8\beta)\cdot5\beta+(\alpha+2\beta)\cdot6\alpha$

168. $(3x^2-4x+1)\cdot(-5xy)-(2x^2+3x+4)\cdot2xy$

169. $4x(3x-2y)-(2x+3y)5y-2x(x+3y)$

170. $(2\alpha^3-3\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2)3\alpha\beta-(-\alpha\beta)(\alpha^3+5\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)$.

171. (144). Ἐὰν εἶναι $A=x^2+2xy+y^2$ $\quad \Gamma=3x^2+5xy+y^2$

$B=x^2-2xy+y^2$ $\quad \Delta=-x^2-3xy+2y^2$

νὰ ὑπολογισθοῦν:

1. $5A-3B+\Gamma$ 2. $5(A-3B+\Gamma)$

172. $2A-3\Gamma+2\Delta$

173. $2(A+B)-3(B-\Gamma)+4(\Gamma-A)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (145).

174. 1. $(3x-5)(2x+4)$ 2. $(2x+y)(3x+5y)$

175. 1. $(4xy-x^2)(xy+y^2)$ 2. $(2\alpha\beta-4\gamma)(5\gamma+\alpha\beta)$

176. 1. $(3\alpha\beta+1)(3-5\alpha\beta)$ 2. $(5\alpha^2-2\beta^2)(3\alpha^2+\beta^2)$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων: (146).

177. $(\alpha+\beta)(3\alpha-\beta)-(4\beta-\alpha)(2\alpha-\beta)-2\beta(2\alpha+\beta)$

178 $(2x+3y)(x-4y)-(x+5y)(-y-x)-3xy(x-y)$

179. $(x+1)(y-2)-(3y+4)(x-6)+2(x-6y)$

180. $(2x+3y)(3x-2y)-3(x^2-y^2)+4(x^2-xy+y^2)$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (147).

181. $(x+y)(3x-y)-[xy-x(2x-y)]$

182. $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma-\alpha)(\beta+\gamma)$

183. $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-2\alpha)+(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-2\beta)$.

Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ κάτωθι γινόμενα: (148).

184. 1. $(x+5)(x+4)$ 2. $(x-1)(x+8)$ 3. $(y-4)(y+2)$

185. 1. $(\alpha+10)(\alpha-11)$ 2. $(\beta+9)(\beta+5)$ 3. $(\omega-1)(\omega-7)$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (149).

186. $(x+2)(x+5)-(x+3)(x-7)+(x-8)(x-1)$

187. $(y+1)(y-7)+(y+8)(y-1)-(y+2)(y-9)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (150).

188. 1. $(5x^2-2xy-3y^2)(x^2-2xy)$ 2. $(8\alpha^3-4\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3)\cdot(2\alpha-3\beta)$

189. 1. $(9x^2+4\alpha x+\alpha^2)(5x-\alpha)$ 2. $(3x^2+4xy-5y^2)\cdot(2xy^2-5y^3)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (151).

190. $(3x^4-5x^3+2x^2-4x+2)(x^3-x^2+2x-1)$

191. $(3\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(-2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)$

192. $(1-2x^2+4x^3)\cdot(2-5x^2+4x)$

193. $(3\alpha x^3-5\alpha^2x^2+4\alpha^3x+\alpha^4)\cdot(2\alpha x^2-3\alpha^2x+\alpha^3)$

194. $\left(x^4-\frac{1}{2}x^3y+\frac{2}{3}x^2y^2-3xy^3+\frac{1}{2}y^4\right)\left(2x^3-4x^2y+\frac{1}{6}y^3\right)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα: (152).

195. 1. $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)$ 2. $(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$

196. $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$

197. $(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)(x+y)$

198. $(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x-y)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα: (153).

199. $(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2-y\omega-\omega x-xy)$

200. $(\alpha^{\nu}+3\alpha^{\nu-2}-2\alpha^{\nu-1})(2\alpha^{\nu+1}+\alpha^{\nu+2}-3\alpha^{\nu})$

201. $(x^{3\mu}+x^{2\mu}y^{\mu}+\beta x^{\mu-2}y^2)(x^{\nu}+\alpha x^{\nu-1}y-\beta x^{\nu-2}y^2)$

202. $(x^{\mu}y^{\nu-3}+x^{\mu-1}y^{\nu-2}+x^{\mu-2}y^{\nu-1}+x^{\mu-3}y^{\nu})(x^2-y^2)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα : (154).

203. 1. $(x-5)(x-3)(x-8)$ 2. $(x+2)(x+7)(x+10)$

204 1. $(y+\omega)(\omega+x)(x+y)$ 2. $(x^2-y^2)(y^2-\omega^2)(\omega^2-x^2)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ γινόμενα : (155).

205. 1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-1)$ 2. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

206. 1. $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)$ 2. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

207. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον τῶν πολυωνύμων : (343).

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta-\gamma\delta$ ἐπὶ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$·

Ἀξιοσημείωτοι **πολλαπλασιασμοί** :

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα : (156).

208 1. $(\mu+\nu)^2$ 2. $(\alpha+8)^2$ 3. $(2\mu+\nu)^2$

209. 1. $(5\alpha+3\beta)^2$ 2. $(15+3x)^2$ 3. $(3\alpha^2\beta+4)^2$

210. 1. $(\alpha+x^2y)^2$ 2. $(4\alpha^3+5\beta\gamma)^2$ 3. $(1+3\alpha^2\beta^2)^2$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα : (157).

211. 1 $\left(\frac{\mu}{3}+1\right)^2$ 2. $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)^2$ 3. $\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{5}{3}y\right)^2$

212. 1. $\left(\frac{4}{5}\alpha^2\beta+\frac{2}{3}\gamma\right)^2$ 2. $\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}xy\right)^2$ 3. $\left(\frac{1}{2}\alpha x+\frac{5}{3}\alpha y\right)^2$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα : (158).

213. 1. $(\beta-2)^2$ 2. $(2\alpha-1)^2$ 3. $(9-5x)^2$

214. 1. $(3x-7y)^2$ 2. $(5\alpha x-8\beta y)^2$ 3. $(\alpha\beta-\gamma\delta)^2$

215. 1. $(2\alpha^3-3\alpha^2\beta)^2$ 2. $(x^2-y^2)^2$ 3. $(7\alpha x-8\beta y^2)^2$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα : (159).

216. 1. $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ 2. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}\right)^2$ 3. $\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2$

217. 1. $\left(\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}\omega\right)^2$ 2. $\left(\frac{4}{3}\alpha\beta^2-\gamma\right)^2$ 3. $\left(\frac{1}{4}\alpha^2x-\frac{1}{5}\right)^2$

218. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τετράγωνα τῶν κάτωθι ἀριθμῶν (§ 149). (160).

1. 21^2 2. 52^2 3. 71^2 4. 91^2.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων : (161).

219. $(3x+4y)^2-(5y-2x)^2-3(x-y)^2$

220. $(2\alpha-3\beta)^2-(4\alpha-5\beta)^2-(3\alpha+5\beta)(\alpha-7\beta)$

221. $2(\alpha+3\beta)^2-3(\beta-5\alpha)^2+4(\alpha+\beta)(\alpha-3\beta)$

222. $(2x+5y)(x-3y)-(x+2y)^2-5x(x+y)$

223. $(\alpha-\beta)^2(x-y)+(\alpha-x)^2(y-\beta)+(\alpha-y)^2(\beta-x)$.

224. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$: (162).

1. ἐὰν $\alpha=\lambda+1$, $\beta=2\lambda+3$, $\gamma=\lambda-1$

2. » $\alpha=2\lambda+1$, $\beta=\lambda-5$, $\gamma=3\lambda-2$

3. » $\alpha=3\mu-2$, $\beta=3-\mu$, $\gamma=-2\mu-1$.

Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις δίδονται οἱ δύο ὅροι τοῦ τετραγώνου ἑνὸς διωνύμου· νὰ εὑρεθῇ ὁ τρίτος ὅρος : (163).

225. 1. $\mu^2+2\mu\nu$ 2. $4x^2+12\alpha x$ 3. $25y^2-40y\omega$

226. 1. $49x^2+4y^2$ 2. $81\alpha^2+49\beta^2$ 3. $x^2+\beta x$

227. 1. $\mu^2-8\mu$ 2. $4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x$ 3. $1-2\alpha\mu$.

228. 1. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy$ 2. $\frac{9}{4}x^2+\frac{5}{2}\alpha\beta$ 3. $\frac{9}{16}\alpha^2+\frac{1}{9}\beta^2$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα: (164).

229. 1. $(\alpha+3)(\alpha-3)$ 2. $(2x+1)(2x-1)$ 3. $(5x-y)(5x+y)$

230. 1. $(1+\alpha\beta)(1-\alpha\beta)$ 2. $(\alpha-\beta^2)(\alpha+\beta^2)$ 3. $(\mu^3-\nu^2)(\mu^3+\nu^2)$

231. 1. $(3\alpha x+5\beta y)(3\alpha x-5\beta y)$ 2. $(\alpha x^2+2\alpha^2 y)(\alpha x^2-2\alpha^2 y)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα: (165).

232. 1. $\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{5}\right)$ 2. $\left(1+\frac{3}{5}\alpha\right)\left(1-\frac{3}{5}\alpha\right)$

233. 1. $\left(\frac{2}{3}\alpha x+\frac{1}{4}y\right)\left(\frac{2}{3}\alpha x-\frac{1}{4}y\right)$

2. $\left(\frac{1}{2}xy-1\right)\left(\frac{1}{2}xy+1\right)$

234. 1. $\left(\frac{2}{7}\alpha\beta-3\gamma\right)\left(3\gamma+\frac{2}{7}\alpha\beta\right)$

2. $\left(\frac{1}{6}\alpha^2\beta+\frac{1}{3}\beta^2\gamma\right)\left(\frac{1}{6}\alpha^2\beta-\frac{1}{3}\beta^2\gamma\right)$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (166).

235. 1. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)$ 2. $(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)$

236. 1. $(x+y+5)(x-y+5)$ 2. $(3\alpha+\beta-8)(3\alpha+\beta+8)$

237. 1. $(\alpha^2+2\alpha+5)(\alpha^2+2\alpha-5)$ 2. $(x+y+\alpha+\beta)(x+y-\alpha-\beta)$

238. 1. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 2. $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

239. 1. $(\alpha^2+\beta+\alpha\sqrt{2})(\alpha^2-\alpha\sqrt{2}+\beta)$ 2. $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων: (167).

240. $(3\alpha+4\beta)(3\alpha-4\beta)-(\beta-5\alpha)(\beta+5\alpha)$

241. $(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2+(\mu+\nu)(\mu-\nu)$

242. $(3x+y)^2-(2y-5x)^2-(4x+y)(4x-y)$

243. $3(\alpha-2x)^2+2(\alpha-2x)(\alpha+2x)+(3x-\alpha)(3x+\alpha)-(2\alpha-3x)^2$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις κλπ. (168).

244. $(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$

245. $(x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)$

246. $(x+\alpha)(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\beta^2)(x^2-\alpha x+\beta^2)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα: (169).

247. 1. $(\mu+\nu)^3$ 2. $(x+1)^3$ 3. $(y+5)^3$

248. 1. $(x-4)^3$ 2. $(2x+1)^3$ 3. $(3\alpha x+\beta y)^3$

249. 1. $(3x+4y)^3$ 2. $(2\alpha\beta-3\beta\gamma)^3$ 3. $(2xy-3x^2y)^3$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων: (170).

250. $(3x-5)^3+(x-2)(x+2)(3x+1)-2x(3x-5)^2$.

251. $(x+y)^3+(x-y)^3+3(x+y)(x-y)^2+3(x-y)(x+y)^2$.

Νὰ ἀναπτυχθοῦν: (171).

252. 1. $(\alpha+\beta-\gamma)^2$ 2. $(x-y+\omega)^2$

253. 1. $(\alpha+\beta-2\gamma)^2$ 2. $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$.

Νὰ ἀναπτυχθοῦν: (172).

254. 1. $(2\alpha-3\beta+4\gamma)^2$ 2. $(3x^2-4x+2)^2$

255. 1. $(5x^3-2x^2-4x-1)^2$ 2. $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)^2$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις : (173).

256. $(1+2x-3y)^2-(3y-2x-1)^2$

257. $8(x-1)^3+4(x-1)^2+(x^2-4x+2)^2-(x^4-x^2+1)$

258. $\alpha(\beta+\gamma-\alpha)^2+\beta(\gamma+\alpha-\beta)^2+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$

259. $(2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)^2-4(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2)$

260. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

261. $(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta)^2-(\beta\gamma-\alpha\delta)(\gamma\alpha-\beta\delta)(\alpha\beta-\gamma\delta)$.

Νὰ ἀναπτυχθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις : (174).

262. 1. $(x-\alpha)^4$ 2. $(x\pm\alpha)^6$

263. 1. $(x\pm\alpha)^7$ 2. $(x+\alpha)^8$.

264. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις : (175).

$$(\alpha+\beta)^4-2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2(\alpha^4+\beta^4).$$

Νὰ ἀναπτυχθοῦν καὶ νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (176)

265. 1. $(2x+1)^3+(2x-1)^3$ 2. $(3x+2)^3-(3x-2)^3$

266. $(x+y+\omega)^3-(y+\omega-x)^3-(\omega+x-y)^3-(x+y-\omega)^3$.

Διαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων :

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν κάτωθι μονωνύμων : (177).

267. 1. $6x^5 : 2x^2$ 2. $12x^{10}\ (-4x^6)$ 3. $27y^8 : 9y^3$

268. 1. $(-12x^6) : 3x^4$ 2. $(-3xy) : (-xy)$ 3. $4\alpha\beta^3 : (-2\alpha\beta)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα : (178).

269. 1. $2x^3y^3 : (-xy^3)$ 2. $10x^4y^3 : (-5x^3y)$

270. 1. $6\alpha^4\beta^5\gamma^3 : 3\alpha^3\beta^3$ 2. $12x^5y^3\omega^4 : (-4x^3y\omega^2)$

271. 1. $(-9x^4y^3\omega) : (-x^3y^3)$ 2. $(-18x^3y^3\omega^3) : (-6x^2y^2\omega^2)$

272 1. $(-8\alpha^3\beta^5\gamma^6) : (2\alpha^3\beta^3\gamma^3)$ 2. $(-24\alpha^3\beta^3x^4y) : (-8\alpha\beta^2x^3y)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι μονωνύμων : (179).

273. 1. $\dfrac{3\alpha^4\beta^2\gamma^5}{12\alpha^4\beta^2\gamma^3}$ 2. $\dfrac{-24x^3y^2\omega^4}{18xy^3\omega^3}$

274. 1. $\dfrac{-7x^3y^4}{-3x^2y^4\omega}$ 2. $\dfrac{5\alpha\beta\gamma}{7\alpha^2\beta x}$

275. 1. $\dfrac{-9\alpha^3\beta xy}{-3\alpha^3\beta^2\omega}$ 2 $\dfrac{4\alpha^3\beta^3\gamma^2}{5\alpha^4\beta}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα : (180).

276 $12x^{\mu-1}y^{\nu+3}\omega : (3x^{\mu-1}y^{\nu+1})$

277. $-\dfrac{3}{4}\alpha^{\mu+2}\beta^{\nu-5}\gamma^{\rho} : \dfrac{7}{9}\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu-3}\gamma$.

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (181).

278. $(6x^5-4x^4+8x^3+10x^2) : 2x^2$

279. $(4\alpha^4\beta^3-12\alpha^3\beta^4+8\alpha^2\beta^5) : (-4\alpha^2\beta^3)$

280. $(40\alpha x^4+32\alpha^2x^3-48\alpha^3x^2-24\alpha^4x) : (-8\alpha x)$

281. $(54\alpha^4x^3y^2-27\alpha^3x^3y^3+36\alpha^4x^2y^3) : (-9\alpha^2xy)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι πηλίκα : (182).

282. 1. $\frac{8x^4-6x^3+4x^2+8x-2}{2x^2}$ 2. $\frac{2x^2-3y^2+\omega^2}{\alpha y\omega}$

283. 1. $\frac{5x^3y^2\omega+12x^2y^3\omega^3-3xy^3\omega^2}{-5x^2y\omega^2}$ 2. $\frac{3\alpha^2-4\beta^2+5\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$.

284. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον : (183).

$$(3\alpha^{\mu}\beta^{\nu-1}\gamma^{\lambda-2}x-7\alpha^5\beta^3\gamma^6+\frac{15}{4}\alpha^{2\mu}\beta^{\nu-1}\gamma^{\lambda+2}\omega):(-3\alpha^{3-\mu}\beta^5\gamma^4).$$

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (184).

285. 1. $\alpha\beta+\beta\gamma$ 2. $2\beta+\beta^2$ 3. $6\alpha^2\beta-4\alpha\beta$

286. 1. $9\alpha\beta^3+3\alpha\beta^2$ 2. $5x^4-10x^3$ 3. $4\mu\nu-16\mu^2\nu$

287. 1. $15\alpha x^2-5\alpha x$ 2. $21-27y$ 3. $54+81\alpha\beta$

288. 1. $16\alpha^2\beta^3-4\alpha^3\beta^2$ 2. $13x^3y^2-39x^4y^2$ 3. $\alpha^2\beta^2\gamma-4\alpha^3\beta\gamma$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων : (185).

289. $(35x^3+47x^2+13x+1):(5x+1)$

290. $(5x^6+15x^5+5x+15):(x+3)$

291. $(-6x^3+2x^4-3x+3x^2+1):(-3x+x^2+1)$

292. $(2x^5+6x^4-23x^3+2x^2+16x-3):(x^2+5x-1)$

293. $6x^5-25x^3+5x^4-13x+31x^2+2):(2x^2-3x+2)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων : (186).

294. 1. $(x^4-1):(x+1)$ 2. $(x^6-1):(x-1)$

295. $(\alpha^4+\alpha^2+1):(\alpha^2+1-\alpha)$

296. $(49x^3-72xy^2+27y^3):(7x-3y)$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα τῶν πολυωνύμων : (187).

297. $(x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega):(x+y+\omega)$

298. $\frac{x^3(y-\omega)+y^3(\omega-x)+\omega^3(x-y)}{x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)}$

299. $\frac{-x^4+(\alpha^2-\alpha)x^3+(\alpha^3+3\alpha)x^2+(-\alpha^3+2\alpha^2)x-2\alpha^2}{-x^2+\alpha^2x+2\alpha}$

300. $(\alpha^{8\mu}-\beta^{8\nu}):(\alpha^{5\mu}-\beta^{5\nu}+\alpha^{\mu}\beta^{4\nu}-\alpha^{4\mu}\beta^{\nu})$.

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (188).

301. $(6x^4-4x^3y+3x^2y^2-7xy^3+4y^4):(3x^2-5xy+2y^2)$

302. $(60\alpha^3\beta^2-5\alpha^2\beta^3+15\alpha^5-61\alpha^4\beta-35\alpha\beta^4-4\beta^5):(3\alpha^2-\beta^2-8\alpha\beta)$

303. $[x^4(x-5y)+x^2y^2(7x-y)-2y^4(2x-y)]:[x^2(x-3y)-y^2(y-3x)]$.

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (189).

304. $(4+3x^2+x^4):(1+x^2)$

305. $(-1+\alpha-4\alpha^2+4\alpha^3+6\alpha^4+\alpha^5):(-1+\alpha+\alpha^2)$

306. Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις : (190).

τοῦ $x^4+[4\alpha^2-3(\alpha+\beta)]x^3-12\alpha^2(\alpha+\beta)x^2+[4\alpha^2+3(\alpha+\beta)]\gamma^2x-\gamma^4$

διὰ τοῦ $x^2+4\alpha^2x-\gamma^2$.

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον τῶν πολυωνύμων :

307. $[x^2(y+\omega)-y^2(x-\omega)+\omega^2(x-y)-xy\omega]:[x(y+\omega)-y\omega]$

308. $[\gamma^2(2\alpha\beta-\alpha^2)-\beta^2(2\alpha\gamma+\beta^2)+\alpha^2\beta^2+\gamma^4]:[\beta^2+\alpha(\beta+\gamma)+\gamma^2]$

309.(344). $[x^4(y^2-\omega^2)+y^4(\omega^2-x^2)+\omega^4(x^2-y^2)]:[x^2(y-\omega)+y^2(\omega-x)+\omega^2(x-y)]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

---

1. Διαίρεσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x δι' ἑνὸς διωνύμου τῆς μορφῆς x±α

168. **Συμβολικὴ παράστασις ἑνὸς πολυωνύμου.** Ἕνα ἀκέραιον (§ 124) πολυώνυμον τοῦ x παρίσταται συνήθως μὲ τὸ σύμβολον Π(x) (τὸ ὁποῖον ἐκφωνεῖται Π τοῦ x) ἢ μὲ φ(x) ἢ σ(x) ἢ f(x), κλπ. δηλ. γράφομεν π.χ. $Π(x)=αx^2+βx+γ$.

Τὸ γράμμα x, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε ἀριθμητικὴν τιμήν, λέγεται μ ε τ α β λ η τ ή.

Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, βαθμοῦ μ καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, ἔχει τὴν μορφήν :

$$\mathbf{A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_{\mu}}$$

Οἱ συντελεσταὶ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, θετικοί, ἀρνητικοὶ ἢ μηδέν.

Ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον Π(x) ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ μίαν δοθεῖσαν τιμὴν ξ, τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον Π(ξ).

Π. χ. Ἐὰν εἶναι $Π(x)=2x^3-10x^2+8x-5$

θὰ εἶναι $Π(1)=2\cdot1^3-10\cdot1^2+8\cdot1-5=-5$

$Π(2)=2\cdot2^3-10\cdot2^2+8\cdot2-5=-13$

$Π(-3)=2\cdot(-3)^3-10\cdot(-3)^2+8\cdot(-3)-5=-173.$

Ἀσκήσεις : 310, 311, 312, 313.

169. **Διαιρετότης διὰ x—α. Θεώρημα.** ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x διὰ τοῦ διωνύμου τῆς μορφῆς x—α, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ x διὰ τοῦ α.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω φ(x) ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ φ(x) διὰ τοῦ x—α εἶναι ἴσον μὲ φ(α).

Ἀπόδειξις: Ἔστω π(x) τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ φ(x) διὰ (x—α) καὶ Υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς. Τὸ ὑπόλοιπον Υ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x, δηλ. τὸ Υ δὲν θὰ περιέχῃ τὸ x, διότι ὁ διαιρέτης (x—α) εἶναι πρώτου βαθμοῦ καὶ ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ πρώτου, δηλ. μηδενικοῦ βαθμοῦ.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$\varphi(x)\equiv(x-\alpha)\cdot\pi(x)+Y \qquad (1)$$

Ἡ ταυτότης (1) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x· ἄρα ἀληθεύει καὶ διὰ x=α. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ x μὲ τὸ α λαμβάνομεν

$$\varphi(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot\pi(\alpha)+Y$$

$$\text{ἢ}\quad \varphi(\alpha)=0\cdot\pi(\alpha)+Y$$

$$\text{ἢ}\quad \varphi(\alpha)=Y.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως....***

Παράδειγμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$$\varphi(x)=5x^2-4x-20 \quad \text{διὰ} \quad x-3$$

εἶναι $\varphi(3)=5\cdot3^2-4\cdot3-20=5\cdot9-4\cdot3-20=45-12-20=13.$

170. Πόρισμα. ***Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον φ(x) διαιρετὸν διὰ x—α εἶναι νὰ μηδενίζεται τὸ πολυώνυμον, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ α.***

Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία· διότι, διὰ νὰ εἶναι τὸ πολυώνυμον φ(x) διαιρετὸν διὰ x—α, πρέπει τὸ ὑπόλοιπον Υ νὰ εἶναι μηδέν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι φ(α)=0.

Ἡ συνθήκη εἶναι ἱκανή· διότι, ἐὰν φ(α)=0, τὸ ὑπόλοιπον Υ εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως τὸ πολυώνυμον φ(x) εἶναι διαιρετὸν διὰ x—α.

Σημ. Ἡ ἔκφρασις: ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἐκφράζεται ἁπλούστερον: πρέπει καὶ ἀρκεῖ.

Π. χ. τὸ ἀνωτέρω πόρισμα ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x διαιρετὸν διὰ x—α, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ πολυώνυμον νὰ μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ α.

171. **Διαιρετότης διὰ x+α.** Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι x+α=x—(—α) συνάγομεν, ὅτι:

I. ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου***

τοῦ x διὰ $x+\alpha$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ x διὰ τοῦ $-\alpha$.

ΙΙ. ***Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$, εἶναι νὰ μηδενίζεται τὸ πολυώνυμον, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ $-\alpha$.***

Παράδειγμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$$\varphi(x)=3x^3-5x^2+4x+8 \quad \text{διὰ} \quad x+2$$

εἶναι

$$\begin{aligned}\varphi(-2)&=3\cdot(-2)^3-5\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+8\\&=3\cdot(-8)-5\cdot 4+4\cdot(-2)+8\\&=-24-20-8+8=-44.\end{aligned}$$

172. **Διαιρετότης διὰ $\alpha x+\beta$, ὅπου $\alpha\neq 0$.** Ἔστω, ὅτι ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διὰ $(\alpha x+\beta)$ δίδει πηλίκον $\pi(x)$ καὶ ὑπόλοιπον Υ, ὅπου τὸ Υ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x, δηλ. εἶναι ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός.

Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)=(\alpha x+\beta)\cdot\pi(x)+Y. \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\quad x=-\dfrac{\beta}{\alpha},$

ἡ (1) γίνεται $\quad \varphi\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=0\cdot\pi(x)+Y$

ἢ $\quad \varphi\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=Y.$

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι :

Ι. ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x διὰ $\alpha x+\beta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προκύπτει, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ x διὰ τοῦ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.***

ΙΙ. ***Διὰ νὰ εἶναι ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρετὸν διὰ $\alpha x+\beta$, πρέπει νὰ ἀρκεῖ τὸ πολυώνυμον νὰ μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ $\varphi(x)$ τὸ x διὰ τοῦ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.***

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθοῦν, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)=x^3-4x^2+5x-6$ διὰ $x-2$, διὰ $x+2$ καὶ διὰ $4x+1$.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x-2$ εἶναι

$$\varphi(2)=2^3-4\cdot 2^2+5\cdot 2-6=8-16+10-6=-4.$$

Διὰ $x+2$ εἶναι

$$\varphi(-2)=(-2)^3-4\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-6=-8-16-10-6=-40.$$

Διὰ $4x+1$ εἶναι

$$\varphi\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)^3-4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-6.$$

$$=-\frac{1}{64}-4\cdot\frac{1}{16}-\frac{5}{4}-6=-\frac{481}{64}.$$

Ἀσκήσεις : 314, 316, 318.

173. Ἐφαρμογαί. Τὰ προηγούμενα θεωρήματα μᾶς ἐπιτρέπουν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου τοῦ x δι' ἑνὸς διωνύμου τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ νὰ εὑρίσκωμεν εἰς ποίας περιπτώσεις ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=3x^2-11x+10$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-2$.

Γνωρίζομεν (§ 170), ὅτι διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ διὰ τοῦ $x-2$, πρέπει τὸ $\varphi(2)$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν· ἐδῶ εἶναι

$$\varphi(2)=3\cdot2^2-11\cdot2+10=12-22+10=0.$$

Ἐπειδὴ $\varphi(2)=0$, τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-2$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y+\omega$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

Ἐὰν θέσωμεν τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὴν μορφὴν $x+(y+\omega)$, τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+(y+\omega)$, ἐὰν μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ $-(y+\omega)$· ἔχομεν

$$\varphi[-(y+\omega)]=[-(y+\omega)]^3+y^3+\omega^3-3y\omega[-(y+\omega)]$$

$$=-y^3-3y^2\omega-3y\omega^2-\omega^3+y^3+\omega^3+3y^2\omega+3y\omega^2=0.$$

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν, τὸ πολυώνυμον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y+\omega$.

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ διὰ τοῦ $x+y+\omega$ εὑρίσκομεν πηλίκον $x^2+y^2+\omega^2-xy-x\omega-y\omega$.

Ἄρα θὰ εἶναι :

$$x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega=(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2-xy-x\omega-y\omega).$$

Ἐπειδὴ ἀκόμη εἶναι

$$x^2+y^2+\omega^2-xy-x\omega-y\omega=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-\omega)^2+(\omega-x)^2]$$

ὅπως δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega=\frac{1}{2}(x+y+\omega)[(x-y)^2+(y-\omega)^2+(\omega-x)^2].$$

Ἀσκήσεις : 320, 321, 322, 323, 324.

★ 174. Νόμος σχηματισμοῦ τοῦ πηλίκου ἑνὸς πολυωνύμου τοῦ x διὰ x—α. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x

$$\varphi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}x+A_\mu$$

διὰ τοῦ διωνύμου $x-\alpha$.

Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ $A_0, A_1, A_2, \ldots A_\mu$ εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ **x**.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ἐφαρμόζομεν τὸν κάτωθι κανόνα, τὸν ὁποῖον θὰ δικαιολογήσωμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον.

Κανών: *Ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου εἶναι A_0, ἴσος μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου.*

Ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ πηλίκου, $A_1+A_0\alpha$, εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν προηγούμενον ὅρον τοῦ πηλίκου ἐπὶ α καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν συντελεστὴν A_1 τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ διαιρετέου.

Ὁμοίως ὁ συντελεστὴς τοῦ τρίτου ὅρου τοῦ πηλίκου

$$A_2+A_1\alpha+A_0\alpha^2,$$

εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α τὸν συντελεστὴν $A_1+A_0\alpha$ τοῦ προηγουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον αὐτὸ τὸν συντελεστὴν τοῦ τρίτου ὅρου τοῦ διαιρετέου καὶ οὕτω καθεξῆς.

Οὕτω, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $B_0, B_1, B_2, \ldots$ τοὺς συντελεστὰς τῶν ὅρων βαθμοῦ $\mu-1, \mu-2, \mu-3, \ldots$ τοῦ πηλίκου, ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ τῶν συντελεστῶν αὐτῶν ὁρίζεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον κανόνα καὶ ἐπίσης ἀπὸ τοὺς κατωτέρω τύπους :

$$B_0=A_0$$
$$B_1=B_0\alpha+A_1=A_0\alpha+A_1$$
$$B_2=B_1\alpha+A_2=A_0\alpha^2+A_1\alpha+A_2$$
$$B_3=B_2\alpha+A_3=A_0\alpha^3+A_1\alpha^2+A_2\alpha+A_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{\mu-1}=B_{\mu-2}\alpha+A_{\mu-1}=A_0\alpha^{\mu-1}+A_1\alpha^{\mu-2}+A_2\alpha^{\mu-3}+\ldots$$
$$+A_{\mu-2}\alpha+A_{\mu-1}.$$

Παρατήρησις. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x-\alpha$

εἶναι $$B_{\mu-1}\alpha+A_\mu$$

ἤ $$A_0\alpha^\mu+A_1\alpha^{\mu-1}+A_2\alpha^{\mu-2}+\ldots+A_{\mu-1}\alpha+A_\mu,$$

δηλ. εἶναι ἡ τιμή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ δοθὲν πολυώνυμον $\varphi(x)$, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ α· δηλ. ἔχομεν μίαν νέαν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῆς § 169.

Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι πολυώνυμον ἐλλιπές, θὰ συμπληρώνεται, ὥστε νὰ περιέχῃ ὅλας τὰς δυνάμεις τοῦ γράμματος διαιρέσεως, κατὰ τὴν § 129.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$$3x^4-5x^3+2x^2-6x+1 \quad \text{διὰ} \quad x-4.$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα

Ὁ συντελεστὴς τοῦ x^3	εἶναι	$B_0=A_0=3$
» » » x^2	»	$B_1=B_0\alpha+A_1=3\cdot4-5=7$
» » » x	»	$B_2=B_1\alpha+A_2=7\cdot4+2=30$
» » » σταθεροῦ ὅρου	»	$B_3=B_2\alpha+A_3=30\cdot4-6=114$
Τὸ ὑπόλοιπον	»	$114\cdot4+1==457$
Ὥστε τὸ πηλίκον	»	$3x^3+7x^2+30x+114$
καὶ τὸ ὑπόλοιπον	»	457.

Σημ. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι $x+\alpha$ ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τῆς § 174 μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι ἀντὶ α πρέπει νὰ θέτωμεν $-\alpha$.

2. Ἀξιοσημείωτα πηλίκα

175. Πηλίκα τῶν διαιρέσεων $(x^\mu\pm\alpha^\mu):(x\pm\alpha)$. I. ***Πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^\mu-\alpha^\mu):(x-\alpha)$.*** Τὸ διώνυμον $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διὰ $x-\alpha$ εἶναι

$$\varphi(\alpha)=\alpha^\mu-\alpha^\mu=0, \quad \text{διὰ κάθε τιμὴν τοῦ } \mu.$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^\mu-\alpha^\mu$ διὰ $x-\alpha$, εὑρίσκομεν πηλίκον

$$\pi(x)=x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\alpha^3x^{\mu-4}+\dots+\alpha^{\mu-1}.$$

Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(x^\mu-\alpha^\mu)=(x-\alpha)(x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\dots+\alpha^{\mu-1})$$

ἤ

$$\boxed{\frac{x^\mu-\alpha^\mu}{x-\alpha}=x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\dots+\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}}$$

Π. χ. $(x^3-\alpha^3):(x-\alpha)=x^2+\alpha x+\alpha^2$ ἄρα

$$\boxed{x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)}$$

$(x^4-\alpha^4):(x-\alpha)=x^3+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3$ ἄρα

$$\boxed{x^4-\alpha^4=(x-\alpha)(x^3+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3)}$$

II. ***Πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^\mu-\alpha^\mu):(x+\alpha)$.*** Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^\mu-\alpha^\mu$ διὰ τοῦ $x+\alpha$ εἶναι

$$\varphi(-\alpha)=(-\alpha)^\mu-\alpha^\mu. \qquad (1)$$

1ον Ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\varphi(-\alpha)=\alpha^\mu-\alpha^\mu=0.$

Ἐὰν λοιπὸν μ ἄρτιος, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως τὸ $x^\mu - \alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$ καὶ δίδει πηλίκον

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-2}x-\alpha^{\mu-1}.$$

Ἄρα ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος, θὰ εἶναι

$$\boxed{(x^\mu-\alpha^\mu)=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-2}x-\alpha^{\mu-1})}$$

ἢ

$$\boxed{\frac{x^\mu-\alpha^\mu}{x+\alpha}=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-2}x-\alpha^{\mu-1}}$$

Π. χ. $(x^4-\alpha^4):(x+\alpha)=x^3-\alpha x^2+\alpha^2x-\alpha^3$.

2ον. Ἐὰν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=-\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\varphi(-\alpha)=-\alpha^\mu-\alpha^\mu=-2\alpha^\mu$.

Ἐὰν λοιπὸν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(-\alpha)$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$. Τὸ πηλίκον εἶναι:

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}.$$

Π. χ. $(x^3-\alpha^3):(x+\alpha)$ δίδει πηλίκον $x^2-\alpha x+\alpha^2$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\alpha^3$.

III. *Πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^\mu+\alpha^\mu):(x+\alpha)$*. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^\mu+\alpha^\mu$ διὰ $x+\alpha$ εἶναι

$$\varphi(-\alpha)=(-\alpha)^\mu+\alpha^\mu \qquad (1)$$

1ον. Ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=+\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\varphi(-\alpha)=+\alpha^\mu+\alpha^\mu=+2\alpha^\mu$.

Ὥστε: *ἐὰν μ εἶναι ἄρτιος*, τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(-\alpha)$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἑπομένως τὸ $x^\mu+\alpha^\mu$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$. Τὸ πηλίκον εἶναι

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-2}x-\alpha^{\mu-1}.$$

Π. χ. Ἡ διαίρεσις $(x^4+\alpha^4):(x+\alpha)$ δίδει πηλίκον $x^3-\alpha x^2+\alpha^2x-\alpha^3$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^4$.

2ον. Ἐὰν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $(-\alpha)^\mu=-\alpha^\mu$ καὶ ἡ (1) γίνεται $\varphi(-\alpha)=-\alpha^\mu+\alpha^\mu=0$.

Ὥστε: *ἐὰν ὁ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός*, τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(-\alpha)$ εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως τὸ $x^\mu+\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$.

Τὸ πηλίκον $\pi(x)$ εἶναι

$$\pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}.$$

Ὥστε, ἐὰν μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι

$$(x^\mu+\alpha^\mu)=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{\mu-1})$$

ἢ
$$\frac{x^\mu+\alpha^\mu}{x+\alpha}=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{\mu-1}$$

Π. χ. $(x^3+\alpha^3):(x+\alpha)=x^2-\alpha x+\alpha^2$, ἄρα

$$x^3+\alpha^3=(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)$$

IV. ***Πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^\mu+\alpha^\mu):(x-\alpha)$*** Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^\mu+\alpha^\mu$ διὰ τοῦ $x-\alpha$ εἶναι

$$\varphi(\alpha)=\alpha^\mu+\alpha^\mu=2\alpha^\mu.$$

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $\varphi(\alpha)$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, δι᾿ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ μ, ἔπεται, ὅτι τὸ $x^\mu+\alpha^\mu$ δὲν εἶναι ποτὲ διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$.

Π. χ. Ἡ διαίρεσις $(x^\mu+\alpha^\mu):(x-\alpha)$ δίδει πηλίκον $x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^\mu$.

Ἀσκήσεις : 325, 327, 328, 330, 331, 333, 335, 338, 339.

3. * Διαίρεσις ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x δι᾿ ἑνὸς γινομένου διωνύμων παραγόντων

176. Διαίρεσις διὰ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$ Θεώρημα. ***Ὅταν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν, χωριστά, διὰ τῶν διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ὅπου α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των, τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.***

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$, θὰ δίδη ἕνα πηλίκον $\pi_1(x)$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)=(x-\alpha)\cdot\pi_1(x) \qquad (1)$$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ $x=\beta$· ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὸ x μὲ β, λαμβάνομεν

$$\varphi(\beta)=(\beta-\alpha)\cdot\pi_1(\beta) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x-\beta$, θὰ εἶναι $\varphi(\beta)=0$ καὶ ἑπομένως ἡ (2) γράφεται $0=(\beta-\alpha)\cdot\pi_1(\beta)$.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον $(\beta-\alpha)\cdot\pi_1(\beta)$ ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει (§ 56. I) ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντάς του νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν· ἀλλὰ ὁ παράγων $\beta-\alpha$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, διότι ἐξ ὑποθέ-

σεως $\beta \neq \alpha$· ἄρα θὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν ὁ ἄλλος παράγων $\pi_1(\beta)$, δηλ. θὰ εἶναι $\pi_1(\beta)=0$.

Ἐπειδὴ $\pi_1(\beta)=0$, τὸ πολυώνυμον $\pi_1(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\beta$ καὶ ἔστω, ὅτι δίδει ἕνα πηλίκον $\pi_2(x)$. Θὰ ἔχωμεν τότε τὴν ταυτότητα

$$\pi_1(x)=(x-\beta)\cdot\pi_2(x).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\pi_1(x)$ μὲ τὸ ἴσον του $(x-\beta)\cdot\pi_2(x)$ καὶ ἔχομεν

$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot\pi_2(x) \qquad (3)$$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ ὑφίσταται διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ $x=\gamma$· ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (3) τὸ x διὰ τοῦ γ, θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\cdot\pi_2(\gamma) \qquad (4)$$

Ἀλλὰ $\varphi(\gamma)=0$, διότι τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\gamma$· ἐπομένως ἡ (4) γράφεται $\quad 0=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\cdot\pi_2(\gamma)$.

Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\cdot\pi_2(\gamma)$ ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντας νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν· ἀλλ' οἱ παράγοντες $(\gamma-\alpha)$, $(\gamma-\beta)$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha \neq \beta \neq \gamma$· ἄρα θὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν ὁ τρίτος παράγων $\pi_2(\gamma)$, δηλ. θὰ εἶναι $\pi_2(\gamma)=0$.

Ἐπειδὴ $\pi_2(\gamma)=0$, τὸ πολυώνυμον $\pi_2(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\gamma$ καὶ ἔστω, ὅτι δίδει ἕνα πηλίκον $\pi_3(x)$· θὰ ἔχωμεν τότε τὴν ταυτότητα

$$\pi_2(x)=(x-\gamma)\cdot\pi_3(x).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (3) τὸ $\pi_2(x)$ μὲ τὸ ἴσον του $(x-\gamma)\cdot\pi_3(x)$ καὶ ἔχομεν $\quad \varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdot\pi_3(x)$.

Ἡ τελευταία ταυτότης δεικνύει, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ καὶ δίδει πηλίκον $\pi_3(x)$.

Ἀντιστρόφως. *Ὑπόθεσις* : Ἔστω, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν, χωριστά, διὰ $x-\alpha$, διὰ $x-\beta$, διὰ $x-\gamma$.

Ἀπόδειξις : Ἔστω $\pi(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$· ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdot\pi(x).$$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ δεικνύει, ὅτι τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$ καὶ δίδει πηλίκον $(x-\beta)(x-\gamma)\cdot\pi(x)$, ἢ ὅτι εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $(x-\alpha)(x-\gamma)\cdot\pi(x)$, ἢ ὅτι εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\gamma$ καὶ δίδει πηλίκον $(x-\alpha)(x-\beta)\cdot\pi(x)$.

177. Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ

θεώρημα, ἐὰν οἱ διώνυμοι παράγοντες εἶναι περισσότεροι τῶν τριῶν· ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν τὸ κάτωθι γενικὸν θεώρημα :

Θεώρημα. ***Ὅταν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x μηδενίζεται διὰ διαφόρους τιμάς, α, β, γ, ... λ, τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου***

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda).$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)=x^3+2x^2-5x-6$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου

$$(x+1)(x-2)(x+3).$$

Ἐξετάζομεν, ἐὰν τὰ $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-3)$ εἶναι ἴσα μὲ μηδέν. Ἐδῶ εἶναι

$$\varphi(-1)=(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6=-1+2+5-6=0$$

$$\varphi(2)=\ 2^3+2\cdot 2^2-5\cdot 2-6=8+8-10-6=0$$

$$\varphi(-3)=(-3)^3+2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)-6=-27+18+15-6=0.$$

Ἐπειδὴ $\varphi(-1)=0$, $\varphi(2)=0$, $\varphi(-3)=0$, τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετόν, χωριστά, διὰ $x+1$, διὰ $x-2$, καὶ διὰ $x+3$· ἄρα θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x+1)(x-2)(x+3)$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x^2-\alpha^2$, ὅταν τὸ μ εἶναι ἄρτιος.

Γνωρίζομεν (§ 175), ὅτι τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$ καὶ διαιρετὸν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν ὁ μ εἶναι ἄρτιος· ἄρα τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x+\alpha)=x^2-\alpha^2$.

178. Πόρισμα. ***Ἐὰν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον***

$$\varphi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\dots A_{\mu-1}x+A_\mu$$

μηδενίζεται διὰ μ διαφόρους τιμὰς τοῦ x, ἔστω τὰς α, β, γ .... λ, τὸ πολυώνυμον αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον

$$A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda).$$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha,\beta,\gamma,\dots\lambda$, θὰ εἶναι διαιρετὸν δι' ἑκάστου τῶν διωνύμων $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$ .... $(x-\lambda)$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου των

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda).$$

Τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x καὶ μ βαθμοῦ. Ἂν διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$, τὸ ὁποῖον εἶναι μ βαθμοῦ, δι' ἑνὸς πολυωνύμου τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ μ, θὰ λάβωμεν ἕνα πηλίκον βαθμοῦ μηδὲν καὶ ἑπομένως ἀνεξάρτητον τοῦ x.

Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι λοιπὸν μία σταθερὰ ποσότης, ἡ ὁποία εὑρίσκεται, κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν πολυωνύμων (§ 165), ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον A_0x^μ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου x^μ τοῦ διαιρέτου· δηλ. εἶναι $A_0x^\mu : x^\mu = A_0$.

Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι A_0 καὶ κατὰ τὴν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(x)=A_0x^\mu+A_1x^{\mu-1}+\ldots A_\mu=A_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda).$$

Παράδειγμα. Τὸ πολυώνυμον $7x^3-42x^2+77x-42$ μηδενίζεται διὰ $x=1$, $x=2$, $x=3$· ἄρα θὰ εἶναι

$$7x^3-42x^2+77x-42=7(x-1)(x-2)(x-3).$$

'Ασκήσεις : 342, 343, 344, 345.

'Ασκήσεις

310. (191). 'Εὰν $\varphi(x)=3x^4-5x^3+2x-1$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi\left(-\frac{3}{4}\right)$.

311. (192). 'Εὰν $\varphi(x)=x^3-\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $\varphi(\alpha)$ καὶ $\varphi(-\alpha)$.

312. (193). 'Εὰν $\varphi(x)=2x^2-3x$ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\varphi(x+1)-\varphi(x)$.

313. (194). 'Εὰν $\varphi(x)=x^2-3x+2$ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\varphi(x+1)-\varphi(x-1)$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις : (195).

314. 1. $(3x^2-4x+5):(x-2)$ 2. $(5x^3-7x^2+8x+1):(x-3)$

315. 1. $(8x^2-5x-1):(x-1)$ 2. $(-x^3-4x^2-x+1):(x-5)$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις : (196).

316. 1. $(5x^3-3x^2+2x+1):(x+1)$ 2. $(x^4-3x^3+x-1):(x+3)$

317. 1. $(3x^4-5x^3+x-1):(x+2)$ 2. $(x^2-3x+2):(x+5)$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις : (197).

318. 1. $(4x^2-5x+6):(2x-1)$ 2. $(2x^3-4x^2+5x-1):(3x-2)$

319. 1. $(x^3-3x^2+5):(3x+1)$ 2. $(3x^3-5x^2+x-1):(2x+3)$.

320. (198) Νὰ εὑρεθῇ, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $3x^4-2x^3-x^2-x+2$ διὰ $x-3$, διὰ $x+2$, διὰ $2x-3$, διὰ $3x+1$.

321. (199). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $3x^2-4x-15$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-3$.

322. (200). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον $\alpha^2-4\alpha\beta+3\beta^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha-3\beta$.

323. (201). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $(x+y)^\mu-x^\mu-y^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

324. (202). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, ὅταν ὁ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς καὶ θετικός.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις : (203)

325. 1. $(\alpha^4-\beta^4):(\alpha-\beta)$ 2. $(\alpha^4-1):(\alpha-1)$

326. 1. $(x^5-y^5):(x-y)$ 2. $(y^5-1):(y-1)$

327. 1. $(x^6-\alpha^6):(x-\alpha)$ 2. $(\alpha^7-\beta^7):(\alpha-\beta)$

'Ομοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων: (204).

328. 1. $(\alpha^3-\beta^3):(\alpha+\beta)$ 2. $(\alpha^4-\beta^4):(\alpha+\beta)$

329. 1. $(x^4-1):(x+1)$ 2. $(x^5-\alpha^5):(x+\alpha)$

330. 1. $(x^6-y^6):(x+y)$ 2. $(\alpha^5-1):(\alpha+1)$.

'Ομοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων: (205).

331. 1. $(\alpha^3+\beta^3):(\alpha+\beta)$ 2. $(\alpha^4+\beta^4):(\alpha+\beta)$ 3. $(\alpha^4+1):(\alpha+1)$

332. 1. $(x^5+y^5):(x+y)$ 2. $(x^5+1):(x+1)$ 3. $(x^6+\alpha^6):(x+\alpha)$.

'Ομοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων: (206).

333. 1. $(\alpha^3+\beta^3):(\alpha-\beta)$ 2. $(x^4+y^4):(x-y)$ 3. $(x^4+1):(x-1)$

334. 1. $(\alpha^5+\beta^5):(\alpha-\beta)$ 2. $(\alpha^5+1):(\alpha-1)$ 3. $(y^6+\beta^6):(y-\beta)$.

'Ομοίως τῶν κάτωθι διαιρέσεων: (207).

335. 1. $(16-x^4):(2+x)$ 2. $(x^4-16y^4):(x+2y)$

336. 1. $(x^3+8y^3):(x+2y)$ 2. $(27\mu^3+1):(3\mu+1)$

337. 1. $(64x^3-1):(4x-1)$ 2. $(81\alpha^4-16\beta^4):(3\alpha-2\beta)$.

338. (208). Ποίων τελείων διαιρέσεων τῆς μορφῆς $(x^\mu\pm\alpha^\mu):(x\pm\alpha)$ εἶναι πηλίκα τὰ κάτωθι:

1. $x^2+\alpha x+\alpha^2$ 4. x^3+x^2+x+1
2. $x^2-\alpha x+\alpha^2$ 5. $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$
3. x^2-x+1 6. $x^4-yx^3+y^2x^2-y^3x+y^4$.

339. (209). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $13^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 14.

340. (210). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $7^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 8.

341. (211). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $2^{35}-1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 31 καὶ διὰ 127.

342. (241). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)=4x^3-12x^2-4x+12$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-1)(x+1)(x-3)$.

343. (242). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)=2x^4-5x^3-8x^2+17x-6$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(x-1)(x+2)(x-3)$.

344. (243). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)=2x^5-x^4-10x^3+5x^2+8x-4$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(x^2-1)(x^2-4)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

345. (244). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x+1)^4$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ, Κ.Λ.Π.

---

1. Ἀνάλυσις παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων

179. Ὁρισμός. *Ἀνάλυσις μιᾶς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων λέγεται ὁ μετασχηματισμὸς αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων.*

Ἡ ἀνάλυσις μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σπουδαιότερα προβλήματα τῆς Ἀλγέβρας. Μὲ αὐτὴν συντομεύομεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἁπλοποιοῦμεν τὰς κλασματικὰς παραστάσεις καὶ κατορθώνομεν νὰ λύωμεν ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον. Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν εἰς γινόμενον παραγόντων πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν, ἐὰν ἡ παράστασις δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

180. Οἱ ὅροι τῆς παραστάσεως ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 163.

Παράδειγμα. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$12\alpha^2\beta-16\alpha\beta^2+4\alpha^3\beta.$$

Οἱ ὅροι της ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν 4αβ. Θέτομεν τὸ 4αβ ὡς κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ εὑρίσκομεν $4\alpha\beta(3\alpha-4\beta+\alpha^2)$.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων εἶναι:

$$12\alpha^2\beta-16\alpha\beta^2+4\alpha^3\beta=4\alpha\beta(3\alpha-4\beta+\alpha^2).$$

Παρατήρησις. Ἐνίοτε ὁ κοινὸς παράγων τῶν ὅρων μιᾶς παραστάσεως φαίνεται, ὅταν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ὅρου της.

Π. χ. Ἔστω ἡ παράστασις $2\alpha(x-y)+3\beta(y-x)$.

Ἡ παράστασις αὐτὴ γράφεται $2\alpha(x-y)-3\beta(x-y)$.

Θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα $(x-y)$ ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν

$$(x-y)(2\alpha-3\beta).$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν κατὰ σειράν:

$$2\alpha(x-y)+3\beta(y-x)=2\alpha(x-y)-3\beta(x-y)$$
$$=(x-y)(2\alpha-3\beta).$$

Ἀσκήσεις: *346, 348, 350, 354, 356, 358, 360.*

181 Ἡ παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^2-\beta^2$ Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὴν ταυτότητα

$$\boxed{\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} \quad (1)$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν γνωστὴν (§ 150) ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2,$$

ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη της.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὴν παράστασιν $9x^2-4\alpha^2$ εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἡ παράστασις αὐτὴ γράφεται $(3x)^2-(2\alpha)^2$ δηλ. εἶναι διαφορὰ τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν $3x$ καὶ 2α· δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^2-\beta^2$. Κατὰ τὴν ταυτότητα (1) θὰ εἶναι

$$(3x)^2-(2\alpha)^2=(3x+2\alpha)(3x-2\alpha)\cdot$$

ὥστε εἶναι $$9x^2-4\alpha^2=(3x+2\alpha)(3x-2\alpha).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$16\alpha^2\beta^6-25x^4y^2=(4\alpha\beta^3+5x^2y)(4\alpha\beta^3-5x^2y).$$

2ον. $$\alpha^3\beta\gamma-\alpha\beta^3\gamma=\alpha\beta\gamma(\alpha^2-\beta^2)$$
$$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta)(\alpha-\beta).$$

3ον. $$\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta).$$

4ον. $$(x+y)^2-\omega^2=[(x+y)+\omega][(x+y)-\omega]$$
$$=(x+y+\omega)(x+y-\omega).$$

Ἀσκήσεις: *361, 363, 364, 368, 371, 377, 379, 381, 383, 387.*

182. Ἡ παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὰς ταυτότητας

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2} \quad (1), \quad \boxed{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2} \quad (2)$$

αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὰς γνωστὰς (§ 149) ταυτότητας

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta, \qquad (\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$$

ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη των.

Ἀπὸ τὰς ταυτότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ἕνα τριώνυμον, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι του εἶναι τετράγωνα δύο ἀριθμῶν καὶ ὁ τρίτος ὅρος του εἶναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, δύναται *νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων: εἰς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.*

Παραδείγματα. 1ον. Εἰς τὸ τριώνυμον $25x^2+40xy+16y^2$ οἱ δύο ὅροι του $25x^2$ καὶ $16y^2$ εἶναι τετράγωνα τῶν $5x$ καὶ $4y$, ὁ δὲ τρίτος ὅρος $40xy$

εἶναι τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν 5x καὶ 4y, δηλ. εἶναι $2\cdot 5x\cdot 4y$· ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$25x^2+40xy+16y^2=(5x+4y)^2=(5x+4y)(5x+4y).$$

2ον. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$9\alpha^4-24\alpha^2\beta^2+16\beta^4=(3\alpha^2-4\beta^2)^2=(3\alpha^2-4\beta^2)(3\alpha^2-4\beta^2).$$

3ον. Νὰ ἀναλυθῇ ἡ παράστασις $16x^3-48x^2+36x$ εἰς γινόμενον παραγόντων.

Θέτομεν τὸ 4x ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν $4x(4x^2-12x+9)$.

Τὸ τριώνυμον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς παρενθέσεως εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $(2x-3)$· ἄρα θὰ εἶναι $4x(2x-3)^2$.

Θὰ εἶναι λοιπὸν κατὰ σειράν:

$$16x^3-48x^2+36x=4x(4x^2-12x+9)=4x(2x-3)^2.$$

Ἀσκήσεις : 388, 390, 393, 395, 397.

183. Ἡ παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^3\pm\beta^3$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὰς ταυτότητας, ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 175

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$	$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Παραδείγματα. 1ον.

$$8\alpha^3-64\beta^3=(2\alpha)^3-(4\beta)^3$$
$$=(2\alpha-4\beta)[(2\alpha)^2+2\alpha\cdot 4\beta+(4\beta)^2]$$
$$=(2\alpha-4\beta)(4\alpha^2+8\alpha\beta+16\beta^2).$$

2ον.

$$54x^3-16\alpha^3=2(27x^3-8\alpha^3)$$
$$=2[(3x)^3-(2\alpha)^3]$$
$$=2(3x-2\alpha)[(3x)^2+3x\cdot 2\alpha+(2\alpha)^2)]$$
$$=2(3x-2\alpha)(9x^2+6\alpha x+4\alpha^2).$$

3ον.

$$\alpha x^4-1000\alpha xy^3=\alpha x(x^3-1000y^3)=\alpha x[x^3-(10y)^3]$$
$$=\alpha x(x-10y)(x^2+10xy+100y^2).$$

Ἀσκήσεις : 399, 402.

184. Μέθοδος χωρισμοῦ τῆς παραστάσεως εἰς ὁμάδας. Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν χωρίζομεν τοὺς ὅρους τῆς παραστάσεως εἰς ὁμάδας (διώνυμα, τριώνυμα....), τῶν ὁποίων οἱ ὅροι ἔχουν κοινὸν παράγοντα· ἀναλύομεν ἔπειτα κάθε διώνυμον ἢ τριώνυμον εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις λαμβάνομεν οὕτω μίαν παράστασιν, τῆς ὁποίας ὅλοι οἱ ὅροι ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα, τὸν ὁποῖον θέτομεν ἐκτὸς παρενθέσεως.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$3\beta x^3-4\alpha\beta x^2+3\gamma x-4\alpha\gamma.$$

Θέτομεν ἐντὸς παρενθέσεως τοὺς δύο πρώτους ὅρους της καὶ ἐντὸς ἄλλης παρενθέσεως τοὺς δύο τελευταίους ὅρους της καὶ ἔχομεν

$$(3\beta x^3-4\alpha\beta x^2)+(3\gamma x-4\alpha\gamma).$$

Ἐξάγομεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸ βx^2 εἰς τὴν πρώτην ὁμάδα καὶ τὸ γ εἰς τὴν δευτέραν ὁμάδα καὶ ἔχομεν

$$\beta x^2(3x-4\alpha)+\gamma(3x-4\alpha).$$

Θέτομεν τὸ $(3x-4\alpha)$ ὡς παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ ἔχομεν

$$(3x-4\alpha)(\beta x^2+\gamma).$$

Ὥστε θὰ εἶναι

$$3\beta x^3-4\alpha\beta x^2+3\gamma x-4\alpha\gamma=(3x-4\alpha)(\beta x^2+\gamma).$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} 3\beta x^3-4\alpha\beta x^2+3\gamma x-4\alpha\gamma &= (3\beta x^3-4\alpha\beta x^2)+(3\gamma x-4\alpha\gamma) \\ &= \beta x^2(3x-4\alpha)+\gamma(3x-4\alpha) \\ &= (3x-4\alpha)(\beta x^2+\gamma). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$\alpha x^3-2\alpha x^2-\beta x+2\beta.$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\begin{aligned} \alpha x^3-2\alpha x^2-\beta x+2\beta &= (\alpha x^3-2\alpha x^2)-(\beta x-2\beta) \\ &= \alpha x^2(x-2)-\beta(x-2) \\ &= (x-2)(\alpha x^2-\beta). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$\gamma^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta.$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\begin{aligned} \gamma^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta &= \gamma^2-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta) \\ &= \gamma^2-(\alpha-\beta)^2 \\ &= [\gamma+(\alpha-\beta)][\gamma-(\alpha-\beta)] \\ &= (\gamma+\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+\beta). \end{aligned}$$

Ἀσκήσεις: *403, 405, 409, 411, 415, 418, 420.*

185. Παρατηρήσεις. Ι. Ἐνίοτε διὰ νὰ ἐμφανισθῇ εἰς μίαν παράστασιν μία γνωστὴ ταυτότης, *προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν ἕνα ἁρμόζοντα ὅρον.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$x^4+4x^2+16.$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ δοθεῖσα παράστασις τὸ τετράγωνον τοῦ (x^2+4) ἔπρεπε ὁ δεύτερος ὅρος της νὰ ἦτο $8x^2$. Προσθέτομεν λοιπὸν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ $4x^2$ καὶ ἔχομεν τότε:

$$\begin{aligned} x^4+4x^2+16 &= x^4+8x^2+16-4x^2 \\ &= (x^4+8x^2+16)-4x^2 \\ &= (x^2+4)^2-4x^2 \\ &= [(x^2+4)+2x]\cdot[(x^2+4)-2x] \\ &= (x^2+4+2x)(x^2+4-2x). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$\alpha^4+\beta^4.$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$\alpha^4+\beta^4=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=(\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2)-2\alpha^2\beta^2$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=[(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\sqrt{2}]\cdot[(\alpha^2+\beta^2)-\alpha\beta\sqrt{2}]$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sqrt{2})(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\sqrt{2}).$$

II. Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα ὅρον τῆς παραστάσεως εἰς ἄθροισμα δύο ὅρων, ὁπότε ἡ ἀνάλυσις τῆς παραστάσεως ἀνάγεται εἰς μίαν ἀπὸ τὰς προηγουμένας περιπτώσεις.

Παράδειγμα. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις

$$x^4+y^4-3x^2y^2.$$

Ἔχομεν κατὰ σειράν:

$$x^4+y^4-3x^2y^2=(x^4+y^4-2x^2y^2)-x^2y^2$$
$$=(x^2-y^2)^2-x^2y^2$$
$$=[(x^2-y^2)+xy]\cdot[(x^2-y^2)-xy]$$
$$=(x^2-y^2+xy)(x^2-y^2-xy).$$

Ἀσκήσεις: 422, 424, 428, 429, 432, 433, 435, 438, 440, 442, 445, 447.

186. Μέθοδος διωνύμων παραγόντων. Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν εἰς γινόμενον παραγόντων ἕνα πολυώνυμον $\varphi(x)$ μὲ τὴν μέθοδον αὐτήν, διατάσσομεν τὸ πολυώνυμον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x καὶ ἀναζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ τοιούτους, ὥστε νὰ εἶναι $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$, $\varphi(\gamma)=0, \ldots$ Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τῶν διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma, \ldots$ καὶ ἑπομένως (§ 176) εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$

Ἐλαττώνομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δοκιμῶν, ἂν παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ πρέπει νὰ εἶναι διαιρέται τοῦ σταθεροῦ ὅρου τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον

$$\varphi(x)=x^2+2x-3.$$

Οἱ διαιρέται τοῦ -3 εἶναι ±1 καὶ ±3. Οἱ δυνατοὶ διώνυμοι παράγοντες τῆς μορφῆς $x\pm\alpha$ εἶναι οἱ $x-1$, $x+1$, $x-3$, $x+3$.

Ἐξετάζομεν, ἐὰν ὁ πρῶτος παράγων $x-1$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\varphi(x)$. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὸ $\varphi(1)$.

Ἐδῶ εἶναι $\varphi(1)=1^2+2\cdot1-3=0.$

Ἐπειδὴ $\varphi(1)=0$, τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-1$· ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x-1$ εὑρίσκομεν πηλίκον $x+3$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=x^3+6x^2+11x+6.$

Οἱ διαιρέται τοῦ 6 εἶναι ± 1, ± 2, ± 3 καὶ ± 6 καὶ ἑπομένως οἱ δυνατοὶ διώνυμοι παράγοντες εἶναι

$$(x-1),\ (x+1),\ (x-2),\ (x+2),\ (x-3),\ (x+3),\ (x-6),\ (x+6).$$

Διὰ νὰ ἴδωμεν ποῖοι ἐξ αὐτῶν τῶν διωνύμων παραγόντων εἶναι διαιρέται τοῦ $\varphi(x)$ ὑπολογίζομεν τὰς παραστάσεις $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(-3)$, $\varphi(6)$, $\varphi(-6)$. Ἐδῶ εἶναι:

$$\varphi(1)=1^3+6\cdot 1^2+11\cdot 1+6=24$$
$$\varphi(-1)=(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=-1+6-11+6=0$$
$$\varphi(2)=2^3+6\cdot 2^2+11\cdot 2+6\neq 0$$
$$\varphi(-2)=(-2)^3+6(-2)^2+11(-2)+6=-8+24-22+6=0.$$

Ἐπειδὴ $\varphi(-1)=0$ καὶ $\varphi(-2)=0$, τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$ καὶ διὰ $x+2$ καὶ ἑπομένως εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου

$$(x+1)(x+2) \quad \text{ἢ} \quad x^2+3x+2.$$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $\varphi(x)$ διὰ x^2+3x+2 εὑρίσκομεν πηλίκον $x+3$ καὶ ὑπόλοιπον μηδέν· ἄρα θὰ εἶναι:

$$\varphi(x)=x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3).$$

Ἀσκήσεις: *454, 455, 456, 457, 459*

2. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης καὶ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

187. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης (μ.κ.δ.) ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἐγγραμμάτων μερῶν των, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ ὡς συντελεστὴν τὸν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν των.

Ἡ εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνεται, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, δι' ἀναλύσεως τῶν παραστάσεων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀκολουθοῦμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων*:

1ον. Ἀναλύομεν τὰς παραστάσεις αὐτὰς εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, δηλ. εἰς παραστάσεις διαιρετὸς μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος.

2ον. Σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς κοινοὺς παράγοντας, εἴτε ἀριθμητικοί, εἴτε μονώνυμα, εἴτε πολυώνυμα εἶναι οὗτοι καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων

$$60\alpha^3\beta^2\gamma,\quad 30\alpha^2\beta^3,\quad 20\alpha\beta^3\gamma^2.$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι

$$\left.\begin{array}{l} 60\alpha^3\beta^2\gamma = 2^2\cdot 3\cdot 5\alpha^3\beta^2\gamma \\ 30\alpha^2\beta^3 = 2\cdot 3\cdot 5\alpha^2\beta^3 \\ 20\alpha\beta^2\gamma^3 = 2^2\cdot 5\alpha\beta^2\gamma^3 \end{array}\right\} \quad \mu.\kappa.\delta. = 2\cdot 5\alpha\beta^2 = 10\alpha\beta^2.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων

$$x^2+y^2-2xy, \quad 3x^2-3y^2, \quad 2\alpha x-2\alpha y.$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \\ 3x^2-3y^2 = 3(x^2-y^2) = 3(x-y)(x+y) \\ 2\alpha x-2\alpha y = 2\alpha(x-y) \end{array}\right\} \quad \mu.\kappa.\delta. = x-y.$$

᾿Ασκήσεις: 461, 463, 465.

188. ᾿Ελάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. ᾿Ελάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (ἐ.κ.π.) ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἐγγραμμάτων μερῶν των, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν των.

῾Η εὕρεσις τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων γίνεται, ὅπως εἰς τὴν ᾿Αριθμητικήν, δι᾿ ἀναλύσεως τῶν παραστάσεων εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀκολουθοῦμεν τὸν κάτωθι κανόνα:

***Κανών*:** *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων:*

1ον. ᾿Αναλύομεν τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, δηλ. εἰς παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι διαιρεταὶ μόνον διὰ τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ διὰ τῆς μονάδος.

2ον. Σχηματίζομεν ἔπειτα ἕνα γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας, κοινοὺς ἢ μὴ κοινούς, εἴτε ἀριθμητικοί, εἴτε μονώνυμα, εἴτε πολυώνυμα εἶναι οὗτοι καὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων:

$$24x^3y^2\omega, \quad 30x^2y^3\omega^2, \quad 12x^4y.$$

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l} 24x^3y^2\omega = 2^3\cdot 3\cdot x^3y^2\omega \\ 30x^2y^3\omega^2 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot x^2y^3\omega^2 \\ 12x^4y = 2^2\cdot 3\cdot x^4y \end{array}\right\} \quad \dot{\varepsilon}.\kappa.\pi. = 2^3\cdot 3\cdot 5x^4y^3\omega^2 = 120x^4y^3\omega^2$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων:

$$\alpha^2-\beta^2, \quad \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2, \quad \alpha^3-\beta^3, \quad 5\alpha x-5\beta x.$$

Τρέπομεν τὰς παραστάσεις εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2 \\ \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \\ 5\alpha x-5\beta x=5x(\alpha-\beta) \end{array}\right\} \text{ἐ.κ.π.}=5x(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

Ἀσκήσεις : 467, 469, 471, 473.

3. Ἐπαλήθευσις ταυτοτήτων

189. Ἐπαλήθευσις μιᾶς ταυτότητος. Διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν μίαν ταυτότητα ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

Λαμβάνομεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς ταυτότητος καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, ποὺ ἔχουν σημειωθῆ. Ἔπειτα, μὲ διαδοχικοὺς μετασχηματισμούς, προσπαθοῦμεν νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος.

Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος, ὁπότε πρέπει νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος.

Τέλος δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, χωριστά, εἰς κάθε μέλος· ἐὰν εὕρωμεν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητος, τότε ἡ ταυτότης εἶναι ἀληθής.

Κατὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ταυτοτήτων πρέπει νὰ ἐνθυμούμεθα ἀπὸ μνήμης τὰς κάτωθι ταυτότητας, τὰς ὁποίας εὑρήκαμεν εἰς προηγουμένας παραγράφους :

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$, $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$
2. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$
3. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
4. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
5. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
6. $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$, $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

Ἀκόμη τάς :

7. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

αἱ ὁποῖαι γράφονται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν (§ 156)

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta), \quad \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης :

$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ (ταυτότης τοῦ Lagrange)

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ταυτότητος καὶ ἔχομεν: $\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta)$

ἢ $\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta.$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν

$$\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta.$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία παράστασις εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρήκαμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος· ἄρα ἡ δοθεῖσα ταυτότης ἐπαληθεύεται.

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων γίνεται ὡς ἑξῆς:

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=$$
$$=\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-(\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta)$$
$$=\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\delta^2-\alpha^2\gamma^2-\beta^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta$$
$$=\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta$$
$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Ἔχομεν:

$$1\text{ον μέλος}=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma)+(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+$$
$$+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)$$
$$=3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2$$
$$=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Παράδειγμα 3ον. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $\alpha+\beta+\gamma=0$ λαμβάνομεν

$$\alpha+\beta=-\gamma \quad (1)$$

Ὑψοῦμεν εἰς τὸν κύβον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3$$

ἢ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

ἢ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ (2)

Εἰς τὴν (2) ἀντικαθιστῶμεν τὸ $(\alpha+\beta)$ μὲ τὸ ἴσον του $-\gamma$, ποὺ δίδει ἡ (1) καὶ ἔχομεν

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma.$$

Παρατήρησις. Εἰς τὴν § 173 ἐδείχθη ἡ ταυτότης

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2] \quad (3)$$

Ἐὰν εἰς ταύτην θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma=0$, ἔχομεν ἀμέσως τὴν

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma.$$

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν εἶναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, τότε ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=0,$

ἑπομένως θὰ εἶναι εἴτε

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \text{εἴτε} \quad (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \quad (4)$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τετραγώνων πραγματικῶν ἀριθμῶν μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ μηδέν, συνεπῶς ἐκ τῆς (4) ἔχομεν $\alpha=\beta=\gamma$.

Ἀσκήσεις

Ἀνάλυσις παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων :

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (212).

346. 1. $12\alpha x-16\alpha y$ 2. $\alpha\beta^2\gamma^3-\alpha^3\beta^2\gamma$

347. 1. $5\alpha^2x-10\alpha xy+20\alpha x\omega$ 2. $3\mu x^2y-12\nu xy^2+21\mu\nu xy$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (213).

348. 1. $\alpha x+\beta x-\gamma x$ 2. $4\alpha^3+10\alpha^2-2\alpha$

349. 1. $\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2$ 2. $12\alpha x^3+3\alpha x^2y-12\alpha xy^2$

350. 1. $9\mu^2\nu^2-27\mu\nu+63$ 2. $12\alpha^2\beta+6\alpha^3\beta^3-18\alpha^2\beta^4$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (214).

351. 1. $(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)y$ 2. $(\beta-\gamma)\omega-(\beta-\gamma)\varphi$

352. 1. $(x^2-y^2)+\alpha(x^2-y^2)$ 2. $\alpha\beta(xy-\omega)+(xy-\omega)$

353. 1. $x(2\alpha+\beta)-15(2\alpha+\beta)$ 2. $\alpha(3yx+\omega)-\beta(3xy+\omega)$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (215).

354. $(3x-1)(y+2)-(1-3x)(y-2)$

355. $(5\alpha-1)(\beta+3)-(1-5\alpha)(\beta-3)$

356. $(x-2y)(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta)(2y-x)$

357. $(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\alpha)(\alpha-\beta+\gamma)$

358. $(\gamma-\alpha-\beta)(2\alpha-\beta)-(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta)$

359. $(2x+1)(3x-2)-(x-4)(2x+1)-(2x+1)^2$

360. $(x-y)(\alpha-2)-(y-x)(\beta+3)-(x-y)(1-\gamma)$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (216).

361. 1. $25-x^2$ 2. ω^2-1 3. $4x^2-9\omega^2$

362. 1. $16\alpha^2-4\beta^2$ 2. x^4-y^4 3. $9\beta^2-\gamma^4$

363. 1. $25\alpha^2x^2-4y^2$ 2. $4\alpha^2\beta^2-9x^2y^2$ 3. $\alpha^2\beta^2-49\gamma^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (217).

364. 1. $1-\frac{1}{4}x^2$ 2. $\frac{1}{9}\alpha^2-\frac{4}{25}$ 3. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{25}y^2$

365. 1. $\frac{4}{9}x^2y^2-1$ 2. $\frac{9}{16}\alpha^2x^2-\frac{4}{9}\beta^2y^2$ 3. $\alpha^2\beta^4-\frac{1}{81}x^2\omega^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (218).

366. 1. $3x^2-12y^2$ 2. $5\alpha^3-5\alpha x^2$ 3. $15x^2-15$

367. 1. $2\alpha x^2-162\alpha$ 2. $243-3\beta^2$ 3. $3x^4-3\beta^2$

368. 1. $75x^2-48\omega^2$ 2. $\alpha x^4-25\alpha$ 3. $13\alpha^5y-117\alpha y^3$

369. 1. $8\alpha^2\beta^2-50\alpha^2\gamma^2$ 2. $45x^2y^4-80\omega^2$ 3. $27\alpha^3\beta-12\alpha\beta^3$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστασεις : (219).

370. 1. $(\alpha+\beta)^2-\gamma^2$ 2. $(x-y)^2-4\alpha^2$ 3. $(3x+y)^2-25$

371. 1. $100-(3\alpha-\beta)^2$ 2. $9-(x+y)^2$ 3. $\alpha^2-(2\beta+\gamma)^2$

372. 1. $16\alpha^2-(2\beta-3\gamma)^2$ 2. $1-(3x-y)^2$ 3. $64\alpha^4\beta^2-(\alpha-2\beta)^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (220).

373. 1. $(2\alpha+\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2$ 2. $(3x+5y)^2-(2x-y)^2$

374. 1. $(5\mu+\nu)^2-(\mu-3\nu)^2$ 2. $(\alpha+1)^2-(\alpha-1)^2$

375. 1. $(3x-y)^2-(x+5y)^2$ 2. $9(\alpha+\beta)^2-4(\alpha-\beta)^2$

376. 1. $25(x+y)^2-16(x-y)^2$ 2. $3(\alpha-2\beta)^2-27(\alpha+\beta)^2$

377. 1. $5(x+y)^2-20(2x-y)^2$ 2. $28(\alpha+3\beta)^2-7(\beta-2\alpha)^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (221).

378. 1. $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(2\alpha+\beta+5\gamma)^2$ 2. $(\alpha+\beta+x)^2-(x-\alpha-\beta)^2$

379. 1. $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2-(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^2$ 2. $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2$

380. 1. $(\alpha^2+\alpha+1)^2-(\alpha^2-\alpha+1)^2$ 2. $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2$

381. 1. $(4x^2+3x+3)^2-(3-4x^2)^2$ 2. $(1+\alpha+x)^2-(1+\alpha-x)^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (222).

382. 1. $(x+y)(2\alpha-\beta)+(x^2-y^2)$ 2. $(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)$

383. 1. $(2x-y)(\alpha+\beta)-(2x-y)^2$ 2. $(\alpha+1)(\alpha-2)-(\alpha^2-4)$

384. $(\alpha+1)(2-\alpha)+(\alpha-2)^2+(\alpha^2-4)$

385. $(\alpha-2\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-2\beta)^2-(\alpha^2-4\beta^2)$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον τριῶν ἢ περισσοτέρων παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (223).

386. 1. x^4-1 2. $x^4-\alpha^4$ 3. $81\alpha^4-16\beta^4$

387. 1. x^8-y^8 2. α^8-1 3. $3\alpha^5-48\alpha\beta^8$.

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (224).

388. 1. $\mu^2+2\mu\nu+\nu^2$ 2. $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2$ 3. $9x^2+6xy+y^2$

389. 1. $x^2-12x+36$ 2. x^4-4x^2+4 3. $x^4-2x^2y^3+y^6$

390. 1. $9\alpha^4\beta^2-6\alpha^2\beta\gamma+\gamma^2$ 2. $9x^4+24x^2y^2+16y^4$

391. 1. $\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{9}\nu^2+\frac{1}{3}\mu\nu$ 2. $\frac{9}{16}xy^2+\frac{4}{25}x\omega^2-\frac{3}{5}xy\omega$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (225).

392. 1. $9\alpha x^2+24\alpha xy+16\alpha y^2$ 2. $49x^2\omega-28xy\omega+4y^2\omega$

393. 1. $x-20xy+100xy^2$ 2. $3\alpha^5x^4-6\alpha^3x^2y^2+3\alpha y^4$

394. 1. $\mu^3-16\mu^2\nu+64\mu\nu^2$ 2. $x+x^3-2x^2$

395. 1. $\alpha-2\alpha xy\omega+\alpha x^2y^2\omega^2$ 2. $25\alpha^3\beta^3+10\alpha^2\beta^2+\alpha\beta$

396. 1. $81\alpha^2\gamma+126\alpha\beta\gamma+49\beta^2\gamma$ 2. $242+220x+50x^2$

397. 1. $\frac{9\alpha^2\beta^2}{16}-\frac{6\alpha\beta\gamma\delta}{5}+\frac{16\gamma^2\delta^2}{25}$, 2. $\frac{\mu^2}{16\nu^2}-\frac{3}{2}+\frac{9\nu^2}{\mu^2}$

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (226).

398. 1. $x^3\pm 64$ 2. $x^3-8y^3\omega^3$ 3. $343\alpha^3-\beta^3$

399. 1. $27x^3-216y^3$ 2. $1-125\alpha^3$ 3. $1000\omega^3-1$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (227).

400. 1. $\alpha^3\beta-\beta\gamma^3$ 2. $\alpha x^3+8\alpha y^3$ 3. $\alpha\beta^3-27\alpha$

401. 1. x^6+64 2. $\alpha^3\beta^3-27$ 3. $x^6-8x^3y^3$

402. 1. $27x^3y-\alpha^6\beta^3y$ 2. $216\alpha^3\beta-343\beta^4$ 3. $(\alpha+\beta)^3+(\alpha-\beta)^3$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις : (228).

403. 1. $\alpha x+\beta x+\alpha y+\beta y$ 2. $5\alpha x-4\beta x+5\alpha y-4\beta y$

404. 1. $\alpha^2-4\alpha+\alpha\gamma-4\gamma$ 2. $4\alpha y-2\beta y+2\alpha\omega-\beta\omega$

405. 1. $\alpha^2\gamma^2-\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\gamma-\beta\delta$ 2. $x^3-5x^2+2x-10$

406. 1. $x^3+7x^2+3x+21$ 2. $\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha+x$

407. 1. x^3+x^2+x+1 2. $11\alpha^3+55\alpha^2+6\alpha+30$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (229).

408. 1. $\alpha^2\gamma-\alpha^2\delta-\beta^2\delta+\beta^2\gamma$ 2. $\alpha^2-\beta^2-2\alpha+2\beta$

409. 1. $4x-4y+\alpha y-\alpha x$ 2. $x^2+y\omega-xy-x\omega$

410. 1. $\beta\gamma-\alpha^2+\alpha\gamma-\alpha\beta$ 2. $3\alpha^2\gamma^2+\beta\delta+3\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma\delta$

411. 1. $x^3-15+5x^2-3x$ 2. $\alpha^2\beta^2-1+\beta^2-\alpha^2$

412. 1. $xy^2+x-1-y^2$ 2. x^3-2x^2-x+2.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (230).

413. 1. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2$ 2. $x^2-2xy+y^2-16\omega^2$

414. 1. $x^2-y^2-2\alpha y-\alpha^2$ 2. $4\alpha^2-\beta^2+4\beta x-4x^2$

415. 1. $9-9\alpha^2-\beta^2+6\alpha\beta$ 2. x^4-x^2-2x-1

416. 1. $\alpha^4+2\alpha^2\beta+\beta^2-81$ 2. $3x^2-6xy+3y^2-27\omega^2$

417. 1. $x^4+2x^3+x^2-y^2$ 2. y^2-x^2+2x-1.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (231).

418. 1. $4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2-9\alpha^2\beta^2$ 2. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2-2\gamma\delta-\delta^2$

419. 1. $2xy+1-x^2-y^2$ 2. $\alpha^2-\beta^2+2\beta-1$

420. 1. $4\mu^2+4\mu+1-4\nu^2+4\nu-1$ 2. $1-2\alpha+2\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (232)

421. 1. $x^4+3x^2y^2+4y^4$ 2. $x^4+x^2y^2+y^4$

422. 1. $16\alpha^4+4\alpha^2\beta^2+\beta^4$ 2. $\mu^4+3\mu^2\nu^2+4\nu^4$

423. 1. $16x^4+25y^4+36x^2y^2$ 2. $4x^4+16x^2y^2+25y^4$

424. 1. $9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$ 2. x^4+x^2+1.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (233).

425. 1. $\alpha^4-5\alpha^2\beta^2+4\beta^4$ 2. $4x^4-21x^2y^2+9y^4$

426. 1. $4x^4-13x^2+1$ 2. $4x^4-37x^2y^2+9y^4$

427. 1. $16\alpha^4-17\alpha^2+1$ 2. $9x^4-15x^2+1$

428. 1. $x^4+y^4-11x^2y^2$ 2. $25x^4+y^4-11x^2y^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (234).

429. 1. x^4+9y^4 2. $16x^5-4x$ 3. $\alpha^8+\beta^8$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου: (235).

430. 1. $\alpha^3+2\alpha^2-1$ 2. $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3$

431. 1. $\alpha^2-\alpha\beta-\beta-1$ 2. $x^2+y^2-4x+4y-2xy+3$

432. 1. $x^7+8x^4-x^3-8$ 2. $\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (236).

433. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2$

434. $(\alpha\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2$

435. $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$

436. $(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (237).

437. $4xy(x-y)-6x(x-y)^2+2x(x^2-y^2)$

438. $(7x-y)^2-4(7x-y)(2x+y-1)+3(2x+y-1)^2$

439. $4x^2+y^2+9\omega^2-4xy+12x\omega-6y\omega$

440. $(\alpha-2\beta)^2-6(\alpha-2\beta)(3\alpha+\beta)+8(3\alpha+\beta)^2$

441. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+(\gamma x+\delta y)^2+(\gamma y-\delta x)^2$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις: (238).

442. $\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\alpha\beta(\alpha-\beta)-\beta\gamma(\beta+\gamma)$

443. $(\alpha-\beta)(\alpha^2-\gamma^2)-(\alpha-\gamma)(\alpha^2-\beta^2)$

444. $1+xy+\alpha(x+y)-(x+y)-\alpha(1+xy)$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις: (239).

445. $x^{\nu+1}y^{\nu-1}+x^{\nu-1}y^{\nu+1}-2x^{\nu}y^{\nu}$

446. $\alpha^{\mu+\nu}-\alpha^{\mu}\beta^{\nu}+\alpha^{\nu}\beta^{\mu}-\beta^{\mu+\nu}$

447. $-12\alpha x^{\nu}+144\alpha^2x^{\nu+1}-120\alpha^3x^{\nu+2}$

448. $x^{3\mu}-3x^{2\mu}+3x^{\mu}-1$

449. $\alpha^{2\mu+3\nu}-\alpha^{2\mu}-\alpha^{3\nu}+1$

450. $x^{\mu+\nu}y^{\mu}-x^{2\nu}y^{\mu+\nu}-x^{\nu}y^{2\mu}$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (240).

451. $(x+y)^3-x^3-y^3$

452. $(x+y)^5-x^5-y^5$

453. $(x+y)^7-x^7-y^7$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων τὰ κάτωθι πολυώνυμα διὰ τῆς μεθόδου τῶν διωνύμων παραγόντων: (245).

454. 1. x^2+x-2 2. x^3-2x^2-5x+6

455. 1. $x^3-6x^2+11x-6$ 2. x^3+2x^2-5x-6

456. 1. x^4-5x^2+4 2. x^3-x^2+x-6

457. $3x^3-16x^2+3x+10$

458. $2x^3-15x^2+6x+7$

459. $x^3-3x^2-4x+12$

460. x^3+3x^2-6x-8.

Μ.κ.δ. καὶ ἐ.κ.π.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων: (262).

461. $2\alpha^2\beta^3\gamma$ $12\alpha\beta^2\gamma^4$ $6\alpha^3\beta\gamma^2$

462. $14xy^2\omega$ $7x^2y\omega^2$ $21\alpha\beta x^3y$

463. x^3-xy^2 x^2y-y^3 $2x+2y$

464. $\alpha^3-\alpha$ $\alpha^3+2\alpha^2+\alpha$ $3\alpha^2+3\alpha$

465. $\alpha^2-\beta^2$ $(\alpha-\beta)^3$ $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

466. $9(\mu^2-\nu^2)$ $6(\mu-\nu)$ $18(\mu^2+\nu^2-2\mu\nu)$.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν κάτωθι παραστάσεων: (263).

467. $6\alpha^2\beta$, $18\alpha\beta^2$, $24\alpha^2\beta\gamma$

468. $7\alpha^2\beta x$, $21\alpha^3\beta^2x^2$, $12\alpha^4\beta^3xy$

469. $3(\alpha+\beta)$, $12(\alpha-\beta)$, $6(\alpha^2-\beta^2)$, $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

470. $\alpha(\beta-\gamma)$, $\beta^2(\beta+\gamma)$, $\alpha\beta(\beta^2-\gamma^2)$

471. x^2-1, x^4-1, x^2-2x+1,

472. $2(\alpha^2-\beta^2)$, $6(\alpha-\beta)$, $4(\alpha+\beta)$, $12(\alpha^4-\beta^4)$

473. $\alpha^3+\beta^3$, $(\alpha+\beta)^3$, $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$, $\alpha^2-\beta^2$.

'Επαλήθευσις ταυτοτήτων :

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (256).

474. $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$

475. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+\gamma^2(x^2+y^2)=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2)$

476. $(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2+(\gamma x+\delta y)^2+(\gamma y-\delta x)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (257).

477. $(x-y)(x+y)^3-x^4+y^4=2xy(x^2-y^2)$

478. $x^4-y^4-(x-y)^3(x+y)=2xy(x^2-y^2)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (258).

479. $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta-\gamma)^2-(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2=8\beta\gamma$

480. $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2+4\alpha\gamma=0$

481. $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\gamma+\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

482. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+$
$+(\gamma-\delta)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$

483. $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2=2[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (259).

484. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=$
$=(\alpha y-\beta x)^2+(\alpha\omega-\gamma x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2$ (ταυτότης τοῦ Lagrange)

485. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)=(2\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$;

486. $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma+\delta)(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)=$
$=4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (260).

487. $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$

488. $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)+1=(\alpha+3\alpha+1)^2$.

Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ κάτωθι ταυτότης : (261).

489. $(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2=2(\alpha-\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες :

490. $(\alpha+\beta)^3+2(\alpha^3+\beta^3)=3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

491. $(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3=3(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$

492. $(\alpha+\beta+\gamma)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma$

493. $(\alpha x+\mu\beta y)^2-\mu(\alpha y+\beta x)^2=(\alpha^2-\mu\beta^2)(x^2-\mu y^2)$

494. $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=0$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (268).

495. $\alpha^2(\gamma-\beta)+\beta^2(\alpha-\gamma)+\gamma^2(\beta-\alpha)=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

496. $(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (269).

497. $[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]^2=2[(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4]$

498. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2$.

Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης : (270).

499. $(x^2-1)(y^2-1)(\omega^2-1)+(x+y\omega)(y+\omega x)(\omega+xy)=$
$=(xy\omega+1)(x^2+y^2+\omega^2+2xy\omega-1)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (271).

500. $4[\alpha\beta(x^2-y^2)+(\alpha^2-\beta^2)xy]^2+[(\alpha^2-\beta^2)(x^2-y^2)-4\alpha\beta xy]^2=$
$=(\alpha^2+\beta^2)^2(x^2+y^2)^2$

501. $[(x^2+y^2)^2+\alpha^2x^2]^2-4\alpha^2(x^2+y^2)^3=$
$=[(x^2+y^2+\alpha y)^2-\alpha^2(x^2+y^2)]\cdot[(x^2+y^2-\alpha y)^2-\alpha^2(x^2+y^2)]$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (272).

502. $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

503. $(x+y+\omega)^3=3(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2)-2(x^3+y^3+\omega^3)+6yx\omega$.

Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης : (273).

504. $(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)^3=\alpha^3(\alpha^3-2\beta^3)^3+\beta^3(2\alpha^3-\beta^3)^3$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες τοῦ Gauchy : (274).

505. $(x+y)^4+x^4+y^4\equiv 2(x^2+xy+y^2)^2$

506. $(x+y)^5-x^5-y^5\equiv 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

507. $(x+y)^7-x^7-y^7\equiv 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$

508. $(x+y)^9-x^9-y^9\equiv 3xy(x+y)[3(x^2+xy+y^2)^3+x^2y^2(x+y)^2]$.

Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης : (275).

509. $(x+y+\omega)^5-(y+\omega-x)^5-(\omega+x-y)^5-(x+y-\omega)^5=80xy\omega(x^2+y^2+\omega^2)$.

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (276).

510. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$

511. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

512. $(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (345).

513. $(\gamma+\delta)^2(\alpha-\beta)^2-(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2+\gamma^2(\gamma-\delta)^2-(\gamma+\delta)^2\gamma^2=(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)4\gamma\delta$

514. $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=[(\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)]^2$

515. $(\alpha^4-\beta^4)+2\beta(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=2\alpha^2\beta(\alpha-\beta)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (346).

516. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=$
$=\beta\gamma(y-\omega)^2+\gamma\alpha(\omega-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2$

517. $(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2+(\alpha^2-\beta\gamma)^2+(\beta^2-\gamma\alpha)^2+(\gamma^2-\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2$

518. $\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta(\gamma+\alpha)^2+\gamma(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\gamma\equiv(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

519. $(\alpha+\beta+\gamma)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-\alpha\beta\gamma=(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (347).

520. $2(2x-\alpha)^3-27\alpha^2x=(x-2\alpha)(4x+\alpha)^2$

521. $(x-y)(x+y)^3=x(x-2y)^3+y(2x-y)^3$

522. $(\alpha+\beta+\gamma)^3-(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\beta-\gamma-\alpha)^3-(\alpha+\beta-\gamma)^3=24\alpha\beta\gamma$.

523. $(\alpha^2-\beta\gamma)^3+(\beta^2-\gamma\alpha)^3+(\gamma^2-\alpha\beta)^3-3(\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\gamma\alpha)(\gamma^2-\alpha\beta)=$
$=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2$

524. $(\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta(1-\alpha-\beta)-1=(\alpha+\beta-1)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$.

Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης τοῦ Euler : (348).

525. $(\alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi)^2+(\beta x-\alpha y+\delta\omega-\gamma\varphi)^2+(\gamma x-\delta y-\alpha\omega+\beta\varphi)^2+$
$+(\delta x+\gamma y-\beta\omega-\alpha\varphi)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2+\omega^2+\varphi^2)$.

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (349).

526. $(y+\omega-2x)^4+(\omega+x-2y)^4+(x+y-2\omega)^4\equiv$
$\equiv 18(x^2+y^2+\omega^2-y\omega-\omega x-xy)^2$

527. $(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^4(\beta+\gamma)^2-\beta^4(\gamma+\alpha)^2-\gamma^4(\alpha+\beta)^2\equiv$
$\equiv 2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^3$

528. $(\alpha+\beta+\gamma)^4-(\beta+\gamma)^4-(\gamma+\alpha)^4-(\alpha+\beta)^4+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\equiv 12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$.

529. (277). Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

530. (278). Ἐὰν εἶναι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι :

εἴτε $\alpha+\beta+\gamma=0$, εἴτε $\alpha=\beta=\gamma$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (279).

531. $(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

532. $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)+2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+2(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)=2\tau^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$

533. $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)=\alpha\beta\gamma$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι : (351).

534. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$

535. $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=\beta(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)=\gamma(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)$

536. $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2+9\alpha\beta\gamma=0$

537. $(3\alpha-2\beta)^3+(3\beta-2\gamma)^3+(3\gamma-2\alpha)^3=3(3\alpha-2\beta)(3\beta-2\gamma)(3\gamma-2\alpha)$

538. $5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=6(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΡΗΤΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοὶ καὶ πράξεις ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων

190. Κλασματικαὶ παραστάσεις. *Κ λ α σ μ α τ ι κ ὴ π α ρ ά σ τ α σ ι ς λέγεται μία παράστασις τῆς μορφῆς* $\frac{A}{B}$, *ἡ ὁποία παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως μιᾶς παραστάσεως A διὰ μιᾶς ἄλλης παραστάσεως B.*

Π χ. αἱ παραστάσεις: $\frac{2\alpha-\beta^2}{3\beta-4\alpha\beta}$, $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

εἶναι κλασματικαὶ παραστάσεις.

Μία κλασματικὴ παράστασις τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}$ *λέγεται ρ η τ ή, ὅταν αἱ παραστάσεις A καὶ B εἶναι ῥηταί.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ παράστασις $\frac{A}{B}$ λέγεται ρ η τ ὴ κ λ α σ μ α τ ι κ ὴ π α ρ ά σ τ α σ ι ς ἢ καὶ ἁπλῶς ρ η τ ὸ ν κ λ ά σ μ α.

Αἱ παραστάσεις A καὶ B λέγονται ὅ ρ ο ι τοῦ ῥητοῦ κλάσματος καὶ ὁ μὲν A λέγεται ἀ ρ ι θ μ η τ ή ς, ὁ δὲ B π α ρ ο ν ο μ α σ τ ὴ ς αὐτοῦ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$, πρέπει ὁ παρονομαστής του B νὰ εἶναι δ ι ά φ ο ρ ο ς τ ο ῦ μ η δ ε ν ό ς.

Οὕτω τὸ κλάσμα $\frac{3x}{x-4}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν διὰ $x=4$.

Λέγομεν, ὅτι δὲν εἶναι ὠ ρ ι σ μ έ ν ο ν διὰ $x=4$.

191. Ἰδιότητες τῶν κλασματικῶν παραστάσεων. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰς παραστάσεις A καὶ B μὲ τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς των, ἡ κλασματικὴ παράστασις $\frac{A}{B}$ γίνεται ἕνα ἀριθμητικὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα· ἑπομένως αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, τοῦ πολλαπλασια-

σμοῦ, τῆς διαιρέσεως... τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 81 ἕως 87 ἐπεκτείνονται καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων.

192. Ἁπλοποίησις κλασματικῶν παραστάσεων. *Ἁπλοποίησις μιᾶς κλασματικῆς παραστάσεως λέγεται ἡ εὕρεσις μιᾶς ἄλλης κλασματικῆς παραστάσεως, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι νὰ εἶναι μικροτέρου βαθμοῦ καὶ ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν κλασματικὴν παράστασιν.*

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν κλασματικὴν παράστασιν ἐφαρμόζομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών: *Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν μίαν κλασματικὴν παράστασιν :*

1ον. Ἀναλύομεν, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀνάγκη, καὶ τοὺς δύο ὅρους της εἰς γινόμενον παραγόντων.

2ον. Ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς τοὺς δύο ὅρους της· δηλ. διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους της διὰ τῶν κοινῶν αὐτῶν παραγόντων.

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος αὐτοῦ διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

I. *Οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι ἀκέραια μονώνυμα.*

Παράδειγμα. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{21\alpha^3\beta^3\gamma\delta^2}{-14\alpha\beta^2\delta^4}$.

Θέτομεν τὸν $7\alpha\beta^2\delta^2$ ὡς κοινὸν παράγοντα καὶ ἔπειτα τὸν ἐξαλείφομεν ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι $7\alpha\beta^2\delta^2 \neq 0$

$$\frac{21\alpha^3\beta^3\gamma\delta^2}{-14\alpha\beta^2\delta^4} = -\frac{7\alpha\beta^2\delta^2 \times 3\alpha\beta\gamma}{7\alpha\beta^2\delta^2 \times 2\delta^2} = -\frac{3\alpha\beta\gamma}{2\delta^2}.$$

II. *Οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι πολυώνυμα.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀναλύομεν τὰ πολυώνυμα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους διὰ τῶν κοινῶν παραγόντων, δηλ. ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας.

Παράδειγμα. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $A = \frac{3\alpha x^2 - 12\alpha xy + 12\alpha y^2}{6\alpha x^2 - 24\alpha y^2}$.

Ἀναλύομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του εἰς γινόμενον παραγόντων :

Ὁ ἀριθμητὴς γράφεται : $3\alpha(x^2 - 4xy + 4y^2) = 3\alpha(x-2y)^2$

Ὁ παρονομαστὴς γράφεται : $6\alpha(x^2 - 4y^2) = 6\alpha(x+2y)(x-2y)$.

Καὶ τὸ δοθὲν κλάσμα δύναται νὰ γραφῇ :

$$A = \frac{3\alpha(x-2y)^2}{6\alpha(x+2y)(x-2y)} = \frac{x-2y}{2(x+2y)}.$$

Ἀσκήσεις : 539, 541, 542, 544, 546, 548, 550, 551, 553.

193. Τροπὴ ἑτερωνύμων ρητῶν κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα. Τὰ ρητὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν λέγονται ὁ μ ώ ν υ μ α, ἄλλως λέγονται ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α.

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα ρητὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, χρησιμοποιοῦμεν τὰς αὐτὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα (§ 84. 2ον).

Α' τρόπος. ***Κανών***: *Διὰ νὰ τρέψωμεν πολλὰ ρητὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ἁπλοποιοῦμεν πρῶτον αὐτά, ἐὰν εἶναι δυνατὸν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ρητοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων.*

Παράδειγμα. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ ρητὰ κλάσματα:

$$\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha^2},\quad \frac{\beta^2-\alpha\beta}{\beta\gamma},\quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}.$$

Ἁπλοποιοῦμεν τὰ κλάσματα καὶ λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha},\quad \frac{\beta-\alpha}{\gamma},\quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}.$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ βγ, τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ αβ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ αγ καὶ λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{\beta\gamma(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma},\quad \frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{\alpha\beta\gamma},\quad \frac{\alpha\gamma(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}.$$

Β' τρόπος. Ὅταν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων ἔχουν κ ο ι ν ο ὺ ς π α ρ ά γ ο ν τ α ς, εἶναι προτιμότερον νὰ λαμβάνωμεν, ὡς κοινὸν παρονομαστήν, τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Παράδειγμα. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα:

$$\frac{3(\alpha+\beta)}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2},\quad \frac{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3-\beta^3},\quad \frac{4}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Ἁπλοποιοῦμεν τὰ κλάσματα. Τὸ πρῶτον κλάσμα γράφεται:

$$\frac{3(\alpha+\beta)}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}=\frac{3(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2}=\frac{3}{\alpha+\beta}.$$

τὸ δεύτερον κλάσμα γράφεται:

$$\frac{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3-\beta^3}=\frac{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}=\frac{2}{\alpha-\beta}.$$

τὸ τρίτον κλάσμα γράφεται:

$$\frac{4}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{4}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}.$$

Ἔχομεν τώρα νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα:

$$\frac{3}{\alpha+\beta},\quad \frac{2}{\alpha-\beta},\quad \frac{4}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} \tag{1}$$

Ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων (1) θὰ εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων αὐτῶν, δηλ. τὸ (α+β)(α−β).

Διαιροῦμεν τὸ ἑ.κ.π. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ δι' ἑκάστου ἐκ τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων (1) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκα, ἀντιστοίχως

$$\alpha-\beta,\quad \alpha+\beta,\quad 1.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ $\alpha-\beta$, τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ $\alpha+\beta$ καὶ τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ 1 καὶ λαμβάνομεν τὰ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα:

$$\frac{3(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)},\quad \frac{2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)},\quad \frac{4}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

ἢ
$$\frac{3(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2},\quad \frac{4}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Ἀσκήσεις: 561, 563, 565.

194. Πράξεις ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων γίνονται, ὅπως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων (§ 85, 86, 87).

195. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ῥητῶν κλασμάτων. ***Κανών:*** *Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πολλῶν κλασμάτων, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:*

1ον. Ἀναλύομεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων εἰς γινόμενον παραγόντων.

2ον. Ἁπλοποιοῦμεν τὰ κλάσματα, ἐὰν τοῦτο εἶναι δυνατόν.

3ον. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἑ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν των.

4ον. Σχηματίζομεν ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

5ον. Ἁπλοποιοῦμεν τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον, ἐὰν εἶναι δυνατόν.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$A=\frac{3\alpha}{5\beta x^2}+\frac{2\beta-x}{15\alpha^2x}+\frac{\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}.$$

Τὸ ἑ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων εἶναι: $15\alpha^2\beta x^2$.

Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἑ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν καὶ ἔχομεν:

$$A=\frac{3\alpha\cdot3\alpha^2}{15\alpha^2\beta x^2}+\frac{(2\beta-x)\beta x}{15\alpha^2\beta x^2}+\frac{\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}=\frac{9\alpha^3+(2\beta-x)\beta x+\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}$$

$$=\frac{9\alpha^3+2\beta^2x-\beta x^2+\beta x^2-9\alpha^3}{15\alpha^2\beta x^2}=\frac{2\beta^2x}{15\alpha^2\beta x^2}=\frac{2\beta}{15\alpha^2x}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$A=\frac{5}{2x-4}-\frac{x}{x^2+2x}-\frac{x+10}{2x^2-8}.$$

Ἐπειδὴ $2x-4=2(x-2)$, $x^2+2x=x(x+2)$,
καὶ $2x^2-8=2(x^2-4)=2(x+2)(x-2)$
τὸ δοθὲν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα γράφεται:

$$A=\frac{5}{2(x-2)}-\frac{x}{x(x+2)}-\frac{x+10}{2(x-2)(x+2)}.$$

Ἀπλοποιοῦμεν τὸ δεύτερον κλάσμα καὶ ἔχομεν:

$$A=\frac{5}{2(x-2)}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2(x-2)(x+2)}.$$

Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι $2(x-2)(x+2)$ καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{5(x+2)}{2(x+2)(x-2)}-\frac{2(x-2)}{2(x+2)(x-2)}-\frac{x+10}{2(x+2)(x-2)}.$$

Σχηματίζομεν ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν τελευταίων κλασμάτων καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν $2(x+2)(x-2)$ καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{5(x+2)-2(x-2)-(x+10)}{2(x+2)(x-2)}.$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις κλπ. εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{5x+10-2x+4-x-10}{2(x+2)(x-2)}=\frac{2x+4}{2(x+2)(x-2)}=\frac{2(x+2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$A=\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},\quad (\alpha\neq\beta\neq\gamma).$$

Οἱ 6 παράγοντες, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς τοὺς παρονομαστάς, δύνανται νὰ ἀναχθοῦν εἰς 3, ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι

$$\alpha-\gamma=-(\gamma-\alpha),\quad \beta-\alpha=-(\alpha-\beta),\quad \gamma-\beta=-(\beta-\gamma).$$

Ὥστε τὸ δοθὲν ἄθροισμα δύναται νὰ γραφῇ:

$$A=\frac{-\alpha}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}+\frac{-\beta}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{-\gamma}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}\qquad(1)$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθμοισμα (1) γράφεται

$$A=\frac{-\alpha(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{-\beta(\gamma-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{-\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

$$=\frac{-\alpha(\beta-\gamma)-\beta(\gamma-\alpha)-\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{-\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=\frac{0}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=0.$$

Ἀσκήσεις: *567, 570, 571, 573, 575, 577, 579, 581, 583, 585, 587, 589, 591, 593.*

196. Πολλαπλασιασμὸς ῥητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Κανών: *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα σχηματίζομεν ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν των καὶ ὡς παρονομαστὴν*

τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν των. Ἔπειτα ἁπλοποιοῦμεν τὸ προκῦπτον κλάσμα, ἐὰν εἶναι δυνατόν.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\frac{3\alpha^2\beta}{4xy^2}\cdot\frac{8x^2y\omega}{9\alpha^3\beta^2\gamma}$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{3\alpha^2\beta}{4xy^2}\cdot\frac{8x^2y\omega}{9\alpha^3\beta^2\gamma}=\frac{3\alpha^2\beta\cdot 8x^2y\omega}{4xy^2\cdot 9\alpha^3\beta^2\gamma}=\frac{2x\omega}{3\alpha\beta y\gamma}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\frac{3\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{6\beta^2}$.

Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{3\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{6\beta^2}=\frac{3\alpha\beta\cdot(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha-\beta)\cdot 6\beta^2}=\frac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)\cdot 6\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{2\beta}.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον

$$\Gamma=\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὴν πρώτην παρένθεσιν καὶ ἔχομεν

$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2}{(x+y)(x-y)}.$$

Ὁμοίως ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὴν δευτέραν παρένθεσιν καὶ ἔχομεν $\frac{x^2+y^2}{2xy}+1=\frac{x^2+y^2+2xy}{2xy}=\frac{(x+y)^2}{2xy}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ δοθὲν γινόμενον τοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐντὸς παρενθέσεων, μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$\Gamma=\frac{2x^2+2y^2}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{(x+y)^2}{2xy}\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{2(x^2+y^2)\cdot(x+y)^2\cdot xy}{(x+y)(x-y)\cdot 2xy(x^2+y^2)}=\frac{x+y}{x-y}.$$

Ἀσκήσεις : 636, 638, 640, 645, 646, 649, 652, 654, 661, 664, 666, 669.

197. Διαίρεσις ῥητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων. ***Κανών:*** *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα κλάσμα δι' ἄλλου κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον· ἔπειτα ἁπλοποιοῦμεν, ἐὰν τοῦτο εἶναι δυνατόν.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις $\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma}{4x^2y}:\frac{9\alpha^3\beta\gamma^2}{8xy^2\omega}$.

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως κλασμάτων θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma}{4x^2y}:\frac{9\alpha^3\beta\gamma^2}{8xy^2\omega}=\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma}{4x^2y}\cdot\frac{8xy^2\omega}{9\alpha^3\beta\gamma^2}=\frac{3\alpha^2\beta^3\gamma\cdot 8xy^2\omega}{4x^2y\cdot 9\alpha^3\beta\gamma^2}=\frac{2\beta^2y\omega}{3\alpha\gamma x}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις $\frac{x^2-4\alpha^2}{x^2+4\alpha x}:\frac{x^2-2\alpha x}{\alpha x+4\alpha^2}$.

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως κλασμάτων θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x^2-4\alpha^2}{x^2+4\alpha x}:\frac{x^2-2\alpha x}{\alpha x+4\alpha^2}=\frac{x^2-4\alpha^2}{x^2+4\alpha x}\cdot\frac{\alpha x+4\alpha^2}{x^2-2\alpha x}=\frac{(x^2-4\alpha^2)(\alpha x+4\alpha^2)}{(x^2+4\alpha x)(x^2-2\alpha x)}=$$

$$=\frac{(x+2\alpha)(x-2\alpha)\alpha(x+4\alpha)}{x(x+4\alpha)x(x-2\alpha)}=\frac{\alpha(x+2\alpha)}{x^2}.$$

Ἀσκήσεις : 671, 674, 678, 680, 682, 684, 686, 688.

198. Σύνθετα κλάσματα. *Σύνθετον κλάσμα λέγεται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἕνας τοὐλάχιστον τῶν ὅρων του εἶναι κλασματικὴ παράστασις.*

Π. χ. Τὰ κλάσματα

$$\frac{\dfrac{1}{\alpha+\beta}}{\dfrac{1}{\alpha-\beta}},\qquad \frac{\dfrac{\alpha}{\beta}-x}{\dfrac{\alpha}{\beta}+x},\qquad \frac{\alpha-\beta}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}}$$

εἶναι σύνθετα κλάσματα

199 Ἁπλοποίησις συνθέτου κλάσματος. Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα σύνθετον κλάσμα, δηλ. διὰ νὰ τρέψωμεν αὐτὸ εἰς ἰσοδύναμον ἁ π λ ο ῦ ν κλάσμα, ἐφαρμόζομεν μίαν ἐκ τῶν δύο κάτωθι μεθόδων

Πρώτη μέθοδος. **Κανών** : *Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα σύνθετον κλάσμα τρέπομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλᾶ κλάσματα καὶ διαιροῦμεν ἔπειτα τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ σύνθετον κλάσμα :

$$A=\frac{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}},$$

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ συνθέτου κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}:\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}=\frac{(\alpha^3+\beta^3)(\alpha-\beta)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}=1.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ σύνθετον κλάσμα :

$$K=\frac{\dfrac{3}{\alpha-2}-\dfrac{2}{\alpha-3}}{\dfrac{1}{\alpha-3}-\dfrac{1}{\alpha-2}}$$

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ συνθέτου κλάσματος γράφεται

$$\frac{3}{\alpha-2}-\frac{2}{\alpha-3}=\frac{3(\alpha-3)-2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-3)}=\frac{3\alpha-9-2\alpha+4}{(\alpha-2)(\alpha-3)}=\frac{\alpha-5}{(\alpha-2)(\alpha-3)}.$$

Ὁ παρονομαστής του γράφεται

$$\frac{1}{\alpha-3}-\frac{1}{\alpha-2}=\frac{(\alpha-2)-(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\alpha-2)}=\frac{\alpha-2-\alpha+3}{(\alpha-3)(\alpha-2)}=\frac{1}{(\alpha-3)(\alpha-2)}.$$

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του καὶ ἔχομεν:

$$K=\frac{\alpha-5}{(\alpha-2)(\alpha-3)}:\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha-3)}=\frac{\alpha-5}{(\alpha-2)(\alpha-3)}\cdot\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1}=\alpha-5.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα:

$$A=\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}}.$$

Ἁπλοποιοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὸ σύνθετον κλάσμα τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$1+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x+x+1}{3-x}=\frac{4}{3-x},$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}=\frac{1}{\dfrac{4}{3-x}}=1:\frac{4}{3-x}=\frac{3-x}{4},$$

$$x+\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}=x+\frac{3-x}{4}=\frac{4x+3-x}{4}=\frac{3x+3}{4},$$

ὁπότε τὸ σύνθετον κλάσμα γίνεται

$$A=\frac{1}{\dfrac{3x+3}{4}}=1:\frac{3x+3}{4}=\frac{4}{3x+3}=\frac{4}{3(x+1)}.$$

Δευτέρα μέθοδος. **Κανών**: *Διὰ νὰ ἁ π λ ο π ο ι ή σ ω μ ε ν ἕ ν α σ ύ ν θ ε τ ο ν κ λ ά σ μ α πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του.*

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τό σύνθετον κλάσμα

$$A=\frac{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του, δηλ. ἐπὶ $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ καὶ ἔχομεν

$$A=\frac{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}\right)\cdot(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)}{\alpha(\alpha+\beta)-\beta(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$A=\frac{\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}-1}-\frac{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του, δηλ. ἐπὶ αβ καὶ ἔχομεν

$$1\text{ον συνθετ. κλάσμα} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot\alpha\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-1\right).\alpha\beta} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου συνθέτου κλάσματος ἐπὶ $\alpha^2\beta$ καὶ ἔχομεν

$$2\text{ον συνθετ. κλάσμα} = \frac{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\cdot\alpha^2\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right).\alpha^2\beta} = \frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν παράστασιν τὰ σύνθετα κλάσματα μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$A = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta} - \frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^3+\beta^3} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta} - \frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)} = \frac{\alpha^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)} =$$

$$= \frac{\alpha^3-2\alpha\beta^2-2\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}.$$

Ἀσκήσεις: 693, 699, 704, 707, 710, 712, 717, 723, 727, 731, 734, 736, 744.

2. Ἰδιαίτεραι μορφαὶ τῶν κλασμάτων

200. Ἰδιαίτεραι μορφαὶ τῶν κλασμάτων. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις τοῦ λογισμοῦ τῶν κλασματικῶν παραστάσεων τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}$ παρεδέχθημεν, ὅτι ὁ παρονομαστὴς Β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Δύναται ὅμως νὰ συμβῇ ὥστε, ὅταν ὑπολογίζωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἑνὸς κλάσματος, δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων του, ὁ ἕνας ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι του νὰ εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν.

Π. χ. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{x-1}{y+2}$.

διὰ $x=1$ καὶ $y=2$ ἔχομεν $\frac{1-1}{2+2}=\frac{0}{4}$ $\left(\text{μορφὴ } \frac{0}{\alpha}\right)$

διὰ $x=-1$ καὶ $y=-2$ » $\frac{-1-1}{-2+2}=\frac{-2}{0}$ $\left(\text{μορφὴ } \frac{\alpha}{0}\right)$

διὰ $x=1$ καὶ $y=-2$ » $\frac{1-1}{-2+2}=\frac{0}{0}$ $\left(\text{μορφὴ } \frac{0}{0}\right)$

Εἰς τὰς § 71 καὶ 77 ἐδείξαμεν, ὅτι :

1. *Ἕνα κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{0}{\alpha}$ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν.*

2. *Ἕνα κλάσμα τῆς μορφῆς* $\frac{\alpha}{0}$ *δὲν ἔχει καμμίαν ἀριθμητικὴν τιμήν.*

Τὸ σύμβολον $\frac{\alpha}{0}$ δὲν παριστάνει κανένα πηλίκον· παριστάνει τὸ σύμβολον τοῦ ἀδυνάτου λογισμοῦ.

Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἕνα κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς μένει ἀμετάβλητος, αὐξάνει, ὅταν ὁ παρονομαστής του ἐλαττοῦται.

Π. χ. $\frac{5}{1}=5,\quad \frac{5}{0,1}=50,\quad \frac{5}{0,01}=500,\quad \frac{5}{0,00001}=500000.$

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ 0, ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος γίνεται μεγαλυτέρα ἀπὸ κάθε ἀριθμόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ κλάσμα τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἡ μορφὴ λοιπὸν $\frac{\alpha}{0}$ *παριστάνει τὸ σύμβολον τοῦ ἀπείρου* (∞) *ἢ τὸ σύμβολον τῆς ἀδυναμίας.*

3. *Ἕνα κλάσμα τῆς μορφῆς* $\frac{0}{0}$ *ἔχει μίαν ἀπροσδιόριστον τιμήν*

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ ἀοριστία αὐτὴ εἶναι φαινομενικὴ καὶ προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ὑπάρχει ἕνας κοινὸς παράγων, ὁ ὁποῖος γίνεται μηδὲν διὰ μερικὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων του. Ἐὰν ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα αὐτόν, ἐξαλείφομεν καὶ τὴν ἀοριστίαν τοῦ κλάσματος.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος $K=\frac{x^2-4}{3x-6}$ (1) διὰ $x=2$.

Διὰ $x=2$ τὸ κλάσμα λαμβάνει τὴν μορφὴν $K=\frac{4-4}{6-6}=\frac{0}{0}$.

Ἂν ἀναλύσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ ἁπλοποιήσωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$K=\frac{x^2-4}{3x-6}=\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\frac{x+2}{3} \qquad (2).$$

Διὰ $x=2$, τὸ τελευταῖον κλάσμα γίνεται $K=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$.

Διὰ κάθε ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=2$, τὰ κλάσματα (1) καὶ (2) ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν καὶ διὰ τοῦτο τὸ κλάσμα (2) λέγεται ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος (1) διὰ $x=2$.

Παράδειγμα 2ον Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος.

$$K=\frac{x^2+4x-21}{x^2+2x-15} \quad \text{διὰ } x=3.$$

Τὸ δοθὲν κλάσμα διὰ $x=3$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$.

Ἀφοῦ καὶ οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος K μηδενίζωνται διὰ $x=3$, ἔπεται, ὅτι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ $x-3$ καὶ ἑπομένως ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν $x-3$. Τὸ δοθὲν κλάσμα δύναται λοιπὸν νὰ γραφῇ

$$K = \frac{x^2+4x-21}{x^2+2x-15} = \frac{(x-3)(x+7)}{(x-3)(x+5)} = \frac{x+7}{x+5} \quad (2).$$

Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ $x \neq 3$, τὸ δοθὲν κλάσμα λαμβάνει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ κλάσμα (2).

Διὰ $x=3$ τὸ κλάσμα (2) λαμβάνει τὴν τιμὴν $\frac{3+7}{3+5} = \frac{10}{8}$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Ἀσκήσεις: 745, 747, 749.

3. Ἀναλογίαι

201. Λόγος δύο ἀριθμῶν. *Λόγος δύο ἀριθμῶν ἢ δύο παραστάσεων α καὶ β λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.*

Π.χ. ὁ λόγος τοῦ α καὶ β εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\alpha : \beta$.

Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν ἔχει τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων.

202. Ἀναλογία. *Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται ἀναλογία.*

Π.χ. Ἡ ἰσότης $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ εἶναι ἀναλογία.

Ἐπίσης, ἐὰν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσοι, συνιστοῦν μίαν ἀναλογίαν. Ἡ ἀναλογία αὐτὴ γράφεται:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad ἢ \quad \alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ λέγονται ὅροι τῆς ἀναλογίας· οἱ α καὶ δ λέγονται ἄκροι ὅροι καὶ οἱ β καὶ γ μέσοι ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς ἀναλογίας λέγεται τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἄλλων.

Π.χ. εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ὁ δ εἶναι ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν ἄλλων ὅρων της α, β, γ.

Ἡ ἀναλογία ἔχει τὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.

203. Συνεχὴς ἀναλογία. *Μία ἀναλογία λέγεται συνεχὴς ἀναλογία, ὅταν οἱ μέσοι ὅροι της εἶναι ἴσοι.*

Π.χ. ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ εἶναι συνεχὴς ἀναλογία.

Ὁ μέσος ὅρος β λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων ὅρων.

Ὁ πρῶτος ἢ ὁ τέταρτος ὅρος μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας λέγονται τρίτος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων.

Π.χ. εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$, τρίτος ἀνάλογος εἶναι ὁ α ἢ ὁ γ.

204. Συνεχεῖς λόγοι. *Συνεχεῖς λόγοι ἢ συνεχῆ κλάσματα λέγονται μία σειρὰ ἴσων κλασμάτων, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀριθμητὴς τοῦ ἑπομένου.*

Π.χ. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶναι συνεχεῖς.

205. Ἰδιότητες ἀναλογίας. I. Ἰδιότης ***Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω ἡ ἀναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\alpha\delta=\beta\gamma$.

Ὑπόθ.	$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$
Συμπ.	$\alpha\delta=\beta\gamma$

Ἀπόδειξις : Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἐπὶ βδ (δηλ. ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν), ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\delta=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\delta$ ἢ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν $\alpha\delta=\beta\gamma$.

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν εἶναι $\alpha\delta=\beta\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

Πράγματι· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha\delta=\beta\gamma$ διὰ βδ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}=\frac{\beta\gamma}{\beta\delta} \quad ἢ \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης τῶν ἀναλογιῶν εἶναι θεμελιώδης.

206. Ἐφαρμογαί. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, ὅταν μᾶς δοθοῦν οἱ ἄλλοι τρεῖς ὅροι της.

Πρόβλημα 1ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας*

$$\alpha:\beta=\gamma:x.$$

Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν θὰ εἶναι

$$\alpha x=\beta\gamma \qquad (1)$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) διὰ α καὶ ἔχομεν

$$x = \frac{\beta\gamma}{\alpha}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανὼν Ι*: Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα ἄκρον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο μέσους ὅρους της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου ὅρου της.*

Πρόβλημα 2ον. *Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας*

$$\alpha : x = \beta : \gamma.$$

Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν

$$x\beta = \alpha\gamma \quad ἢ \quad x = \frac{\alpha\gamma}{\beta}.$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι:

Κανὼν ΙΙ*: Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἕνα μέσον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ἄκρους ὅρους της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου ὅρου της.*

207 Ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας

$$\frac{17(\alpha-2\beta)}{x} = \frac{51(\alpha^2-4\beta^2)}{6(\alpha+2\beta)}.$$

Κατὰ τὸν ΙΙ κανόνα τῆς § 206 θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{17(\alpha-2\beta)\cdot 6(\alpha+2\beta)}{51(\alpha^2-4\beta^2)} = \frac{17\cdot 6(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)}{51(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)} = 2.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος ὅρος x τῆς ἀναλογίας

$$\left(\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}\right) : (\alpha^2+\beta^2) = \left(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha}\right) : x.$$

Κατὰ τὸν Ι κανόνα τῆς § 206, θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\left(\alpha-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}{\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}}{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}} = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2} = \alpha^2-\beta^2.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν μέσον ἀνάλογον, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta} : x = x : \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad ἢ \quad x^2 = \frac{\alpha\gamma}{\beta}\cdot\frac{\alpha\beta}{\gamma} \quad ἢ \quad x^2 = \alpha^2, \quad ἄρα \quad x = \pm\alpha.$$

Ἀσκήσεις: 750, 752, 754.

208. ΙΙ. Ἰδιότης ***Ἐὰν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων ὅρων της ἢ τῶν μέσων ὅρων της, προκύπτει πάλιν ἀναλογία.***

'Υπόθεσις: Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1)

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$.

'Υπόθ.	$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$
Συμπ.	$\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

'Απόδειξις: 'Από τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν (1) ἔχομεν, κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν

$$\alpha\delta=\beta\gamma \qquad (2)$$

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ αβ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha\delta}{\alpha\beta}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

'Ομοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ γδ, θὰ λάβωμεν

$$\frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}.$$

'Ασκήσεις: 757, 758 759, 764.

209. III 'Ιδιότης. ***'Εὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) ***θὰ ἔχωμεν ἐπίσης καὶ*** $\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$.

'Απόδειξις: 'Εὰν προσθέσωμεν τὴν μονάδα καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}.$$

'Εὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν μονάδα καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}-1=\frac{\gamma}{\delta}-1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}.$$

210. IV. 'Ιδιότης. ***'Εὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) ***θὰ ἔχωμεν ἐπίσης καὶ τὴν*** $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$.

'Απόδειξις: 'Από τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν (1) ἔχομεν (§ 209) $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$ ἤ, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων της,

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\beta}{\delta} \qquad (2)$$

'Ομοίως ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν ἀναλογίαν (1) ἔχομεν (§ 209)

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\delta} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των, δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}.$$

Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων τῆς τελευταίας ἀναλογίας, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}.$$

Ἀσκήσεις: 765, 766, 767, 768.

211. Θεώρημα. ***Ἐὰν πολλὰ κλάσματα εἶναι ἴσα μεταξύ των, τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν, εἶναι ἴσον μὲ καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα αὐτά.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ἴσα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha''}{\beta''} \ldots$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\ldots=\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{\beta+\beta'+\beta''+\ldots}.$$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ λ τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\ldots=\lambda.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν (§ 68), ἐπειδὴ εἶναι :

$\frac{\alpha}{\beta}=\lambda$ θὰ εἶναι $\alpha=\beta\lambda$ (1)

$\frac{\alpha'}{\beta'}=\lambda$ θὰ εἶναι $\alpha'=\beta'\lambda$ (2)

$\frac{\alpha''}{\beta''}=\lambda$ θὰ εἶναι $\alpha''=\beta''\lambda$ (3)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν $\alpha+\alpha'+\alpha''=\beta\lambda+\beta'\lambda+\beta''\lambda$ ἢ $\alpha+\alpha'+\alpha''=(\beta+\beta'+\beta'')\lambda$ (4)

Ἐὰν $\beta+\beta'+\beta''\neq 0$ διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (4) διὰ $\beta+\beta'+\beta''$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\beta+\beta'+\beta''}=\lambda=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}.$$

Ὥστε εἶναι

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\ldots\ldots=\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{\beta+\beta'+\beta''+\ldots}}$$

212. Πόρισμα. ***Ἐὰν εἶναι*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$ ***θὰ εἶναι καὶ***

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\mu\alpha+\mu'\alpha'+\mu''\alpha''}{\mu\beta+\mu'\beta'+\mu''\beta''}$$

ὅπου οἱ ἀριθμοὶ μ, μ', μ'' ***εἶναι οἱοιδήποτε θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός.***

Ἀπόδειξις : Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἀξία ἑνὸς κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (§ 82). Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\mu\alpha}{\mu\beta}=\frac{\mu'\alpha'}{\mu'\beta'}=\frac{\mu''\alpha''}{\mu''\beta''}.$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ προηγούμενον θεώρημα εἰς τὰ ἴσα κλάσματα

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta}=\frac{\mu'\alpha'}{\mu'\beta'}=\frac{\mu''\alpha''}{\mu''\beta'}$$

θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\mu\alpha}{\mu\beta}=\frac{\mu'\alpha'}{\mu'\beta'}=\frac{\mu''\alpha''}{\mu''\beta''}=\frac{\mu\alpha+\mu'\alpha'+\mu''\alpha''}{\mu\beta+\mu'\beta'+\mu''\beta''}.$$

Ἀσκήσεις : 769, 770, 771, 772, 773, 774, 776.

Ἀσκήσεις

Ἁπλοποίησις κλασμάτων :

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα: (280).

539. 1. $\frac{3x^3}{6xy}$ 2. $\frac{12\alpha^2x}{18\alpha x^2}$ 3. $\frac{5\alpha\beta x}{30\beta\gamma x}$ 4. $\frac{-7\alpha xy^2}{21\alpha^2x^2y^2}$.

540. 1. $\frac{-12\alpha^3\beta x^4}{36\alpha^2\beta^2x^3}$ 2. $\frac{3\mu^2\nu x}{8\mu^3\nu^2y^2}$ 3. $\frac{57\mu^2\nu^2}{-19\mu\nu^2}$ 4. $\frac{63\alpha^3\beta^2x}{45\alpha^4\beta x^2}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα : (281).

541. 1. $\frac{\alpha+\alpha\beta}{\beta+\beta^2}$ 2. $\frac{3\alpha x+6\alpha^2}{5\beta x+10\alpha\beta}$ 3. $\frac{7\alpha-7\beta-7\gamma}{35\alpha-35\beta-35\gamma}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα : (282).

542. 1. $\frac{\alpha x^2-\alpha^3}{\beta x^2-\alpha^2\beta}$ 2. $\frac{2\alpha-3}{4\alpha^2-9}$ 3. $\frac{4x^2-25}{2x+5}$.

543. 1. $\frac{x^3+3x^2}{x^2-9}$ 2. $\frac{\alpha^2\beta-\alpha\beta}{\alpha^2-1}$ 3. $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$.

544. 1. $\frac{4\alpha^2-9\beta^2}{12\alpha x+18\beta x}$ 2. $\frac{16-25\beta^2}{8\alpha-10\alpha\beta}$ 3. $\frac{\alpha^4-x^4}{\alpha^3x-\alpha x^3}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα: (283).

545. 1. $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$ 2. $\frac{6\mu+6}{3\mu^2+6\mu+3}$ 3. $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$.

546. 1. $\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ 2. $\frac{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}$ 3. $\frac{(x-1)(x+1)^2}{x^3-x}$.

547. 1. $\frac{\alpha^2-1}{5\alpha^2-10\alpha+5}$ 2. $\frac{4x^2-8x+4}{x^2-x}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα: (284).

548. 1. $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 2. $\dfrac{x^2+x}{x^3+1}$.

549. 1. $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$ 2. $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$.

550. 1. $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$ 2. $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα: (285).

551. 1. $\dfrac{x^2-(2x-3)^2}{x^2-1}$ 2. $\dfrac{x^3+2\alpha x^2+\alpha^2 x}{3\alpha x^2-3\alpha^3}$.

552. 1. $\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+2\alpha\gamma}$ 2. $\dfrac{1-x^2+x^3-x^5}{1+x-x^3-x^4}$.

553. 1. $\dfrac{x^8-1}{(x^4+1)(x^2-1)}$ 2. $\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha^2+\alpha\beta}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα: (365).

554. $A=\dfrac{\alpha\beta(x^2+y^2)+xy(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(x^2-y^2)+xy(\alpha^2-\beta^2)}$

555. $A=\dfrac{(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma-\beta^2)}$

556. $A=\dfrac{(x^2+x-1)(x^2-x+1)-(x^2+x+1)(x^2-x-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(x^2-x-1)}$

557. $A=\dfrac{x^5+x^2y^3-x^4y-xy^4}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα: (366).

558. $\dfrac{x^2+\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma+2\alpha x-\gamma^2}{x^2+\beta^2-\alpha^2+2\beta x-2\alpha\gamma-\gamma^2}$

559. $\dfrac{7\alpha^3-2\alpha^2\beta-63\alpha\beta^2+18\beta^3}{5\alpha^4-3\alpha^3\beta-45\alpha^2\beta^2+27\alpha\beta^3}$

560. $\dfrac{\alpha^3(\beta^2-\gamma^2)+\beta^3(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma^3(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)}$.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα:

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα: (286).

561. $\dfrac{3}{4x}$, $\dfrac{4}{6x^2}$, $\dfrac{5}{12x^3}$

562. $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{3}{4x+4}$, $\dfrac{x}{x^2-1}$

563. $\dfrac{\alpha}{x-\alpha}$, $\dfrac{x}{\alpha-x}$, $\dfrac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$, $\dfrac{\alpha x}{\alpha^2-x^2}$

564. $\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

565. $\dfrac{1}{x-1}$, $\dfrac{x}{(x-1)^2}$, $\dfrac{x}{x+1}$, $\dfrac{5}{x^2-1}$

566. $\dfrac{\alpha}{x-\alpha}$, $\dfrac{\alpha+x}{x^2+\alpha x+\alpha^2}$, $\dfrac{\alpha x}{x^3-\alpha^3}$.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις κλασμάτων :

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : (287).

567. 1. $\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{4}$ 2. $\frac{x+y}{2}-\frac{x+2y}{3}$

568. $\frac{2\beta+\alpha}{3}-\frac{\alpha+\beta}{4}-\frac{\alpha+5\beta}{6}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : (288)

569. 1. $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}$ 2. $\frac{\alpha-\beta}{2\beta}-5+\frac{3\alpha\beta-\beta^2}{\beta^2}$

570. 1. $\frac{1}{10x^2}+\frac{5}{4x}-\frac{7}{5x}$ 2. $\frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma}+\frac{\gamma-\alpha}{\gamma\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : (289).

571. 1. $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}$ 2. $\frac{x-3}{x+3}+\frac{3+x}{3-x}$ 3. $\frac{\alpha-\beta}{\beta}+\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : (290).

572. 1. $\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}$ 2. $\frac{\alpha}{x-\alpha}-\frac{\alpha^2}{x^2-\alpha^2}$

273. 1. $\frac{\alpha+1}{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha-1}{(x-\alpha)^2}$ 2. $\frac{1}{x-y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$

574. 1. $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}-\frac{x}{x-1}$ 2. $\frac{\alpha x}{\alpha^2-x^2}-\frac{\alpha-x}{\alpha+x}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : (291).

575. 1. $\mu-\frac{\mu+\nu}{2}$ 2. $x-\frac{x}{x-1}$ 3. $\alpha-x+\frac{x^2}{\alpha+x}$

576. 1. $x+y-\frac{x^2-y^2}{x+2y}$ 2. $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-(\alpha-\beta)$ 3. $\frac{4-2x+x^2}{2-x}-(2+x)$

577. $x+y-\frac{2xy-y^2}{x+y}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : (292).

578. $\frac{\alpha}{\alpha-x}+\frac{3\alpha}{\alpha+x}-\frac{2\alpha x}{\alpha^2-x^2}$

579. $\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x(x+1)}$

580. $\frac{\alpha}{\alpha-1}-\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}$

581. $\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{4x^2-1}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα : (293).

582. $\frac{30\alpha}{9\alpha^2-1}+\frac{4}{3\alpha-1}-\frac{5}{3\alpha+1}$

583. $\frac{3}{2x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2-8}$

584. $\frac{4\alpha\beta+2\beta^2-12\alpha^2}{3\alpha^2-3\beta^2}+\frac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}+\frac{7}{3\alpha+3\beta}$

585. $\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha-2\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{2\alpha+2\beta}+\dfrac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

Νά ύπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀλγεβρικά ἀθροίσματα: (294).

586. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x}{1-x^2}$

587. $\dfrac{10}{3+y}-\dfrac{4}{3-y}+\dfrac{12(1-y)}{y^2-9}$

588. $\dfrac{1}{2(x-y)}-\dfrac{1}{2(x+y)}+\dfrac{y}{y^2-x^2}$

589. $\dfrac{x+1}{x-\alpha}+\dfrac{5\alpha+3x}{\alpha^2-x^2}-\dfrac{x-1}{\alpha+x}+\dfrac{3}{x-\alpha}$

590. $\dfrac{xy}{\alpha\beta}+\dfrac{(x-\alpha)(y-\alpha)}{\alpha(\alpha-\beta)}+\dfrac{(x-\beta)(y-\beta)}{\beta(\beta-\alpha)}$.

Νά ύπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀλγεβρικά ἀθροίσματα: (295).

591. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

592. $\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\alpha}{\alpha x}+\dfrac{\beta}{\beta x+2\beta}$

593. $\left(\dfrac{\alpha x}{x+1}-\dfrac{\alpha}{x-1}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\alpha x}{x-1}\right)$

594. $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x-1}{2x+2}-\dfrac{4x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

595. $\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}-\dfrac{2}{(x-2)(x-4)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

596. $\dfrac{4\alpha\beta+2\beta^2-12\alpha^2}{3(\alpha^2-\beta^2)}+\dfrac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{7\alpha}{3(\alpha+\beta)}+2$.

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (367).

597. $\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1-x+x^2}{1+x^3}-\dfrac{1+x+x^2}{1-x^3}-1$

598. $\dfrac{4\alpha-3\beta}{2\alpha-11\beta}-\dfrac{6\alpha+22\beta}{6\alpha-33\beta}-\dfrac{1}{2\alpha-11\beta}+1$

599. $\dfrac{x^2}{xy+y^2}+\dfrac{x^2+y^2}{xy}-\dfrac{y^2}{x^2+xy}$

600. $\dfrac{x^2+x+1}{(1-2x)^3}-\dfrac{x+1}{(1-2x)^2}+\dfrac{1}{1-2x}$.

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (368).

601. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$

602. $\dfrac{(2\alpha-3\beta)^2-\alpha^2}{4\alpha^2-(3\beta+\alpha)^2}+\dfrac{4\alpha^2-(3\beta-\alpha)^2}{9(\alpha^2-\beta^2)}+\dfrac{9\beta^2-\alpha^2}{(2\alpha+3\beta)^2-\alpha^2}$.

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (369).

603. $\dfrac{8}{(x^2+3)(x^2-1)}+\dfrac{2}{x^2+3}+\dfrac{1}{x+1}$

604. $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^3-\beta^3}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^3-\beta^3}$

605. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha x+\beta y}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha x-\beta y}+\dfrac{2(\alpha^2x+\beta^2y)}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}-\dfrac{4(\alpha^4x^3-\beta^4y^3)}{\alpha^4x^4-\beta^4y^4}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (370).

606. $\dfrac{4x^2}{(x+2)(4x-4)}-\dfrac{(3x+2)^2}{(x+2)(3x-6)}+\dfrac{(6x-4)^2}{(4x-4)(3x-6)}$

607. $\dfrac{3x-6}{x+1}-\dfrac{56x^2-84x}{(21x-14)(15-10x)}-3-\dfrac{4x^2-135x+225}{5(3x^2-2x)}$

608. $\dfrac{x^2}{3x-3}-\dfrac{(x+1)(x+2)}{7x+7}+\dfrac{10x}{6-6x}+\dfrac{7x^2+14x}{(x-1)(3x+6)}-\dfrac{1}{3}$

609. $\dfrac{\beta+1}{\beta-\alpha}+\dfrac{5\alpha+3\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\dfrac{\beta-1}{\alpha+\beta}+\dfrac{3}{\beta-\alpha}$

610. $\dfrac{x^3}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (371)

611. $\dfrac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$

612. $\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\beta}{\beta+\gamma}+\dfrac{2\gamma}{\gamma+\alpha}+\dfrac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$

613. $\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}+\dfrac{\gamma\alpha}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}+\dfrac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}+$
$+\dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$

614. $\dfrac{1}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}+\dfrac{1}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}+$
$+\dfrac{1}{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)}+\dfrac{1}{\alpha_4(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα: (372).

615. $\dfrac{x^\nu+y^\nu}{x^\nu-y^\nu}-\dfrac{x^\nu-y^\nu}{x^\nu+y^\nu}$

616. $\dfrac{1}{1+x^{\nu-\varrho}+x^{\nu-\sigma}}+\dfrac{1}{1+x^{\varrho-\nu}+x^{\varrho-\sigma}}+\dfrac{1}{1+x^{\sigma-\nu}+x^{\sigma-\varrho}}$

617. $\dfrac{x^{3\nu}}{x^\nu-1}-\dfrac{x^{2\nu}}{x^\nu+1}-\dfrac{1}{x^\nu-1}+\dfrac{1}{x^\nu+1}$

618. $\dfrac{x^{4\nu}}{x^{2\nu}-1}-\dfrac{x^{3\nu}}{x^\nu-1}+\dfrac{x^{2\nu}}{x^\nu+1}-\dfrac{1}{x^{2\nu}-1}+$
$+\dfrac{1}{x^\nu-1}-\dfrac{1}{x^\nu+1}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα: (373).

619. $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

620. $\dfrac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

621. $\dfrac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

622. $\dfrac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^3}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

623. $\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

624. $\dfrac{\beta^2\gamma^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma^2\alpha^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha^2\beta^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

625. $\dfrac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma+\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha+\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

626. $\dfrac{(x-\alpha)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(x-\beta)^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{(x-\gamma)^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

627. $\dfrac{\beta\gamma(\alpha+\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma\alpha(\beta+\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha\beta(\gamma+\delta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα: (374).

628. $\dfrac{\alpha^3(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^3(\gamma+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^3(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

629. $\dfrac{\alpha(\beta-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta(\gamma-\alpha)^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma(\alpha-\beta)^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

630. $\dfrac{(\alpha-x)(\alpha-y)(\alpha-\omega)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(\beta-x)(\beta-y)(\beta-\omega)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{(\gamma-x)(\gamma-y)(\gamma-\omega)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

631. $\dfrac{(x+\beta)(x+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(x+\gamma)(x+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

632. $\dfrac{\alpha^2(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^2(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^2(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα: (375)

633. $\dfrac{(x-\alpha)^2}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(x-\beta)^2}{\beta(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{(x-\gamma)^2}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

634. $\dfrac{x+\alpha}{x(x-y)(x-\omega)}+\dfrac{y+\alpha}{y(y-\omega)(y-x)}+\dfrac{\omega+\alpha}{\omega(\omega-x)(\omega-y)}$

635. $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x+\alpha)}+\dfrac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(x+\beta)}+\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(x+\gamma)}$

Πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων:

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (296).

636. 1. $\dfrac{2\alpha}{3\beta}\cdot\dfrac{6\beta\gamma}{5\alpha^3}$ 2. $\dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}\cdot\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}\cdot\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta}$ 3. $\dfrac{\alpha^2\beta}{x^2y}\cdot\dfrac{\beta^2\gamma}{y^2\omega}\cdot\dfrac{\gamma^2\alpha}{\omega^2x}$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (297).

637. 1. $\dfrac{2\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{4\alpha\beta}$ 2. $\dfrac{3x-9}{2x}\cdot\dfrac{4xy}{5x-15}$

638. 1. $\dfrac{\alpha^2\beta^2-9}{4\nu^3-\nu}\cdot\dfrac{2\nu^2+\nu}{\alpha\beta+3}$ 2. $\dfrac{x^2-y^2}{3(x^2+y^2)}\cdot\dfrac{2x^2+2y^2}{x^2-xy}$

639. 1. $\dfrac{\alpha^3-\alpha x^2}{\beta\gamma^2-\beta x^2}\cdot\dfrac{\beta\gamma+\beta x}{\alpha^2-\alpha x}$ 2. $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (298).

640. $\dfrac{\mu^2-\nu^2}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{\nu-\mu}\cdot\dfrac{3}{x+y}\cdot\dfrac{4}{\mu+\nu}$

641. $\dfrac{\mu^3-\nu^3}{\mu^3+\nu^3}\cdot\dfrac{\mu+\nu}{\mu-\nu}\cdot\dfrac{\mu^2-\mu\nu+\nu^2}{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}$

642. $\dfrac{x-y}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^2$

643. $\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2\alpha\beta}\cdot\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

644. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-3xy+2y^2}\cdot\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-y^2}$

645. $\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta}\cdot\dfrac{\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\delta}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\delta-\beta\delta}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (299).

646. 1. $\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 2. $\dfrac{\alpha x}{\alpha+x}\cdot\left(\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{x}\right)$

647. 1. $\left(\alpha+\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha}\right)\cdot\alpha$ 2. $\dfrac{2x}{2y-\alpha}\cdot\left(\dfrac{y+\alpha}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

648. $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)\cdot\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

649. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{4x^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\dfrac{x^2-2xy+y^2}{4xy}$

650. $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}-\dfrac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}+\dfrac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right]\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{2\beta}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα: (300).

651. 1. $\left(\dfrac{2\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$ 2. $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}\right)^2$ 3. $\left(\dfrac{\alpha}{x^2y}-\dfrac{y^2x}{\beta}\right)^2$

652. 1. $\left(\dfrac{x^2y}{\beta}-\dfrac{\alpha^2\beta}{xy}\right)^2$ 2. $\left(1+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right)^2$ 3. $\left(\dfrac{3}{\alpha^2\beta\gamma}-\alpha\beta^2\right)^2$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα: (301).

653. 1. $\left(\dfrac{x}{3}+1\right)\left(\dfrac{x}{3}-1\right)$ 2. $\left(\dfrac{3x}{5}+\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3x}{5}-\dfrac{1}{4}\right)$

654. 1 $\left(\dfrac{2\alpha\beta}{7x}+\dfrac{1}{5\beta}\right)\left(\dfrac{2\alpha\beta}{7x}-\dfrac{1}{5\beta}\right)$ 2. $\left(x+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\left(x-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (302).

655. 1. $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+6+\dfrac{9\beta^2}{\alpha^2}$ 2. $\dfrac{9x^2}{y^2}+\dfrac{6}{y^2}+\dfrac{1}{x^2y^2}$

656. 1. $\dfrac{x^2}{9y^2}+\dfrac{y^2}{16x^2}-\dfrac{1}{6}$ 2 $\dfrac{4\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{12\gamma}{\beta}+\dfrac{9\gamma^2}{\alpha^2}$

657. 1. $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}-\dfrac{2\beta x}{\alpha y}$ 2. $\dfrac{16\alpha^2}{25}+2+\dfrac{25}{16\alpha^2}$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις: (303).

658. 1. $\alpha^2-\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}$ 2. $\dfrac{x^2}{25\alpha^2}-\dfrac{y^2}{4\beta^2}$

659. 1. $\dfrac{9x^2}{4}-\dfrac{4}{9y^2}$ 2. $\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}$

660. 1. $9\alpha^2x^4-\dfrac{\omega^2}{9\alpha^2}$ 2. $\dfrac{4x^2y^2}{\alpha^2}-\dfrac{\omega^2\beta^2}{64y^2}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (304).

661. $\left(1-\dfrac{3\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right)$

662. $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

663. $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}-x\right)$

664. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+1\right)\left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα: (304΄).

665. $\left(\alpha^2-x+\dfrac{2x^2}{\alpha^2+x}\right)\left(\alpha^2+x\right)$

666. $\left(\alpha^2-1\right)\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}-1\right)$

667. $\left(1+\alpha+\dfrac{3+\alpha^2}{1-\alpha}\right)\left(1-\alpha^2\right)$

668. $\left(\alpha^2-1\right)\left(\dfrac{1}{\alpha-1}-\dfrac{1}{\alpha+1}+1\right)$

669. $\left(1+\dfrac{x^4-2x^2y^2+y^4}{4x^2y^2}\right)\cdot\left(x^4-2x^2y^2+y^4\right).$

Διαίρεσις κλασμάτων:

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις: (305).

670. 1. $\dfrac{\beta}{\alpha}:\dfrac{2\beta}{3\alpha}$ 2. $4\alpha\beta:\dfrac{\beta}{\alpha}$ 3. $\dfrac{9\alpha^2}{2\beta}:3\alpha$ 4. $\dfrac{5\alpha^2x}{4\beta y^2}:\dfrac{15\alpha x^2}{8\beta^2y}$

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις: (306).

671. 1. $\dfrac{x+y}{x-y}:\dfrac{1}{x-y}$ 2. $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{x-y}:\dfrac{\alpha+\beta}{(x-y)^2}$

672. 1. $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2-\delta^2}:\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}$ 2. $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{x^3+y^3}:\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{x^2-xy+y^2}$

673. 1. $\dfrac{\alpha^2-4x^2}{\alpha+4\alpha x}:\dfrac{\alpha^2-2\alpha x}{\alpha x+4x^2}$ 2. $\dfrac{\alpha^2x^2-x^4}{\alpha^3-x^3}:\dfrac{\alpha x^2+x^3}{\alpha^2+\alpha x+x^2}$

674. $\dfrac{\alpha^2+\alpha x+\alpha y+xy}{\alpha^2-\alpha x-\alpha y+xy}:\dfrac{\alpha^2-\alpha x+\alpha y-xy}{\alpha^2+\alpha x-\alpha y-xy}.$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις: (307).

675. $\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right):\dfrac{2y}{x^2-y^2}$

676. $\left(2-\alpha+\dfrac{2\alpha^2}{2+\alpha}\right):\dfrac{4\beta+\alpha^2\beta}{\alpha^2x-4x}$

677. $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$

678. $\left(\dfrac{2x+y}{x+y}+\dfrac{2y+x}{x-y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις: (308).

679. 1. $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) : \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$ 2. $\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) : \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)$

680. 1. $\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right) : \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}\right)$ 2. $\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3} - \frac{\beta^3}{\alpha^3}\right) : \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (309)

681. 1. $\left(\alpha + \frac{\beta}{\gamma}\right) : \left(\alpha - \frac{\beta}{\gamma}\right)$ 2. $\left(\alpha^2 - \frac{1}{\beta^2}\right) : \left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right)$

682. 1. $\left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\alpha}{x}\right)$ 2. $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

683. 1. $\left(1 + \frac{\alpha^3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\alpha}{x^3}\right)$ 2. $\left(1 + \frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right) : \left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha} - 1\right)$

684. $\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}\right) : \left[1 - \frac{1+\alpha\beta}{\alpha(\beta-\alpha)}\right]$.

Νὰ γίνουν οἱ κάτωθι διαιρέσεις : (310).

685. $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}\right) : \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}\right)$

686. $\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right) : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right)$

687. $\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}\right) : \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right)$

688. $\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\right)$

689. $\left(\frac{2x}{x+y} - \frac{y}{x-y} + \frac{y^2}{x^2-y^2}\right) : \left(\frac{1}{x+y} + \frac{x}{x^2-y^2}\right)$

690. $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right)$

Σύνθετα κλάσματα :

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα : (311).

691. $\dfrac{\dfrac{\alpha^2-4x^2}{\alpha^2+4\alpha x}}{\dfrac{\alpha^2-2\alpha x}{\alpha x+4x^2}}$ **692.** $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2-\omega^2-2y\omega}{x^2-y^2-\omega^2+2y\omega}}{\dfrac{x-y-\omega}{x+y-\omega}}$

693. $\dfrac{\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}{\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3+\beta^3}}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα : (312)

694. $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}-1}$ **695.** $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{x+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$

696. $\dfrac{1-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{x^2}{y}-y}$ **697.** $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}}{x-\dfrac{1}{x}}$

698. $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+1}$ **699.** $\dfrac{\dfrac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}+1}{1+\dfrac{\nu}{\mu+\nu}}$

700. $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}$ **701.** $\dfrac{\dfrac{2x}{y}+1-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{2x}{y}+\dfrac{y}{x}-3}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα: (313).

702. $\dfrac{\dfrac{\alpha+x}{2\alpha}-\dfrac{2x}{\alpha+x}}{\dfrac{\alpha+x}{2x}-\dfrac{2\alpha}{\alpha+x}}$ **703.** $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-2\alpha}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}$

704. $\dfrac{\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}+\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}}{\dfrac{\alpha^2+x^2}{\alpha^2-x^2}-\dfrac{\alpha^2-x^2}{\alpha^2+x^2}}$ **705.** $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}{1-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$

706. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}$ **707.** $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}}$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα: (314).

708. $\dfrac{\dfrac{\beta^2+\alpha}{\beta^2}-\dfrac{\alpha^2+\beta}{\alpha^2}}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}-\dfrac{2}{\alpha\beta}}$ **709.** $\dfrac{\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}-\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}-\dfrac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma}}$

710. $\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}+2-\dfrac{(\alpha-x)^2}{\alpha x}}{4\alpha x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

711. $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$ **712.** $\dfrac{\left(\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}\right)^2+\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}+1}{\left(\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}\right)^2-\dfrac{x+y\omega}{x-y\omega}-1}$

713. $\dfrac{\dfrac{x-\alpha}{1+\alpha x}-\dfrac{x-\beta}{1+\beta x}}{1+\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}}$ **714.** $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\beta^3}{\alpha}+\alpha\beta-2\beta^2\right)}{\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα: (315).

715. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\beta^2}}}$ **716.** $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha^2-1}}{1-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}}$

717. $$\frac{1}{x+\dfrac{1}{2+\dfrac{2x}{1-x}}}$$

718. $$\frac{\dfrac{x^2}{\alpha^2}-\dfrac{\alpha^2}{x^2}}{\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{x}}{\alpha-x}}$$

719. $$\frac{\beta^2}{\beta-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\beta}}}$$

720. $$\frac{1+\dfrac{x-\alpha}{x+\alpha}}{\dfrac{\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}-1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\alpha}}}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα: (316).

721. $$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}}$$

722. $$\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}$$

723. $$\frac{x+y}{x+y+\dfrac{1}{x+y+\dfrac{1}{x+y}}}$$

724. $$\frac{3\alpha-\beta}{\alpha+\beta+\dfrac{\alpha-\beta}{1+\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}}$$

725. $$\frac{1}{\alpha-\beta+\dfrac{1}{\alpha-\dfrac{1}{\beta}}}$$

726. $$\frac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι σύνθετα κλάσματα: (317).

727. $$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

728. $$\frac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}-x-\dfrac{1}{x-1}}$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (318).

729. $$\frac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}:\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}}{2(\alpha-\beta)}$$

730. $$\frac{\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha-\alpha^2+\dfrac{\alpha^2-1}{1+\alpha}-1\right)(\alpha+1)}{(1-\alpha)\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)}$$

731. $$\frac{\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+\gamma)}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{2}{\alpha\beta}-\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}}$$

732. $$\frac{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)}{\dfrac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\cdot\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (319).

733. $$\frac{\dfrac{2xy}{x+y}-y}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-2x}}+\frac{\dfrac{2xy}{x+y}-x}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x-2y}}$$

734. $$\frac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}+2\alpha}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}}+\frac{2\beta+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}}$$

735. $$\frac{1-x}{1-x+x^2}-\frac{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}{\dfrac{1}{x^3}+1}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (320).

736. $$\frac{\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}-1}-\frac{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

737. $$\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y-\omega}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y-\omega}}\cdot\left(1-\frac{y^2+\omega^2-x^2}{2y\omega}\right)$$

738. $$\frac{\dfrac{1+xy}{1-xy}+\dfrac{1-xy}{1+xy}}{\dfrac{1+xy}{1-xy}-\dfrac{1-xy}{1+xy}}+\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

739. $$\frac{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta+\gamma}}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta+\gamma}}\cdot\left(1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right)$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (321).

740. $$\frac{\dfrac{25\alpha\beta}{4xy}}{\dfrac{5\alpha}{2y}}:\frac{84\beta^3}{21y}$$

741. $$\frac{\dfrac{\alpha^2\beta^3}{\gamma}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha^3\gamma^2}}{\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha\gamma}{\beta^3}}:\frac{\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^3}}{\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^3}}$$

742. $$\frac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}}:\frac{\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}{\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2}$$

743. $$\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+\omega}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+\omega}}:\frac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+\omega}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+\omega}}$$

744. $$\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]:\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}-\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right].$$

'Ιδιαίτεραι μορφαὶ κλασμάτων:

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῶν κάτωθι κλασμάτων:

745. 1. $\frac{x^2-\alpha^2}{3x-3\alpha}$, διὰ $x=\alpha$ 2. $\frac{y^4-\alpha^4}{y^2-\alpha^2}$, διὰ $y=\alpha$

746. 1. $\frac{x^3+2x^4}{x}$, διὰ $x=0$ 2. $\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\mu-\nu)}{(\alpha-\beta)(\mu^2-\nu^2)}$, διὰ $\alpha=\beta$, $\mu=\nu$

747. 1. $\frac{(x^2-\alpha^2)(y+\beta)}{(x-\alpha)(y^2-\beta^2)}$, διὰ $x=\alpha$, $y=\beta$ 2. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$, διὰ $x=2$

748. 1. $\frac{x^2-4x-5}{x^2+2x-15}$, διὰ $x=-5$ 2. $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2+2x}$, διὰ $x=-1$

749. 1. $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}$, διὰ $x=-1$ 2. $\frac{3x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$, διὰ $x=\frac{2}{3}$.

'Αναλογίαι:

Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἄγνωστοι ὅροι x τῶν κάτωθι ἀναλογιῶν: (323).

750. $\frac{\alpha+\beta}{x}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}$

751. $\left(\nu+\frac{\mu^2}{\nu}\right):x=(\mu^2+\nu^2):\left(\mu-\frac{\nu^2}{\mu}\right)$

752. $x:\left(\alpha+\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)=\left(\beta-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right):\alpha^2\beta^2$

753. $\frac{\mu(\nu-\mu)}{(\nu+\mu)^2}:\mu\nu=x:\frac{\nu(\mu+\nu)}{(\nu-\mu)^2}$

754. $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\gamma+\gamma^2}:\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\gamma^2}=x:\left(\alpha+\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\gamma}\right)$

755. $\frac{\beta(1+\beta)}{1-\alpha^2}:\frac{1-\beta^2}{\alpha(1+\alpha)}=\left(\beta+\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\right):x$

756. $\frac{\nu}{(\nu+\mu)^2}:x=x:\frac{2\nu^2}{\mu^3+\nu^3}$.

'Εὰν εἶναι $\alpha\delta=\beta\gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι: (324).

757. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ 2. $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ 3 $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{\alpha}$ 4. $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ἡ ἰσότης: (325).

758. 1. $xy=\omega\varphi$ 2. $\mu^2=\nu\rho$.

759. (326). Νὰ σχηματισθοῦν διάφοροι ἀναλογίαι ἀπὸ τὴν ἰσότητα:

$$5\alpha^2\gamma=12\beta^2\delta.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἶναι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, θὰ εἶναι: (327).

760. 1. $\alpha:\delta=\beta\gamma:\delta^2$ 2. $1:\beta=\gamma:\alpha\delta$

761. 1. $\alpha\delta:\beta=\gamma:1$ 2. $\nu\alpha:\beta=\nu\gamma:\delta$

762. 1. $\mu\alpha : \nu\beta = \mu\gamma : \nu\delta$ 2. $(\alpha-1) : \beta = (\beta\gamma-\delta) : \beta\delta$

763. 1. $(\alpha+1) : 1 = (\beta\gamma+\delta) : \delta$ 2. $(\alpha-\beta\mu) : (\gamma-\delta\mu) = \beta : \delta$

764. $\alpha\beta : \gamma\delta = (\alpha+\beta)^2 : (\gamma+\delta)^2$.

'Εὰν $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι: (328).

765. $\dfrac{5\alpha+\beta}{3\alpha+4\beta} = \dfrac{5\gamma+\delta}{3\gamma+4\delta}$

766. $\dfrac{3\alpha+4\gamma}{3\alpha-4\gamma} = \dfrac{3\beta+4\delta}{3\beta+4\delta}$

767. $\dfrac{\mu\alpha+\nu\beta}{\varrho\alpha-\sigma\beta} = \dfrac{\mu\gamma+\nu\delta}{\varrho\gamma-\sigma\delta}$

768. $\dfrac{\nu\alpha+\beta}{\mu\alpha+\varrho\beta} = \dfrac{\nu\gamma+\delta}{\mu\gamma+\varrho\delta}$.

769. (329). 'Εὰν εἶναι $\dfrac{\lambda}{\alpha-\beta} = \dfrac{\mu}{\beta-\gamma} = \dfrac{\nu}{\alpha-\gamma}$ θὰ εἶναι καὶ $\lambda+\mu=\nu$.

770. (330). 'Εὰν εἶναι $\dfrac{\mu\alpha+\nu\gamma}{\mu\beta+\nu\delta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$ καὶ ἀντιστρόφως.

771. (331). 'Εὰν εἶναι $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{\gamma}{\omega}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $(x^2+y^2+\omega^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = (\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$ καὶ ἀντιστρόφως.

'Εὰν εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι: (332).

772. $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\beta^3+\gamma^3+\delta^3} = \dfrac{\alpha}{\delta}$

773. $(\beta+\delta)\gamma^2 = \alpha\delta(\gamma^2+\delta^2)$.

774. (333). Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα ἔχωμεν
$$\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} = \frac{4\alpha-\beta}{6\alpha-\beta}.$$

775. (334). Δίδονται αἱ ἀναλογίαι $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ καὶ $x : y = \omega : \varphi$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, δ, x, y, φ, ω, ἵνα ἔχωμεν $\dfrac{\alpha+x}{\beta+y} = \dfrac{\gamma+\omega}{\delta+\varphi}$.

776. (335). 'Εὰν ἔχωμεν τὴν σχέσιν
$$(x+y+\omega+\varphi)(x-y-\omega+\varphi) = (x-y+\omega-\varphi)(x+y-\omega-\varphi)$$
νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ x, y, ω, φ σχηματίζουν ἀναλογίαν.

777. (336). 'Εὰν εἶναι $\dfrac{\alpha^2+\alpha x+x^2}{\alpha^2-\alpha x+x^2} = \dfrac{\beta^2+\beta y+y^2}{\beta^2-\beta y+y^2}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\dfrac{\beta}{x} = \dfrac{y}{\alpha}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'

ΑΡΡΗΤΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ

1. Ἰδιότητες τῶν ριζῶν

213. Ὁρισμοί. Εἰς τὴν § 102 ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς νιοστῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Γενικῶς: Ἔστω ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς α καὶ ν ἕνας φυσικὸς ἀριθμός. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς β τοιοῦτος, ὥστε ἡ νιοστὴ αὐτοῦ δύναμις νὰ εἶναι ἴση μὲ α, θὰ λέγωμεν, ὅτι ὁ β εἶναι ἡ νιοστὴ ρίζα τοῦ α καὶ θὰ παριστάνωμεν τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω αἱ ἰσότητες $\boxed{\beta=\sqrt[\nu]{\alpha}}$ καὶ $\boxed{\beta^\nu=\alpha}$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐπίσης ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν καὶ $\boxed{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha}$ (§ 103).

214. Ρίζαι ἀρτίας τάξεως καὶ περιττῆς τάξεως. Εἰς τὰς § 104 καὶ 106 εἴδομεν, ὅτι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς α ἔχει 0, 1 ἢ 2 νιοστὰς ρίζας, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς τιμὰς τοῦ ν καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ α.

I. *Ὁ δείκτης ν εἶναι ἄρτιος.* Ἐὰν $\alpha>0$, αἱ νιοσταὶ ρίζαι τοῦ α εἶναι: $\pm\sqrt[\nu]{\alpha}=\pm\beta$ ἢ $\pm\sqrt[\nu]{|\alpha|}=\pm\beta$.

Ἐὰν $\alpha<0$, ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἢ ἡ $\sqrt[\nu]{-|\alpha|}$ δὲν ὑπάρχει, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν νὰ δίδῃ ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

Γενικῶς ἡ παράστασις $\sqrt[2\nu]{-|\alpha|}$ *δὲν ἔχει ἔννοιαν καὶ λέγεται φ α ν τ α σ τ ι κ ὴ π α ρ ά σ τ α σ ι ς.*

Διὰ τοῦτο, ὅταν ὁ δείκτης ἑνὸς ριζικοῦ εἶναι ἄρτιος, πρέπει νὰ ὑποθέτωμεν π ά ν τ ο τ ε, ὅτι τὸ ὑπόρριζον εἶναι θετικόν.

II. *Ὁ δείκτης ν εἶναι περιττὸς ἀριθμός.* Ἐὰν $\alpha>0$, θὰ εἶναι $\sqrt[\nu]{\alpha}=+\beta$, διότι ἕνας καὶ μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν (περιττὴν) δίδει ἐξαγόμενον θετικόν.

Ἐὰν $\alpha<0$, θὰ εἶναι $\sqrt[\nu]{-|\alpha|}=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}=-\beta$, διότι ἕνας καὶ μόνον ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν (περιττὴν) δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν.

Π. χ. ἡ π έ μ π τ η ρ ί ζ α τοῦ $+32$ εἶναι $\sqrt[5]{+32}=+2$, διότι $(+2)^5=+32$
καὶ ἡ π έ μ π τ η ρ ί ζ α τοῦ -32 εἶναι $\sqrt[5]{-32}=-2$, διότι $(-2)^5=-32$.

215 Ἄρρητοι παραστάσεις Κάθε παράστασις ἀριθμητικὴ ἢ ἐγγράμματος, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα ἢ περισσότερα ριζικὰ λέγεται ἄ ρ ρ η τ ο ς π α ρ ά σ τ α σ ι ς.

Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha\sqrt{3}-\beta\sqrt{2},\quad 2x+\sqrt{3x^2+1},\quad \frac{2}{3+\sqrt{2}},\quad \frac{\alpha}{\alpha-\sqrt{\beta}}$$

εἶναι ἄρρητοι παραστάσεις.

Ὁ ὁρισμὸς τῶν ἀρρήτων ἀ λ γ ε β ρ ι κ ῶ ν παραστάσεων, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 115 ἰσχύει διὰ τὰς παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν γ ρ ά μ μ α τ α ὑ π ὸ τ ὸ ρ ι ζ ι κ ό ν.

216 Ἰδιότητες τῶν ριζῶν Ὁ λογισμὸς τῶν ριζῶν τῶν θετικῶν ἀριθμῶν στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 91—99 καὶ τὰς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν κατωτέρω συμβολικῶς :

I.	$\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$	**IV.**	$\frac{\alpha^\mu}{\beta^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}\quad(\mu>\nu)$
II.	$(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}$		
III.	$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu$	**V.**	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ οἱ μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ θετικοί, κατ' ἐπέκτασιν δὲ μηδὲν ἢ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι.

Ὅταν θέλωμεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο ῥίζαι εἶναι ἴσαι, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ ῥίζαι αὗται ὑψούμεναι εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν δίδουν τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα. Τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

217. Θεώρημα ***Ἐὰν αἱ νιοσταὶ δυνάμεις δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσαι, οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.***

Ὑπόθεσις : Ἔστωσαν α καὶ β δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ α^ν καὶ β^ν αἱ νιοσταὶ δυνάμεις των.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι, ἐὰν $\alpha^\nu = \beta^\nu$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

Ἀπόδειξις : Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\alpha^\nu = \beta^\nu \quad \text{ἢ} \quad \alpha^\nu - \beta^\nu = 0 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ $\alpha^\nu - \beta^\nu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1}$ ἡ ἰσότης (1) γράφεται :

$$(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\beta^{\nu-1})=0 \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν παραγόντων ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει ὁ ἕνας, τουλάχιστον, ἐκ τῶν παραγόντων νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν. Ἐπειδὴ οἱ α καὶ β εἶναι θετικοί, ὁ δεύτερος παράγων εἶναι πάντοτε θετικός, καὶ ἑπομένως διάφορος τοῦ μηδενός: ἄρα θὰ εἶναι ὁ ἄλλος παράγων ἴσος μὲ μηδέν, δηλ. θὰ εἶναι $\alpha-\beta=0$ ἢ $\alpha=\beta$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ἐὰν αἱ νιοσταὶ δυνάμεις...***

218 Ἰδιότης Ι. ***Ἡ ἀξία μιᾶς ῥίζης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ὅπου α θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ν καὶ τὸν ἐκθέτην μ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ρ, θὰ προκύψῃ ἡ ῥίζα $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις : Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὑφίσταται ἡ ἰσότης (1), ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ νρ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ καὶ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ εἶναι ἴσαι.

Πράγματι· ἡ νρ δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ εἶναι :

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu\rho} = \left[\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu}\right]^{\rho} = (\alpha^{\mu})^{\rho} = \alpha^{\mu\rho}$$

καὶ ἡ νρ δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ εἶναι

$$\left(\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}\right)^{\nu\rho} = \alpha^{\mu\rho}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ καὶ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$, ὑψούμενοι εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν νρ, δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον $\alpha^{\mu\rho}$· ἄρα (§ 217) οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι: δηλ. θὰ εἶναι

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}}$$

Π. χ. $\sqrt[3]{\alpha^2} = \sqrt[6]{\alpha^4}$, $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι:

$$\boxed{\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

219. Ἐφαρμογαί. I. *Ἁπλοποίησις τῶν ῥιζῶν*. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν μίαν ῥίζαν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

Π. χ. εἶναι $\sqrt[6]{\alpha^4} = \sqrt[3]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$.

Ἐὰν ὁ δείκτης διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου, τότε τὸ ῥιζικὸν ἐξαλείφεται.

Π. χ. $\sqrt[3]{\alpha^6} = \alpha^2$. Ἐὰν $\lambda = \nu\rho$, θὰ εἶναι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu\rho}} = \alpha^{\rho}$.

II. *Τροπὴ ῥιζῶν εἰς τὸν αὐτὸν δείκτην*. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δύο ἢ περισσοτέρας ῥίζας μὲ διαφόρους δείκτας εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν δεικτῶν τῶν ῥιζῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν δείκτην καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος κάθε ῥίζης ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον τοῦ ἐ.κ.π. διὰ τοῦ δείκτου ἑκάστης ῥίζης. Ἐργαζόμεθα, δηλ. ὅπως εἰς τὴν τροπὴν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Παράδειγμα. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ῥίζαι εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην:

$$\sqrt{\alpha^3}, \quad \sqrt[4]{\beta}, \quad \sqrt[6]{\gamma^5}, \quad \sqrt[3]{2}.$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν δεικτῶν 2, 4, 6, 3 εἶναι τὸ 12, τὰ δὲ πηλίκα τοῦ 12 διὰ τῶν δεικτῶν αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως 6, 3, 2, 4.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ἰσοδύναμοι ρίζαι πρὸς τὰς δοθείσας εἶναι αἱ

$$\sqrt[12]{\alpha^{18}}, \quad \sqrt[12]{\beta^{8}}, \quad \sqrt[12]{\gamma^{10}}, \quad \sqrt[12]{2^{4}}.$$

Αἱ ρίζαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην, λέγονται ἰ σ ο β ά θ μ ι ο ι ρ ί ζ α ι.

Ἀσκήσεις: 779, 781, 782.

220. II. Ἰδιότης. ***Ἡ νιοστὴ ρίζα ἑνὸς γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν νιοστῶν ριζῶν τῶν παραγόντων.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω $\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$ ἡ νιοστὴ ρίζα τοῦ γινομένου $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὑφίσταται ἡ ἰσότης (1), ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ νιοσταὶ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν

$$\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma} \quad \text{εἶναι ἴσαι.}$$

Πράγματι· ἔχομεν $\left(\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}\right)^{\nu}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\gamma}\right)^{\nu}=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma.$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον αβγ· ἄρα ἡ ἰσότης (1) ὑφίσταται, δηλ. εἶναι

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}}$$

221. Πόρισμα. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1), θὰ λάβωμεν τὴν ἰσότητα

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}}$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ γινόμενον πολλῶν ριζῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην εἶναι ἴσον μὲ ρίζαν, ἡ ὁποία ἔχει ὡς δείκτην τὸν κοινὸν δείκτην καὶ ὡς ὑπόρριζον ποσότητα τὸ γινόμενον τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων.

Π. χ. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\cdot 9}=\sqrt[3]{27}=3$

$$\sqrt{\alpha+\beta}\cdot\sqrt{\alpha-\beta}=\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

222. Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ ρίζαι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ γινόμενόν των ὡς ἀνωτέρω.

Π. χ. τὸ γινόμενον $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[4]{\gamma}$ εἶναι ἴσον μὲ

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[4]{\gamma}=\sqrt[12]{\alpha^6}\cdot\sqrt[12]{\beta^4}\cdot\sqrt[12]{\gamma^3}=\sqrt[12]{\alpha^6\cdot\beta^4\cdot\gamma^3}.$$

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot5^2}=\sqrt[6]{200}$

καὶ γενικῶς:

$$\boxed{\sqrt[\mu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}\cdot\sqrt[\mu\nu]{\beta^\mu}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta^\mu}}$$

223 Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις. I. Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ρίζαν $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$, τότε κατὰ τὴν § 220, θὰ ἔχωμεν:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta},$$

δηλ. εἶναι $\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ παράγων α^ν τοῦ ὑπορρίζου ἐξῆλθε ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ.

Γενικῶς, ὅταν ἕνας ἢ περισσότεροι παράγοντες τοῦ ὑπορρίζου ἔχουν ἐκθέτην ἴσον ἢ διαιρετὸν μὲ τὸν δείκτην τοῦ ριζικοῦ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τοὺς παράγοντας αὐτοὺς ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας των διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

Π. χ. 1. $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot2}=\sqrt{4^2\cdot2}=4\sqrt{2}$

2. $\sqrt[3]{27\alpha^4}=\sqrt[3]{3^3\alpha^3\alpha}=3\alpha\sqrt[3]{\alpha}$

3. $\sqrt{18\alpha^5\beta^3\gamma^2}=\sqrt{9\alpha^4\beta^2\gamma^2 2\alpha\beta}=3\alpha^2\beta\gamma\sqrt{2\alpha\beta}$

4. $\sqrt{12\alpha^2\beta-24\alpha\beta^2+12\beta^3}=\sqrt{12\beta(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}=\sqrt{4\cdot3\beta(\alpha-\beta)^2}=2(\alpha-\beta)\sqrt{3\beta}$.

II. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, θὰ

ἔχωμεν: $\boxed{\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸν παρά-

γοντα α ἐντὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν αὐτὸν εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν.

Π. χ. $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$, $\quad 2\alpha\beta\sqrt[3]{\alpha\gamma} = \sqrt[3]{2^3\alpha^3\beta^3\alpha\gamma} = \sqrt[3]{8\alpha^4\beta^3\gamma}$.

Ἀσκήσεις: 784, 786, 788, 790, 792, 794, 796, 797.

224. III. Ἰδιότης. ***Τὸ πηλίκον δύο ῥιζῶν, μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην, εἶναι ἴσον μὲ ῥίζαν, ἡ ὁποία ἔχει ὡς δείκτην τὸν κοινὸν δείκτην καὶ ὡς ὑπόρριζον τὸ πηλίκον τῶν ὑπορρίζων.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ πηλίκον $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὴν νιοστὴν δύναμιν τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, θὰ εὕρωμεν ἐξαγόμενα ἴσα.

Πράγματι· ἔχομεν

$$\left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu} = \frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \left(\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον $\dfrac{\alpha}{\beta}$· ἄρα ἡ ἰσότης (1) ὑφίσταται.

Δηλ. εἶναι:

$$\boxed{\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

Π. χ. $\dfrac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha+\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}} = \sqrt{\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}} = \sqrt{\alpha-\beta}$.

225. Παρατήρησις. Ἐὰν οἱ δεῖκται τῶν ῥιζῶν εἶναι διάφοροι, τρέπομεν πρῶτον τὰς ῥίζας εἰς ὁμοιοβάθμους καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα τὴν προηγουμένην ἰδιότητα.

Π. χ. $$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{9^3}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\frac{9^3}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu\mu]{\alpha^\mu}}{\sqrt[\nu\mu]{\beta^\nu}} = \sqrt[\nu\mu]{\frac{\alpha^\mu}{\beta^\nu}}, \quad \frac{\sqrt{125}}{5} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}.$$

226. Πόρισμα. Ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$ λαμβάνομεν

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ἡ νιοστὴ ῥίζα ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ πηλίκον τῶν νιοστῶν ῥιζῶν τῶν ὅρων του.

Π. χ. $$\sqrt[3]{\frac{8\alpha^3}{27\beta^3\gamma^6}} = \frac{\sqrt[3]{8\alpha^3}}{\sqrt[3]{27\beta^3\gamma^6}} = \frac{\sqrt[3]{2^3\cdot\alpha^3}}{\sqrt[3]{3^3\cdot\beta^3\cdot\gamma^6}} = \frac{2\alpha}{3\beta\gamma^2}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{25}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Ἀσκήσεις : *799, 801, 803, 804.*

227. IV. Ἰδιότης. ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μίαν ῥίζαν εἰς μίαν δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸ ὑπόρριζον εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὴν $\sqrt[\mu]{\alpha}$ εἰς τὴν 3ην δύναμιν, δηλ. ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^3$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^3 = \sqrt[\mu]{\alpha^3} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις : Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ τὴν § 221 θὰ εἶναι $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^3 = \sqrt[\mu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\beta}\cdot\sqrt[\mu]{\gamma} = \sqrt[\mu]{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha} = \sqrt[\mu]{\alpha^3}$

Γενικῶς, θὰ εἶναι :

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\nu}=\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$$

228. Παρατήρησις. Ἡ ἰσότης $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\nu}=\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$ δὲν εἶναι πάντοτε πλήρης, ὅταν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ οἱ μ καὶ ν ἄρτιοι.

Π. χ. ἡ ἰσότης $(\sqrt{9})^4=\sqrt{9^4}$ δὲν εἶναι πλήρης.

Διότι $(\sqrt{9})^4=(\pm 3)^4=+81$, ἐνῷ $\sqrt{9^4}=\pm 81$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $(\sqrt{9})^4$ δίδει μίαν τιμὴν θετικήν, τὴν $+81$, ἐνῷ ἡ $\sqrt{9^4}$ δίδει δύο τιμὰς ± 81 ἀντιθέτους. Διὰ τοῦτο, ὅταν τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ οἱ μ καὶ ν ἄρτιοι, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὡς τιμὴν τῆς ῥίζης μόνον τὴν θετικὴν τιμήν της.

Ἀσκήσεις : 805, 806, 808, 809.

229. V. Ἰδιότης. ***Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν νιοστὴν ῥίζαν μιᾶς ἄλλης ῥίζης, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ν τὸν δείκτην τῆς ῥίζης αὐτῆς.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν νιοστὴν ῥίζαν τῆς $\sqrt[\mu]{\alpha}$.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\mu]{\alpha} \tag{1}$$

Ἀπόδειξις : Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$$

εἶναι ἴσοι, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ νμ δυνάμεις των εἶναι ἴσαι.

Πράγματι· ἔχομεν

$$\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu\mu}=\left[\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu}\right]^{\mu}=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu}=\alpha$$

$$\text{καὶ } \left(\sqrt[\nu\mu]{\alpha}\right)^{\nu\mu}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu\mu}}=\alpha.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$ καὶ $\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ ὑψούμενοι εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν νμ δίδουν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον α, ἄρα οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι, δηλ. εἶναι :

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$$

Π. χ. $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{9}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^6}} = \sqrt[12]{\alpha^6} = \sqrt{\alpha}$.

2. Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀρρήτων παραστάσεων

230 Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ριζῶν. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ριζῶν γίνεται, ὅπως ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ἀλλὰ διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν πολλῶν ριζῶν, πρέπει αἱ ρίζαι νὰ εἶναι ὅμοιαι.

Δύο ἢ περισσότεραι ρίζαι λέγονται ὅμοιαι, ὅταν ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόρριζον.

Π. χ. αἱ ρίζαι $3\sqrt{2}$, $-5\sqrt{2}$, $\alpha\sqrt{2}$ εἶναι ὅμοιαι.

Ἐπίσης αἱ ρίζαι $2\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $-\alpha\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $+8\beta\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$ εἶναι ὅμοιαι.

Αἱ ρίζαι $\sqrt{9\alpha}$, $\sqrt{2\beta}$ δὲν εἶναι ὅμοιαι.

Συντελεστὴς μιᾶς ρίζης εἶναι τὸ σύνολον τῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ.

Π. χ. οἱ συντελεσταὶ τῶν ριζῶν $3\alpha\sqrt{8}$, $-2\sqrt[3]{\beta^2}$, $+\sqrt[8]{5xy}$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ 3α, -2, $+1$.

Ὁ συντελεστὴς μιᾶς ρίζης πρέπει νὰ γράφεται πάντοτε πρὸ τοῦ ριζικοῦ.

Πολλαὶ ρίζαι, αἱ ὁποῖαι ἐκ πρώτης ὄψεως δὲν φαίνονται ὅμοιαι, δύνανται νὰ γίνουν ὅμοιαι, ἐὰν ἁπλοποιηθοῦν προηγουμένως.

Π. χ. αἱ ρίζαι $5\sqrt{27}$, $-\sqrt{48}$, $+2\sqrt{75}$ δὲν φαίνονται ὅμοιαι. Ἐὰν ὅμως τὰς ἁπλοποιήσωμεν, θὰ ἔχωμεν

$$5\sqrt{27} = 5\sqrt{9\cdot 3} = 5\cdot 3\sqrt{3} = 15\sqrt{3}, \quad -\sqrt{48} = -\sqrt{16\cdot 3} = -4\sqrt{3}$$
$$2\sqrt{75} = 2\sqrt{25\cdot 3} = 2\cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ρίζαι $5\sqrt{27}$, $-\sqrt{48}$, $+\sqrt{75}$ εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμοι μὲ τὰς ρίζας $15\sqrt{3}$, $-4\sqrt{3}$, $+10\sqrt{3}$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅμοιαι ρίζαι.

Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ριζῶν γίνεται, ὅπως καὶ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων ἑνὸς πολυωνύμου.

Π. χ. $6\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}=(6-3+1)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$$8\sqrt[3]{\alpha}+5\sqrt[3]{\alpha}-2\sqrt[3]{\alpha}=(8+5-2)\sqrt[3]{\alpha}=11\sqrt[3]{\alpha}$$

$$\alpha^2\sqrt{\mu}+\beta^2\sqrt{\mu}-2\alpha\beta\sqrt{\mu}=(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\sqrt{\mu}=(\alpha-\beta)^2\sqrt{\mu}.$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$A=(5\sqrt{\alpha}-8\sqrt{\beta})+(2\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha}).$$

Ἔχομεν $A=5\sqrt{\alpha}-8\sqrt{\beta}+2\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha}$

κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ριζῶν καὶ ἔχομεν

$$A=2\sqrt{\alpha}-6\sqrt{\beta}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ρίζαι καὶ νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$A=5\sqrt{18}-2\sqrt{50}+6\sqrt{32} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $5\sqrt{18}=5\sqrt{9\cdot2}=5\cdot3\sqrt{2}=15\sqrt{2}$

$2\sqrt{50}=2\sqrt{25\cdot2}=2\cdot5\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

$6\sqrt{32}=6\sqrt{16\cdot2}=6\cdot4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$

ἡ (1) γράφεται

$$A=15\sqrt{2}-10\sqrt{2}+24\sqrt{2}=29\sqrt{2}.$$

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ρίζαι καὶ νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$A=(3\sqrt{16\alpha^3\beta}-5\sqrt{\alpha\beta})-(6\sqrt{9\alpha\beta^3}-7\sqrt{25\alpha\beta}).$$

Ἔχομεν $A=3\sqrt{16\alpha^3\beta}-5\sqrt{\alpha\beta}-6\sqrt{9\alpha\beta^3}+7\sqrt{25\alpha\beta} \qquad (1)$

Ἐπειδὴ $3\sqrt{16\alpha^3\beta}=3\sqrt{16\alpha^2\cdot\alpha\beta}=3\cdot4\alpha\sqrt{\alpha\beta}=12\alpha\sqrt{\alpha\beta}$

$6\sqrt{9\alpha\beta^3}=6\sqrt{9\beta^2\cdot\alpha\beta}=6\cdot3\beta\sqrt{\alpha\beta}=18\beta\sqrt{\alpha\beta}$

$7\sqrt{25\alpha\beta}=7\cdot5\sqrt{\alpha\beta}=35\sqrt{\alpha\beta}$

ἡ (1) γράφεται

$$A=12\alpha\sqrt{\alpha\beta}-5\sqrt{\alpha\beta}-18\beta\sqrt{\alpha\beta}+35\sqrt{\alpha\beta}=(12\alpha-5-18\beta+35)\sqrt{\alpha\beta}=$$
$$=(12\alpha-18\beta+30)\sqrt{\alpha\beta}.$$

Ἀσκήσεις: 811, 814, 815, 817, 820, 821, 823, 825, 827.

231. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ἀρρήτων παραστάσεων. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ριζῶν γίνεται, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὰς § 221—225, ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀρρήτων παραστάσεων γίνεται, ὅπως καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων:

Π. χ. 1. $3\sqrt{5\alpha\beta}\cdot4\sqrt{20\alpha\beta}=12\sqrt{100\alpha^2\beta^2}=12\cdot10\alpha\beta=120\alpha\beta.$

2. $(\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10})\cdot2\sqrt{5}=2\sqrt{25}+4\sqrt{35}+6\sqrt{50}=$
$=2\cdot5+4\sqrt{35}+6\cdot5\sqrt{2}=10+4\sqrt{35}+30\sqrt{2}.$

3. $(5\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{2}-7\sqrt{3})=15\sqrt{6}+6\sqrt{4}-35\sqrt{9}-14\sqrt{6}=$
$=15\sqrt{6}+6\cdot2-35\cdot3-14\sqrt{6}=\sqrt{6}+12-105=\sqrt{6}-93.$

4. $12\alpha\gamma\sqrt{6\beta\gamma}:4\gamma\sqrt{2\beta}=\dfrac{12\alpha\gamma}{4\gamma}\sqrt{\dfrac{6\beta\gamma}{2\beta}}=3\alpha\sqrt{3\gamma}.$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἀξιοσημειώτων ταυτοτήτων μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν ἀμέσως μερικὰ γινόμενα :

Π. χ. 1. $(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2\pm2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=\alpha\pm2\sqrt{\alpha\beta}+\beta$.

2. $(\alpha\pm\sqrt{\beta})^2=\alpha^2\pm2\alpha\sqrt{\beta}+\beta$.

Αἱ παραστάσεις $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ καὶ $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον μιᾶς ρίζης, λέγονται σ υ ζ υ γ ε ῖ ς. Ἐπίσης αἱ παραστάσεις $\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$ εἶναι σ υ ζ υ γ ε ῖ ς.

Τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν παραστάσεων εἶναι :

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=(\sqrt{\alpha})^2-(\sqrt{\beta})^2=\alpha-\beta$$

$$(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})=\alpha^2-\beta.$$

Ἀσκήσεις : 829, 831, 833, 835, 837, 839, 842, 846, 850 852, 857, 861, 863, 865, 869, 870, 874, 876, 879.

232. Μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων. $\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}}$.

Ἀπὸ τὴν ταυτότητα $(\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}$ λαμβάνομεν:

$$\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}} \quad (1)$$

Ἐὰν τὸ γ ι ν ό μ ε ν ο ν $\alpha\beta$ ε ἶ ν α ι τ έ λ ε ι ο ν τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον μὲ μίαν μόνον ρίζαν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1).

Π. χ. $\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{5+20+2\sqrt{100}}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\sqrt{27}-\sqrt{3}=\sqrt{27+3-2\sqrt{81}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Ἐὰν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β εἶναι τέλειον τετράγωνον, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὴν παράστασιν $\sqrt{\alpha+\beta\pm2\sqrt{\alpha\beta}}$ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μίαν μόνον ρίζαν, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1).

Π. χ. $\sqrt{9+5\pm2\sqrt{9\cdot5}}=\sqrt{9}\pm\sqrt{5}=3\pm\sqrt{5}$

$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{1+2+2\sqrt{2}}=\sqrt{1}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$.

Ἀσκήσεις : 880, 882.

233. Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς μονωνύμου. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μονωνύμου : $36\alpha^4\beta^2\gamma^8$. Κατὰ τὴν § 220 θὰ ἔχωμεν :

$$\pm\sqrt{36\alpha^4\beta^2\gamma^8}=\pm\sqrt{36}\cdot\sqrt{\alpha^4}\cdot\sqrt{\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^8}=\pm6\alpha^2\beta\gamma^4.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$-\sqrt{16x^2y^4\omega^{10}}=-4xy^2\omega^5, \qquad +\sqrt{\frac{9\alpha^2\beta^4}{25x^2y^6}}=+\frac{\sqrt{9\alpha^2\beta^4}}{\sqrt{25x^2y^6}}=+\frac{3\alpha\beta^2}{5xy^3}.$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς μονωνύμου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ συντελεστοῦ του καὶ διαιροῦμεν διὰ 2 τοὺς ἐκθέτας ὅλων τῶν γραμμάτων του.

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ νὰ εἶναι ἕνα μονώνυμον τέλειον τετράγωνον, πρέπει ὁ συντελεστής του νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ οἱ ἐκθέται ὅλων τῶν γραμμάτων του νὰ εἶναι ἄρτιοι.

Παρατήρησις. Ὅταν ἐξάγωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν μιᾶς παραστάσεως, ἡ ὁποία εἶναι τέλειον τετράγωνον, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν της κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Παράδειγμα 1ον. $\sqrt{x^2(x+5)}=|x|\sqrt{x+5}$

$= -x\sqrt{x+5}$, ἐὰν $x<0$

$= +x\sqrt{x+5}$, ἐὰν $x>0$.

Παράδειγμα 2ον. $-\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+1)^3}}=-\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^3}}=$

$$=-\sqrt{\frac{x-1}{(x+1)^2}}=\frac{-\sqrt{x-1}}{|x+1|}=\frac{-\sqrt{x-1}}{x+1}$$

διότι, διὰ νὰ εἶναι θετικὸν τὸ ὑπόρριζον $x-1$, πρέπει νὰ εἶναι $x-1\geqslant 0$ ἢ $x\geqslant 1$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $x+1>0$.

Σημ. Περὶ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς πολυωνύμου, θὰ κάμωμεν λόγον εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν ἰδιοτήτων τῶν πολυωνύμων.

Ἀσκήσεις : 883, 884.

3. Τροπὴ κλασμάτων μὲ ἄρρητον παρονομαστὴν εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστὴν

234 Τροπὴ κλασμάτων μὲ ἄρρητον παρονομαστὴν εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν. Ὅταν ἔχωμεν ἕνα κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἄρρητος, εἶναι προτιμότερον νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ κλάσμα αὐτὸ μὲ ἕνα ἄλλο ἰσοδύναμον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς νὰ εἶναι ρητός.

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

1ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$. Εἰς τὴν περίπτω-

σιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του $\sqrt{\beta}$ καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{3}.$$

Παρατήρησις. Ἐδείξαμεν, ὅτι $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τῆς $\sqrt{2}$ εἶναι 1,4142135... Μὲ τὴν τροπὴν τοῦ ἀρρήτου παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\sqrt{2}}$ εἰς ῥητόν, ἀντικαθιστῶμεν τὸ

$$\frac{1}{1,4142135} \text{ διὰ τοῦ } \frac{1,4142135}{2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι μία ἐπίπονος διαίρεσις, ἀντικαθίσταται διὰ μιᾶς πράξεως, ἡ ὁποία ἐκτελεῖται εὐκόλως καὶ ταχέως.

2ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}} = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}}} = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\beta}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\,.\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt[5]{\beta^2}} = \frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\sqrt[5]{\beta^2}\,.\sqrt[5]{\beta^3}} = \frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\sqrt[5]{\beta^5}} = \frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^3}}{\beta}.$$

Ἀσκήσεις: 885, 886, 887, 888.

3ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}}$. Διὰ νὰ τρέψωμεν τὸ κλάσμα αὐτὸ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ ρητὸν παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} = \frac{\mu(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})} = \frac{\mu(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})} = \frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν :

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5} = -\frac{2}{3}(\sqrt{2}-\sqrt{5}).$$

Ἀσκήσεις : 889, 891.

4ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ.

Π. χ. $$\frac{\mu}{\alpha+\sqrt{\beta}} = \frac{\mu(\alpha-\sqrt{\beta})}{(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})} = \frac{\mu(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$$

$$\frac{\mu}{\alpha-\sqrt{\beta}} = \frac{\mu(\alpha+\sqrt{\beta})}{(\alpha-\sqrt{\beta})(\alpha+\sqrt{\beta})} = \frac{\mu(\alpha+\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι :

$$\frac{4}{3-2\sqrt{5}} = \frac{4(3+2\sqrt{5})}{(3-2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})} = \frac{4(3+2\sqrt{5})}{9-20} = -\frac{4}{11}(3+2\sqrt{5}).$$

Ἀσκήσεις : 894, 896, 898, 900.

5ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν τὸν παρονομαστὴν ὡς ἑξῆς : $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+\sqrt{\gamma}$ καὶ πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\sqrt{\gamma}$ καὶ ἔχομεν :

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} = \frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{[(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+\sqrt{\gamma}][(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\sqrt{\gamma}]} =$$

$$= \frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-\gamma} = \frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\alpha+\beta-\gamma+2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Τὸ τελευταῖον κλάσμα περιέχει ἕναν ἄρρητον ὅρον εἰς τὸν παρονομαστήν του· ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ $\alpha+\beta-\gamma$ ὡς ἕνα ὅρον, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου κλάσματος ἐπὶ

$$(\alpha+\beta-\gamma)-2\sqrt{\alpha\beta}$$

καὶ ἔχομεν

$$\frac{\mu}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{\alpha\beta})}{[(\alpha+\beta-\gamma)+2\sqrt{\alpha\beta}][(\alpha+\beta-\gamma)-2\sqrt{\alpha\beta}]}=$$

$$=\frac{\mu(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{\alpha\beta})}{(\alpha+\beta-\gamma)^2-4\alpha\beta}.$$

Ἀσκήσεις : 901, 903.

6ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $K=\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}$.

Τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}$$

ἢ

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}} \qquad (1)$$

Τὸ δεύτερον κλάσμα τῆς (1) εἶναι ἕνα ἀξιοσημείωτον πηλίκον τῆς μορφῆς $\dfrac{x^\nu-y^\nu}{x-y}$, τὸ ὁποῖον (§ 175) ἰσοῦται μὲ

$$x^{\nu-1}+yx^{\nu-2}+y^2x^{\nu-3}+\ldots+y^{\nu-1}.$$

Κατόπιν τούτου ἡ (1) γράφεται :

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}}+\ldots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

ἢ

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}+\ldots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)}$$

Π.χ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3-\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^3}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^4-\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^4}{\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[4]{\alpha^3}+\sqrt[4]{\beta\alpha^2}+\sqrt[4]{\beta^2\alpha}+\sqrt[4]{\beta^3}\right).$$

Ἀσκήσεις : 904, 905.

7ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $K=\dfrac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ὁ δείκτης ν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός.

I. *Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος*, γράφομεν τὸ δοθὲν κλάσμα ὡς ἑξῆς :

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$$

ἢ

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\alpha}} \qquad (1)$$

Τὸ δεύτερον κλάσμα τῆς (1) εἶναι ἕνα ἀξιοσημείωτον πηλίκον τῆς μορφῆς $\dfrac{x^\nu-y^\nu}{x+y}$, τὸ ὁποῖον (§ 175, II.) εἶναι ἴσον μὲ

$$x^{\nu-1}-yx^{\nu-2}+y^2x^{\nu-3}-y^3x^{\nu-4}+\ldots-y^{\nu-1}.$$

Κατόπιν τούτου ἡ (1) γράφεται :

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

ἢ

$$\boxed{\frac{\mathbf{A}}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\mathbf{A}}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)}$$

Π. χ. $\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}}=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^4-\left(\sqrt[4]{\beta}\right)^4}{\sqrt[4]{\alpha}+\sqrt[4]{\beta}}=$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[4]{\alpha^3}-\sqrt[4]{\alpha^2\beta}+\sqrt[4]{\beta^2\alpha}-\sqrt[4]{\beta^3}\right).$$

II. *Ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός*, γράφομεν τὸ δοθὲν κλάσμα ὡς ἑξῆς :

$$\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$$

ἢ $$K=\frac{A}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu+\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ ν εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τὸ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu+\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}$ καὶ δίδει πηλίκον :

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-2}\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$$

ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται :

$$\frac{\mathbf{A}}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$
$$=\frac{\mathbf{A}}{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\beta\alpha^{\nu-2}}+\sqrt[\nu]{\beta^2\alpha^{\nu-3}}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-2}\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

Π χ. $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^3}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}=$

$$=\frac{1}{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}\right).$$

8ον. Τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $K=\frac{A}{\sqrt[\kappa]{\beta}\pm\sqrt[\lambda]{\gamma}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τρέπομεν τὰς δύο ῥίζας εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ καταλήγομεν εἰς τὴν μορφὴν $\frac{A}{\sqrt[\nu]{B}\pm\sqrt[\nu]{\Gamma}}$,

τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ τρέπομεν εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον μὲ ρητὸν παρονομαστήν.

Π. χ. $$\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}=\frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^3}-\sqrt[6]{\beta^2}}=\frac{1}{\alpha^3-\beta^2}\cdot\frac{\alpha^3-\beta^2}{\sqrt[6]{\alpha^3}-\sqrt[6]{\beta^2}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^3-\beta^2}\cdot\frac{\left(\sqrt[6]{\alpha^3}\right)^6-\left(\sqrt[6]{\beta^2}\right)^6}{\sqrt[6]{\alpha^3}-\sqrt[6]{\beta^2}}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^3-\beta^2}\cdot\left(\sqrt[6]{\alpha^{15}}+\sqrt[6]{\beta^2\alpha^{12}}+\sqrt[6]{\beta^4\alpha^9}+\sqrt[6]{\beta^6\alpha^6}+\sqrt[6]{\beta^8\alpha^3}+\sqrt[6]{\beta^{10}}\right).$$

Ἀσκήσεις : 907, 908, 909.

4. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικοὺς

235 Ἐκθέται κλασματικοί. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν νιοστὴν ρίζαν τοῦ α^μ, δηλαδὴ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἐκθέτης μ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δείκτου ν, δηλ. ἐὰν εἶναι $\mu=\nu\rho$ (2)
ἡ (1) γράφεται

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu\rho}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\right)^\rho=\alpha^\rho \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2) λαμβάνομεν $\rho=\frac{\mu}{\nu}$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸν ἐκθέτην ρ μὲ τὸ ἴσον του $\frac{\mu}{\nu}$ ἔχομεν

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης μ δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δείκτου ν, τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἕνα κλάσμα καὶ ἑπομένως τὸ σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων).

Ἐν τούτοις, πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς γενικεύσεως, παραδεχόμεθα, ὅτι, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ μ καὶ ν, τὸ σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$

ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὴν ρίζαν $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, δηλ. ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Π. χ. $\alpha^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\alpha^3}$, $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha^7} = \alpha^{\frac{7}{2}}$.

236. Παρατήρησις. Ἡ ποσότης $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δὲν ἀλλάσσει τιμήν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ μὲ ἕνα κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτό.

Δηλ. ἐὰν εἶναι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}$ θὰ εἶναι πάντοτε

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu'}{\nu'}} \qquad (1)$$

Πράγματι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ ἰσότης (1) δύναται νὰ γραφῇ

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu']{\alpha^{\mu'}}.$$

Τρέπομεν τὰς δύο αὐτὰς ρίζας εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους καὶ ἔχομεν

$$\sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}} = \sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu'\nu}} \qquad (2)$$

Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}$ θὰ εἶναι καὶ $\mu\nu' = \mu'\nu$. Ἐπειδὴ $\mu\nu' = \mu'\nu$ ἡ ἰσότης (2) ὑφίσταται καὶ ἑπομένως ὑφίσταται καὶ ἡ (1).

Π. χ. $\alpha^{\frac{5}{10}} = \alpha^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\alpha^{\frac{12}{18}} = \alpha^{\frac{2}{3}}$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ ἁπλοποίησις τῶν ριζῶν γίνεται ἁπλούστερον, ἂν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς κλασματικοὺς ἐκθέτας.

Π. χ. $\sqrt[12]{\alpha^8} = \alpha^{\frac{8}{12}} = \alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$.

237. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλασματικούς. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους (§ 91—99) ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\boxed{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} \cdot \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\mu}{\nu}}}$$

Πράγματι· ἔχομεν :

$$\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} \cdot \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu}} \cdot \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\lambda}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu} \cdot \alpha^{\mu\lambda}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu+\mu\lambda}} =$$

$$= \alpha^{\frac{\kappa\nu+\mu\lambda}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\mu}{\nu}}.$$

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\boxed{\left(\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}}}$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\left(\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\left(\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa\mu}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\mu}} = \alpha^{\frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}}.$$

3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\boxed{(\alpha\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$(\alpha\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(\alpha\beta\gamma)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}\beta^{\mu}\gamma^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\beta^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

4ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\boxed{\frac{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\mu}{\nu}}} \qquad \text{ἐὰν } \frac{\kappa}{\lambda} > \frac{\mu}{\nu}.$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\frac{\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu}}}{\sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\lambda}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\frac{\alpha^{\kappa\nu}}{\alpha^{\mu\lambda}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\kappa\nu-\mu\lambda}} = \alpha^{\frac{\kappa\nu-\mu\lambda}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\mu}{\nu}}.$$

5ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}}$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}.$$

Ἀσκήσεις : 950, 951, 954, 956, 958, 960.

5. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀρνητικοὺς

238. Ἐκθέται ἀρνητικοί. Ἐδείξαμεν (§ 237) ὅτι, ἐὰν οἱ μ καὶ ν εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί, τότε :

Ἐὰν μ>ν, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}} \qquad (1)$$

Ἐὰν μ—ν=0, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{0} = 1}$$

Ἐὰν μ—ν<0, τὸ σύμβολον $\alpha^{\mu-\nu}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν.

Ἐὰν ὅμως θέσωμεν μ—ν=—ρ, θὰ εἶναι ν=μ+ρ.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἐκθέτην μ—ν μὲ τὸ ἴσον του —ρ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{-\rho} \qquad (2)$$

Ἐὰν πάλιν εἰς τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$ ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἐκθέτην ν μὲ τὸ ἴσον του μ+ρ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu+\rho}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\rho}} = \frac{1}{\alpha^{\rho}} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι :

$$\boxed{\alpha^{-\rho} = \frac{1}{\alpha^{\rho}}} \qquad (4)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκε-

ραίους ἀρνητικοὺς (§ 98, 2ον) ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας τυχόντας ἀριθμοὺς θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς, ἀκεραίους ἢ κλασματικούς.

Π. χ. θὰ εἶναι: $3^{-5}=\frac{1}{3^5}$, $5^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{5^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$.

Ἀσκήσεις: *967, 971, 973.*

Ἀσκήσεις

Ἰδιότητες ῥιζῶν:

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι ῥίζαι: (915).

778. 1. $\sqrt{2^4}$ 2. $\sqrt[3]{3^6}$ 3. $\sqrt[4]{\alpha^8}$ 4. $\sqrt[5]{\beta^{20}}$

779. 1. $\sqrt{9\alpha^2\beta^4}$ 2. $\sqrt[3]{\alpha^3\beta^6\gamma^9}$ 3. $\sqrt[3]{27\alpha^6\beta^{12}\gamma^3}$ 4. $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8\gamma^4}$.

Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ῥίζαι εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην: (916).

780. 1. $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[4]{\alpha}$ 2. $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt[4]{\alpha\beta^3}$, $\sqrt[5]{\gamma^4}$

781. 1. $\sqrt{2xy}$, $\sqrt[3]{3xy}$, $\sqrt[6]{6xy}$ 2. $\sqrt{3\alpha}$, $\sqrt[\mu]{(\alpha-\beta)^\lambda}$, $\sqrt[\nu]{(x+y)^3}$.

782. (917). Ποία ἀπὸ τὰς παραστάσεις $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{5}$ εἶναι μεγαλυτέρα;

Εἰς τὰς κάτωθι ῥίζας νὰ τεθοῦν ἐκτὸς ῥιζικοῦ ὅλοι οἱ δυνατοὶ παράγοντες τοῦ ὑπορρίζου. (918).

783. 1. $\sqrt{24}$ 2. $\sqrt{45}$ 3. $\sqrt[3]{24}$ 4. $\sqrt[3]{500}$

784. 1. $\sqrt{108\alpha^2\beta}$ 2. $\sqrt[3]{135x^4}$ 3. $\sqrt{9\alpha^2\beta^3\gamma^4}$ 4. $\sqrt[3]{82\alpha^5\beta^4\gamma^6}$.

Εἰς τὰς κάτωθι ῥίζας νὰ τεθοῦν ἐκτὸς ῥιζικοῦ ὅλοι οἱ δυνατοὶ παράγοντες τοῦ ὑπορρίζου. (919)

785. 1. $\sqrt{4\alpha^3\beta^2-12\alpha^2\beta^4}$ 2. $\sqrt{8\alpha^4\beta^3-16\alpha^4\beta^2}$ 3. $\sqrt{(\alpha^2+4\alpha\beta-4\beta^2)^3}$

786. 1. $\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ 2. $\sqrt{(\nu^2-1)(\nu+1)}$ 3. $\sqrt{3\alpha^2-6\alpha\beta+3\beta^2}$

787. 1. $\sqrt{50(x^2-1)(2x+2)}$ 2. $\sqrt{\alpha^{2\mu+\nu}\beta^{2\mu\nu}\gamma^{\mu+2\nu}}$ 3. $\sqrt{\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}$

788. 1. $\sqrt{4\alpha^5\beta^2-20\alpha^3\beta^3+25\alpha\beta^4}$ 2. $\sqrt{\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1}$ 3. $\sqrt[3]{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)}$.

Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις, ὁ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ καὶ νὰ γίνῃ ἁπλοποίησις. (920).

789. 1. $5\sqrt{3}$ 2. $3\sqrt{5}$ 3. $4\sqrt{8}$ 4. $2\sqrt{\alpha}$

790. 1. $-5x\sqrt{12x}$ 2. $-3\alpha^2\sqrt{\beta}$ 3. $\alpha\sqrt{\alpha+\beta}$ 4. $(x+y)\sqrt{2\alpha}$.

Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις, ὁ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ καὶ νὰ γίνῃ ἁπλοποίησις. (921).

791. 1. $\frac{1}{3}\sqrt{18}$ 2. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{216}$ 3. $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$

792. 1. $\frac{\alpha+\beta}{3}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ 2. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$

793. 1. $\frac{x}{x+\alpha}\sqrt{\frac{(\alpha x+\alpha^2)(\alpha x^2-\alpha^3)}{4x^3}}$ 2. $\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις. (922).

794. 1. $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$ 2. $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{32}$ 3. $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}$

795. 1. $\sqrt[3]{3\alpha^2\beta}\cdot\sqrt[3]{9\alpha\beta^4}$ 2. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{125}$

796. 1. $x\sqrt{y^2\omega}\cdot y\omega\sqrt{x^2\omega}$ 2. $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt[4]{3}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις. (923).

797. 1. $x\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\cdot y\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ 2. $\sqrt{\frac{3\alpha^4+6\alpha^3\beta+3\alpha^2\beta^2}{8\alpha\beta^3-8\beta^4}}\cdot\sqrt{\frac{2\alpha^2\beta-2\beta^3}{6\alpha^4\beta^3}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις. (924).

798. 1. $\sqrt{72}:\sqrt{8}$ 2. $\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{3}$ 3. $\sqrt[4]{243}:\sqrt[4]{3}$

799. 1. $\sqrt[3]{54x^4}:\sqrt[3]{2x}$ 2. $5\sqrt{50}:\sqrt{2}$ 3. $\sqrt[3]{7000}\cdot\sqrt[3]{875}$

800. 1. $\sqrt{54}:\sqrt{36}$ 2. $\sqrt[3]{\alpha^2}:\sqrt[4]{\alpha^3}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις. (925).

801. 1. $\frac{4\sqrt{\alpha^3\beta^5\gamma^6}}{\sqrt{16\alpha\beta^3\gamma^4}}$ 2. $\frac{\sqrt[3]{\alpha^5\beta^4}\cdot\sqrt[3]{\alpha^3\beta^2}}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^{12}}}$

802. 1. $\frac{\sqrt{54(x^3-xy^2)}}{\sqrt{6x(x+y)^2}}$ 2. $\frac{\sqrt[x]{x^{5x+2}}}{\sqrt[x]{x^{4x+2}}}$

803. 1. $\frac{\sqrt{\alpha^4x-2\alpha^2x^3+x^5}}{\sqrt{\alpha^2\beta-2\alpha\beta x+\beta x^2}}$ 2. $\frac{\sqrt{\alpha^4-\alpha^3x-\alpha^2x^2+\alpha^3x}}{\sqrt{\alpha^2+2\alpha x+x^2}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις. (926).

804. 1. $\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta^5}}:\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}$ 2. $\sqrt{\frac{5}{x^3}}:\sqrt{\frac{10}{x}}$ 3. $\sqrt{\frac{27\alpha}{2}}:\sqrt{\frac{3\alpha^3}{8}}$

805. 1. $\sqrt[3]{3\alpha} : \sqrt[3]{\dfrac{3}{\alpha^2}}$ 2. $\sqrt[4]{\dfrac{54x^3}{\alpha}} : \sqrt[4]{\dfrac{9x^5}{\alpha^3}}$ 3. $\sqrt[4]{125\alpha^6} : \sqrt[4]{\dfrac{\alpha^2}{5}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις : (927).

806. 1. $\left(\sqrt[3]{\alpha^2}\right)^6$ 2. $\left(\sqrt[3]{\beta^2}\right)^6$ 3. $\left(\sqrt{\alpha^3}\right)^4$

807. 1. $\left(\sqrt[4]{2x^6}\right)^2$ 2. $\left(\sqrt[6]{(1+\alpha)^3}\right)^2$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (928).

808. 1. $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^3}}$ 2. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^4}}$ 3. $\sqrt{\sqrt[3]{64\alpha}}$ 4. $\sqrt[3x]{\sqrt[4y]{\alpha^{xy}}}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (929).

809. 1. $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$ 2. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$

810. $\sqrt{14x^2-\sqrt{21x^4+\sqrt{19x^8-\sqrt{9x^{16}}}}}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (930).

811. 1. $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha^2}}}$ 2. $\sqrt[4]{\alpha^2\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha^4}}}$

812. 1. $\sqrt[3]{\omega\sqrt[3]{y\sqrt{x^6}}}$ 2. $\sqrt[5]{\mu^4\nu^3\sqrt[3]{\nu^2\mu\sqrt{\mu^4\nu^8}}}$

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀρρήτων παραστάσεων :

Νὰ ἐκτελεσθοῦν καὶ νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (931).

813. $3\sqrt{8}-7\sqrt{18}+9\sqrt{72}-12\sqrt{50}$

814. $2\sqrt{24}+3\sqrt{54}-\sqrt{150}$

815. $\sqrt{45\alpha^3}-\sqrt{80\alpha^3}+\sqrt{5\alpha}$

816. $\sqrt{45\alpha^3\beta}+\sqrt{125\alpha^3\beta}-\sqrt{320\alpha^3\beta}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν καὶ νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (932).

817. $3\sqrt{\dfrac{3}{4}}-\dfrac{2}{3}\sqrt{12}+6\sqrt{27}-11\sqrt{\dfrac{3}{16}}$

818. $3\sqrt{20}+\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{80}{9}}+\dfrac{3}{7}\sqrt{\dfrac{245}{16}}$

819. $3\sqrt{3}-\sqrt{\dfrac{123}{25}-3}-2\sqrt{432}$

820. $\sqrt{\dfrac{18\alpha^2\gamma}{\beta^2\delta}}-\sqrt{\dfrac{50\gamma^3}{\delta^3}}-\sqrt{\dfrac{128\alpha^4\gamma}{\beta^6\delta}}$

821. $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{1}{\beta}}$

822. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta\gamma}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha\gamma}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\beta}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν καὶ νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (933).

823. $\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{448}$

824. $\sqrt[3]{3\alpha^2(\alpha+\beta)^7}-4\alpha\beta\sqrt[3]{3\alpha^2(\alpha+\beta)}$

825. $\sqrt[3]{24\alpha^4\beta}+\sqrt[3]{3\alpha^4\beta x^3}-\sqrt[3]{81\alpha\beta x^6}$

826. $\sqrt[3]{14}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{216}+\sqrt[6]{196}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (934).

827. $\sqrt[3]{\frac{\alpha^3\beta^2+\alpha^3\gamma}{\beta^3}}-\sqrt[3]{\frac{x^3\beta^2+x^3\gamma}{\beta^3}}$

828. $\sqrt[3]{\frac{\alpha^7x-\alpha^6\beta}{x^3}}-\sqrt[3]{\frac{\alpha^4x-\alpha^3\beta}{x^3}}$

829. $2\sqrt[3]{\alpha^6\beta}-3\alpha^2\sqrt[3]{64\beta}+5\alpha\sqrt[3]{\alpha^3\beta}+2\alpha^2\sqrt[3]{125\beta^4}+3\alpha^2\sqrt[3]{27\beta}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (935).

830. 1. $(\sqrt{8}+\sqrt{5})^2$ 2. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ 3. $(\sqrt{2}+5)^2$

831. 1. $(7-\sqrt{3})^2$ 2. $(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ 3. $(5\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

832. 1. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{6})^2$ 2. $(7\sqrt{2}-4\sqrt{3})^2$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (936).

833. 1. $(\sqrt{x+3}+5)^2$, 2. $(1-\sqrt{x+3})^2$,

834. 1. $(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^2$, 2. $(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2})^2$,

835. 1. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{x+1})^2$, 2. $(3\sqrt{x+5}+5\sqrt{x-5})^2$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (937).

836. $\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}\right)^2$

837. $\left[\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})+\sqrt{2+\sqrt{3}}\,(2+\sqrt{3})\right]^2$

838. $\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-\alpha^2}}{2}}\right)^2$

839. $\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}+\sqrt{\frac{1}{2}(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2})}\right]^2$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (938).

840. 1. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2$ 2. $(\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\mu]{\beta}+\sqrt[\rho]{\gamma})^2$

841. 1. $(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+5\sqrt{2})^2$ 2. $(\sqrt{5}+11\sqrt{3}-2+\sqrt{6})^2$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (939).

842. 1. $(\sqrt[3]{\alpha x^2}+\sqrt[3]{\beta y^2})^3$ 2. $(\sqrt[3]{\mu^2-\nu^2}-\sqrt[3]{(\mu+\nu)^2})^3$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (940).

843. 1. $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ 2. $(7-2\sqrt{3})(7+2\sqrt{3})$

844. 1. $(5\sqrt{7}+2\sqrt{8})(5\sqrt{7}-2\sqrt{8})$ 2. $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$

845. 1. $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})$ 2. $(3\sqrt{12}+5)(3\sqrt{12}-5)$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (941).

846. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

847. $(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})(\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta})$

848. $(1+x\sqrt{3}+x^2)(1-x\sqrt{3}+x^2)$

849. $\left(x+\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}\right)\left(x+\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}\right)$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (942).

850. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

851. $\sqrt{x+y+\sqrt{4xy}}\cdot\sqrt{x+y-\sqrt{4xy}}$

852. $\sqrt{x+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{y}}$

853. $\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^3-\beta^3}}\cdot\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha^3-\beta^3}}$

854. $\sqrt[3]{\mu\sqrt{\mu}-\sqrt{\mu^3-\nu^6}}\cdot\sqrt[3]{\mu\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu^3-\nu^6}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (943).

855. 1. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ 2. $(5\sqrt{12}+2\sqrt{3})(7\sqrt{12}-2\sqrt{3})$

856. 1. $(3+8\sqrt{7})(5-2\sqrt{7})$ 2. $(5\sqrt{3}-3\sqrt{6})(3\sqrt{8}-4)$

857. 1. $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$ 2. $(9\sqrt{10}+\sqrt{6})(2\sqrt{6}-\sqrt{10})$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (944).

858. 1. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(2\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$ 2. $(\alpha+\sqrt{x})(\beta-\sqrt{y})$

859. $\left(\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\beta\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\left(\beta\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (945).

860. $(\sqrt{2}+2\sqrt{18}-5\sqrt{50}+4\sqrt{32})\cdot\sqrt{2}$

861. $(\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}+3\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192})\cdot\sqrt[3]{3}$

862. $(3\sqrt{8}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{72}-2\sqrt{20}-3\sqrt{2})$

863. $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (946).

864. $\left(\sqrt{\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^3}}+\sqrt{\frac{\alpha^3}{\beta}}\right)\cdot(\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta^3})$

865. $\sqrt[2\mu]{\sqrt[3\nu]{\alpha^5}}\cdot\sqrt[6\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha^5}}\cdot\sqrt[\mu]{\sqrt[6\nu]{\alpha^9}}\cdot\sqrt[6\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$

866. $\left(2x\sqrt{\frac{x}{x^2-\alpha^2}}+\sqrt{\frac{x(x+\alpha)}{x-\alpha}}+\sqrt{\frac{x^2(x^2-\alpha x)}{x+\alpha}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x+\alpha}{x-\alpha}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (947).

867. $(\sqrt{x^2+xy}+x-\sqrt{xy})(\sqrt{xy+y^2}-\sqrt{xy}+y)$

868. $(\sqrt{\alpha x}+\sqrt{\beta y})(\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{xy})[(\alpha-y)\sqrt{\beta x}-(\beta-x)\sqrt{\alpha y}]$

869. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$

870. $\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}}}\cdot\sqrt{\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\alpha\gamma}+\dfrac{1}{\alpha\beta}}}$.

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (948).

871. $(8\sqrt{14}-6\sqrt{63}+4\sqrt{28}-10\sqrt{7}):2\sqrt{7}$

872. $(2\sqrt{8}+7\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}):2\sqrt{2}$

873. $(4\sqrt{12}-2\sqrt{48}-9\sqrt{3}+3):\sqrt{27}$

874. $(2\sqrt{32}+3\sqrt{72}+\sqrt[4]{64}):\sqrt{8}$.

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (949).

875. $(\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+\alpha^2\beta\gamma\sqrt[3]{\alpha^2\beta\gamma}-3\alpha\beta^2\gamma\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma}+\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma^2}):\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

876. $[(x+y)\sqrt{x+y}-(x-y)\sqrt{x^2-y^2}+xy\sqrt{x^2y+xy^2}]:\sqrt{x+y}$.

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (950).

877. $(B\sqrt{B}-\beta\sqrt{\beta}):(\sqrt{B}-\sqrt{\beta})$

878. $(3x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}-2):(3\sqrt{x}-2)$

879. $(\alpha^3-2\sqrt[4]{\alpha^2\beta^3}-\alpha^2\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}+2\beta\sqrt[12]{\beta}):(\sqrt{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})$.

Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις : (951).

880. 1. $\dfrac{\alpha+\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ 2. $\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\gamma}}$

881. $\dfrac{(3+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (952).

882. $\dfrac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$

883. $\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

884. $\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2+\beta}}:\left(\sqrt{\dfrac{\beta^2-\beta}{\alpha^2-\alpha}}:\sqrt{\dfrac{\beta^2-1}{\alpha^2-1}}\right).$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (953).

885. $\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}}}:\sqrt{\dfrac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta}}}$

886. $\left(\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}\right):\left(\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}\right).$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (954).

887. 1. $\sqrt{18}\pm\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{14+2\sqrt{45}}$ 3. $\sqrt{50}\pm\sqrt{2}$

888. 1. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ 2. $\sqrt{8}\pm\sqrt{2}$ 3. $\sqrt{29+\sqrt{720}}$

889. 1. $\sqrt{32}\pm\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{5+\sqrt{24}}$.

Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν κάτωθι μονωνύμων : (955).

890. 1. $36\alpha^2\beta^4\gamma^2$ 2. $121\alpha^4\beta^6\gamma^2$ 3. $16x^4y^2\omega^2$ 4. $144\alpha^6\beta^8\gamma^4$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (956).

891. 1. $\sqrt{\dfrac{81\alpha^2\beta^4}{16x^2}}$ 2. $\sqrt{\dfrac{25\alpha^4\beta^6}{9\gamma^4x^2}}$ 3 $\sqrt{\dfrac{9x^2y^2}{64\alpha^4\beta^2}}$ 4. $\sqrt{\dfrac{\alpha^4\beta^6\gamma^2}{16x^4y^6}}$.

Τροπὴ κλασμάτων μὲ ἄρρητον παρονομαστὴν εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν :

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν : (956΄).

892. 1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ 3. $\dfrac{7}{\sqrt{7}}$

893. 1. $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ 2. $\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$ 3. $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν : (957).

894. 1. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{\alpha^2}}$ 2. $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$ 3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0{,}008}}$

895. 1. $\dfrac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}$ 2. $\dfrac{3\sqrt[6]{64}}{\sqrt[4]{16}}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν : (958).

896. 1. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 2. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

897. 1. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 2. $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$

898. 1. $\frac{3}{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$ 2. $\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$

899. 1. $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ 2. $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν: (959).

900. 1. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ 2. $\frac{\beta+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}-\beta}$

901. 1. $\frac{2}{\sqrt{3}-2}$ 2. $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta+\sqrt{\gamma}}$

902. 1. $\frac{6}{\sqrt{8}-2}$ 2. $\frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}$

903. 1. $\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ 2. $\frac{\alpha-\sqrt{5}}{\alpha+\sqrt{5}}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν: (960).

904. 1. $\frac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}$ 2. $\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2}-\sqrt{\alpha\beta^2}}$

905. 1. $\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\alpha}}$ 2. $\frac{1+\alpha+\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\alpha-\sqrt{1-\alpha^2}}$

906. 1. $\frac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ 2. $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

907. 1. $\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ 2. $\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν: (961).

908. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **909.** $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

910. $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν: (962).

911. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ **912.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$

913. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν: (963).

914. 1. $\dfrac{1}{3+\sqrt[3]{4}}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}$

915. 1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Νὰ τραποῦν τὰ κάτωθι κλάσματα εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν: (964).

916. 1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}$

917. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ριζῶν:

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα: (982)

918. $\sqrt{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\sqrt{\alpha\beta}}$

919. $\sqrt{\alpha-x}+\dfrac{x\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha^2-\alpha x}}$

920. $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

921. $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$

922. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

923. $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνουν αἱ δυναταὶ ἁπλοποιήσεις: (984).

924. $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

925. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$

926. $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}}+\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}$

927. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (985).

928. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

929. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^3-\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^3$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (989).

930. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$

931. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

932. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\alpha+\beta)$

933. $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (990).

934. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

935. $[x^2+x(2+\sqrt{2})+(3+2\sqrt{x})][x^2+x(2-\sqrt{2})+(3-2\sqrt{x})]$

936. $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha-1}-\sqrt{\alpha+1}}-\dfrac{\sqrt{\alpha-1}-\sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\alpha+1}}\right)-\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (987).

937. $\dfrac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$

938. $\dfrac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (988).

939. $\dfrac{\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

940. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{\mu+x}{\mu-x}}-\sqrt{\dfrac{\mu-x}{\mu+x}}}{\sqrt{\dfrac{\mu+x}{\mu-x}}+\sqrt{\dfrac{\mu-x}{\mu+x}}}$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων: (996).

941. $\sqrt{\frac{3}{4}-x}+\sqrt{2x}-\frac{3}{2}\sqrt{1-4x}$, ἐὰν $x=\frac{1}{12}$

942. $\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\frac{1-2x}{1-\sqrt{1+2x}}$, ἐὰν $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων: (997).

943. $x(x^2+3\beta)$, ἐὰν $x=\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^3}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^3}}$

944. $\frac{x^2+6x+1}{x^2-1}$, ἐὰν $x=\alpha+\sqrt{8}$

945. $\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}$, ἐὰν $x=-\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha-\beta}}$

946. x^3+3x, ἐὰν $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

947. $x^3+\lambda x+k$, ἐὰν

$$x=\sqrt[3]{-\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}$$

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων: (998).

948. $\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\beta}}x^2-2\alpha x+\alpha\sqrt{\beta}$, ἐὰν $x=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$ καὶ ἐὰν $x=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$

949. $\frac{2\beta\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

950. $\frac{2\alpha\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

951. $\frac{2\beta\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

952. $\frac{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}$, ἐὰν $x=\frac{2\alpha}{\beta+\frac{1}{\beta}}$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

953. $A=\frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ διὰ $x=2+\sqrt{3}$ καὶ διὰ $x=2-\sqrt{3}$

954. $B=\frac{x-y}{1+xy}$ διὰ $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

955. $\Gamma=\frac{\sqrt{\alpha+\beta x}+\sqrt{\alpha-\beta x}}{\sqrt{\alpha+\beta x}-\sqrt{\alpha-\beta x}}$ διὰ $x=\frac{2\alpha\gamma}{\beta(1+\gamma^2)}$.

956. (976). Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:

$$(5\alpha^2-41\alpha\beta+42\beta^2)\sqrt[12]{\alpha} : \left(\sqrt[3]{\alpha} - \frac{7\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}\right)$$

καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου διὰ $\alpha=0{,}001$ καὶ $\beta=-0{,}02$.

('Ανωτάτη Σχολὴ 'Εμπορ. 'Επιστημῶν)

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς, κλπ.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι δυνάμεων: (965).

957. 1. $25^{\frac{1}{2}}$ 2. $27^{\frac{1}{3}}$ 3. $8^{\frac{2}{3}}$ 4. $64^{\frac{5}{6}}$ 5. $125^{\frac{2}{3}}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι δυνάμεων: (966).

958. 1. $64^{\frac{2}{3}}$ 2. $512^{\frac{1}{3}}$ 3. $\left(\frac{16}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$ 4. $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ 5. $10\cdot 125^{\frac{1}{3}}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (967).

959. $\frac{3}{4}(8\alpha^6\beta)^{\frac{1}{3}} - \frac{2\beta}{3}\left(\frac{\alpha^6}{27\beta^5}\right)^{\frac{1}{3}}$

960. $\alpha(3\alpha^2\beta)^{\frac{1}{2}} + (12\alpha^4\beta)^{\frac{1}{2}}$

961. $8\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 12^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\cdot 27^{\frac{1}{3}} - 2\left(\frac{3}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

962. $\beta(8\alpha^6\beta)^{\frac{1}{3}} + 4\alpha(\alpha^3\beta^4)^{\frac{1}{3}} - (125\alpha^6\beta^4)^{\frac{1}{3}}$.

963. (968). Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^4\beta^2}} + \sqrt{\beta^2\sqrt[3]{\alpha^2\beta^4}}$ διὰ τῆς χρήσεως κλασματικῶν ἐκθετῶν.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (969).

964. 1. $\alpha^{\frac{3}{4}}\cdot\alpha^{\frac{5}{3}}$ 2. $\left(\alpha^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$ 3. $\left(4\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{2}{3}}\gamma\right)^{\frac{1}{4}}$

965. $\left(\frac{\alpha y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\beta x}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{y^2}{\alpha^2\beta^2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (970).

966. 1. $\left(9\alpha^{\frac{3}{4}} + 4\beta^{\frac{1}{3}}\right)^2$ 2. $\left(\alpha^{\frac{2}{3}} - 3\alpha^{\frac{1}{4}} - 5\right)^2$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις: (971).

967. $\left(\alpha^{\frac{7}{2}} - \alpha^3 + \alpha^{\frac{5}{2}} - \alpha^2 + \alpha^{\frac{3}{2}} - \alpha + \alpha^{\frac{1}{2}} - 1\right)\cdot\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + 1\right)$

968. $\left(\alpha^{\frac{3}{4}} + \beta^{\frac{2}{5}}\right)\cdot\left(\alpha^{\frac{3}{4}} - \beta^{\frac{2}{5}}\right)$.

969. (975). Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις

$$\left(\alpha^{\frac{3}{4}}-\beta^{\frac{3}{4}}\right):\left(\alpha^{\frac{1}{4}}-\beta^{\frac{1}{4}}\right)$$

καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου διὰ $\alpha=0{,}01$ καὶ $\beta=0{,}16$.

('Ανωτάτη Σχολὴ 'Εμπορικῶν 'Επιστημῶν 1946)

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου καὶ ὑπολοίπου : (977).

970. $\left(\alpha^2-\alpha^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}\right):\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$ διὰ $\alpha=0{,}01$ καὶ $x=16$

971. $\left(\alpha^3-2\sqrt[4]{\alpha^2\beta^3}-\alpha^2\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}+2\beta\sqrt[12]{\beta}\right):\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)$ διὰ $\alpha=0{,}0001$, $\beta=0{,}008$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (972).

972. $\alpha^{-\frac{1}{2}}\cdot\alpha^{\frac{7}{4}}\cdot\alpha^{-\frac{1}{5}}$

973. $\left[(\alpha-\beta)^{-1}\cdot(\beta-\alpha)^{-1}\cdot(\alpha-\beta)^{-1}\right]^{-2}$

974. $\alpha^{-\frac{3}{4}}\cdot\beta^{-2}\cdot\alpha^{\frac{5}{6}}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}\cdot\gamma$

975. $\left(1^{-1}-\alpha^{-5}\right)^{-5}\cdot\left(\alpha^{-5}-1^{-1}\right)^{-5}$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις : (973).

976. $(\alpha^{-1}-x^{-1}):\left(\alpha^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)$

977. $\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}+2\alpha^{\frac{1}{4}}-1\right)^2$

978. $\left[\left(\frac{\alpha-\beta}{x+y}\right)^{-3}\right]^2\cdot\left[\left(\frac{x+y}{\beta-\alpha}\right)^{-2}\right]^3\cdot\left[\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{-2}\right]^{-3}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων : (974).

979. $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}z-x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{3}}}{xy-y\sqrt{x}+\frac{x}{y}z^2}$ διὰ $x=0{,}0001$, $y=-0{,}008$, $z=-\frac{1}{2}$

980. $\dfrac{\alpha^{-\frac{1}{3}}\beta^3+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^2-\alpha\beta}{\sqrt[3]{\alpha^4\beta^6}-\alpha\beta\gamma}$ διὰ $\alpha=0{,}001$, $\beta=-0{,}2$, $\gamma=-\frac{1}{3}$

981. $\dfrac{\alpha^{-\frac{3}{4}}+\beta^{-3}+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta}{\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta^2}+3\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$ διὰ $\alpha=0{,}0016$, $\beta=-0{,}027$.

('Ανωτάτη Σχολὴ 'Εμπορικῶν 'Επιστημῶν 1947)

982. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$A = \frac{\alpha\beta^{-2}\cdot(\alpha^{-1}\beta^{2})^{4}\cdot(\alpha\beta^{-1})^{2}}{\alpha^{-2}\beta\cdot(\alpha^{2}\beta^{-1})^{3}\cdot\alpha^{-1}\beta}$$

καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμή της διὰ $\alpha=10^{-3}$, $\beta=-10^{-2}$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (1006).

983. $\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x-x^{\frac{1}{2}}+1\right)$

984. $\left(2^{\frac{1}{4}}\alpha+3^{\frac{1}{4}}\beta\right)\left(3^{\frac{1}{4}}\alpha-2^{\frac{1}{4}}\beta\right)-6^{\frac{1}{4}}(\alpha^{2}-\beta^{2})+2^{\frac{1}{3}}\alpha\beta$

985. $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}+\gamma^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}-\gamma^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}+\gamma^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}-\gamma^{\frac{1}{2}}\right).$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (1007).

986. $$\sqrt{\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}-2}\cdot\frac{2(\alpha x)^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{x^{2}}{\alpha}-\frac{\alpha^{2}}{x}-3(x-\alpha)\right]^{\frac{1}{3}}}$$

987. $$\left(\sqrt[x]{\alpha^{-\frac{2}{y}}}+\sqrt[\varrho]{\alpha^{\frac{1}{y}}\beta}+2\sqrt{\sqrt[\varrho]{\beta}}\;\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[\varrho]{\alpha^{x-2\varrho}}}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

988. $$\sqrt{\alpha^{\frac{2}{3}}-6\alpha^{\frac{1}{3}}-4\alpha^{\frac{1}{12}}+9+12\alpha^{-\frac{1}{4}}+4\alpha^{-\frac{1}{2}}}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (1011).

989. $$\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$$

990. $$\frac{\alpha^{2}-\alpha^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}$$

991. $$\frac{\alpha-x+4\alpha^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}-4\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+2\alpha^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}}$$

992. $$\frac{1+x-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)+x^{\frac{1}{2}}\left(2+\frac{9}{16}x^{\frac{1}{6}}\right)}{1-\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}$$

993. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον:

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}\right).$$

994. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς παραστάσεως:

$$\sqrt[3]{x^2}+2x^{\frac{1}{3}}-16x^{-\frac{2}{3}}-\frac{32}{x} \text{ διὰ τῆς } x^{\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{6}}+\frac{4}{\sqrt{x}}.$$

995. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τῆς παραστάσεως:

$$4\sqrt[3]{x^2}-8x^{\frac{1}{3}}-5+\frac{10}{\sqrt[3]{x}}+3x^{-\frac{2}{3}} \quad \text{διὰ} \quad 2x^{\frac{5}{12}}-\sqrt[12]{x}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}.$$

996. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$A=\frac{(xy)^{\alpha+\beta}+x^{\beta}y^{\alpha}-x^{\alpha}y^{\beta}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}(xy)^{\beta}+y^{\alpha+\beta}\left[(xy)^{\beta}-(xy)^{-\alpha}\right]-y^{2\beta}}.$$

997. Νὰ ἐπαληθευθῇ:

$$\frac{9y^2}{x}\sqrt{\frac{y^2}{x^{-1}}}+\frac{x}{4}-3y+y^2+6\sqrt{x^{-1}y^5}=$$

$$=\left(y^{\frac{2}{3}}+3yx^{-\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (1012).

998. $$\frac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{8}}+1}$$

999. $$\frac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}-xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{5}{3}}-2xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}$$

1000. $$\frac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}-16x^{-\frac{2}{3}}-32x^{-1}}{x^{\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{2}}}$$

1001. $$\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^{x}\left(x-\frac{1}{y}\right)^{y-x}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^{y}\left(y+\frac{1}{x}\right)^{x-y}}, \quad (x>0,\ y>0,\ xy>1).$$

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων: (1013).

1002. $4x^{-2}+4y^{-2}-8x^{-1}y^{-1}$, ἐὰν $x=3+\sqrt{5}$, $y=3-\sqrt{5}$

1003. $(1-\alpha x)(1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{\frac{1}{2}}(1-\beta x)^{-\frac{1}{2}}$, ἐὰν $x=\alpha^{-1}\left(\frac{2\alpha}{\beta}-1\right)^{\frac{1}{2}}$

1004. $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)\left(x^{\frac{1}{\mu}}+x^{\frac{1}{\nu}}\right)$ ἐὰν $x=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{\frac{2\mu\nu}{\mu-\nu}}$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων: (1014).

1005. $2\alpha(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$, ἐὰν $x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$

1006. $\mu\nu+(\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\nu^2-1)^{\frac{1}{2}}$, ἐὰν $\mu=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $\nu=\left(y+\frac{1}{y}\right)$

1007. $\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\cdot\left(\frac{\beta+x}{\beta-x}\right)^{\frac{1}{2}}$, ἐὰν $x=[\alpha(2\beta-\alpha)]^{\frac{1}{2}}$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων: (1015).

1008. $\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2}}-\left[\alpha-(\alpha^2-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+\left[\alpha-(\alpha^2-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}$ ἐὰν $x=\alpha\left[1-\frac{16\beta^2}{(1+\beta)^4}\right]$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

1009. $\frac{1-\alpha x}{1+\alpha x}\sqrt{\frac{1+\beta x}{1-\beta x}}$ ἐὰν $x=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}-1}$.

1010. Ἂν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς ποσότητος

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ποσότητος

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}.$$

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τῶν κεφαλαίων τοῦ Δευτέρου Βιβλίου

1011. (264). Αἱ κάτωθι παραστάσεις νὰ τεθοῦν ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς ἀθροίσματος τριῶν τετραγώνων :

1. $2(x^2+y^2+\omega^2-xy-y\omega-\omega x)$ 2. $(x^2+y^2+\omega^2)^2$.

1012. (265). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ τὸ διπλάσιόν του εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων.

1013. (266). Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον δύο παραστάσεων, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τετραγώνων·

1014. (267). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2$ εἶναι ἕνα τέλειον τετράγωνον.

1015. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$A=(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma+\delta)(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

δύναται, κατὰ τρεῖς διαφόρους τρόπους νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν μιᾶς διαφορᾶς δύο τετραγώνων.

1016. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι το πολυώνυμον

$$\Pi=\alpha(\alpha+\omega)(\alpha+2\omega)(\alpha+3\omega)+\omega^4$$

εἶναι τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἄλλου πολυωνύμου.

Ἐφαρμογή : Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀκεραίων ηὐξημένον κατὰ μονάδα εἶναι ἕνα τέλειον τετράγωνον.

1017. (407). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.

1018. (408). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον ἑνὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 1, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8.

1019. (409). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ποτὲ διαιρετὴ διὰ 2.

1020. (410). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ 8.

1021. (411). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, μὴ διαιρετῶν διὰ 3, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

1022. (412). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ κύβου του εἶναι διαιρετὴ διὰ 6.

1023. (413). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ 8.

1024. (414). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ 2 καὶ ὄχι διὰ 4.

1025. (415). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ κύβου ἀρτίου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ εἰκοσαπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 48.

1026. (416). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τελευταίων ἐξ ἑπτὰ διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ἐλαττούμενον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων, ἀποτελεῖ ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 12.

1027. (417). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ τεθῇ πάντοτε ὑπὸ τὴν μορφὴν διαφορᾶς δύο τετραγώνων.

1028. (447). Ἐὰν $A = \pi o\lambda.\delta + \upsilon$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$A^{\mu} = \pi o\lambda.\delta + \upsilon^{\mu}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις:

1029. (418). $1+10^{\nu}+100^{\nu}$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 3

1030. (419). $\nu^{3}-\nu$ » » » 24, ἐὰν ν περιττὸς ἀριθμὸς (ἐκτὸς τῆς μονάδος)

1031. (420). $(\alpha^{2}-1)\alpha^{2}(\alpha^{2}+1)$ » » » 60, α ἀκέραιος

1032. (421). $\nu^{5}-5\nu^{3}+4\nu$ » » » 120, ἐὰν ν〉2 καὶ ἀκέραιος

1033. (422). $2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$ » » » 9

1034. (423). $3^{4\nu+1}+10\cdot 3^{2\nu}-13$ » » » 64

1035. (424). $9^{3\nu}-8^{2\nu}$ » » » 665

1036. (425). $9^{2\nu+1}+8^{\nu+2}$ » » » 73

1037. (426). $2^{7\nu+3}+3^{2\nu+1}\cdot 5^{4\nu+1}$ » » » 23

1038. (427). $3\cdot 5^{2\nu+1}+2^{3\nu+1}$ » » » 17

1039. (428). $2^{2\nu-1}\cdot 3^{\nu+2}+1$ » » » 11

1040. (429). $7^{2\nu+1}-48\nu-7$ » » » 288, ὅταν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

1041. (430). $2^{2\nu}+15\nu-1$ » » » 9

1042. (431). $156^{\nu}-12^{\nu}-13^{\nu}+1$ » » » 132

1043. (432). $(\alpha^{3}-\alpha)(\alpha^{2}-4)$ » » » 120, ἐὰν α〉2.

1044. (433). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ν δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, τὸ ἄθροισμα $1+2^{\nu}+2^{2\nu}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 7.

1045. (434). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οὐδεὶς ἀριθμὸς πρῶτος, ἐκτὸς τοῦ 5, δύναται νὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $\mu^{4}+4$.

1046. (435). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἕνα διώνυμον τοῦ πρώτου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $x-\alpha$ διαιρῇ ἀκριβῶς δύο πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\varphi(x)$, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς των καὶ ἀντιστρόφως.

1047. (436). Ἐὰν $x, y, \alpha, \beta, \gamma$ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $\alpha+10\beta+100\gamma$ εἶναι διαιρετὸς διὰ $x+10y$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς $\gamma x^{2}-\beta xy+\alpha y^{2}$ εἶναι διαιρετὸς διὰ $x+10y$.

1048. (437). Ἐὰν ἡ παράστασις $100\alpha+\beta$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $x+10\mu$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἡ παράστασις $\alpha x^{2}+\beta\mu^{2}$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $x+10\mu$.

1049. (438). Ἐὰν $\alpha x+\mu\beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\mu$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἡ παράστασις $(\alpha+\beta)(x+\mu)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $x-\mu$.

1050. (439) Ἐὰν $x+y+\omega=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον) $x^{3}+y^{3}+\omega^{3}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $xy\omega$

2ον) $x^{5}+y^{5}+\omega^{5}$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $xy\omega$.

1051. (440). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$A=(\alpha y-\beta x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha\omega)^2+(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$$

εἶναι διαιρετὴ διὰ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ καὶ διὰ $x^2+y^2+\omega^2$.

1052. (441). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$$(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ $2(x^2+y^2)$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις: (442).

1053. $(2x+y+1)^2-(x+2y-1)^2$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $3(x+y)$

1054. $(6x^2-7x-3)(x^2-7x+12)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ $3x^2-11x-4$.

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον: (443).

1055. $\varphi(x)=3x^4-12x+9$ περιέχει ὡς παράγοντα τὸν $x-1$

1056. $\varphi(x)=2x^3-5x+6$ » » » » $x+2$.

Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ, ἵνα τὸ πολυώνυμον : (444).

1057. $x^3+y^3+\omega^3+\mu xy\omega$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y+\omega$

1058. $(x+y+\omega)^3+\mu(x^3+y^3+\omega^3)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+y$

1059. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\mu(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\alpha+\beta+\gamma$.

1060. (445). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $\varphi(x)=x^\nu-x^{\nu-2}-2x+2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-1)^2$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον.

1061. (446). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$(x+y+\omega)^{2\nu+1}-x^{2\nu+1}-y^{2\nu+1}-\omega^{2\nu+1}$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(x+y+\omega)^3-x^3-y^3-\omega^3$.

Ἐὰν θέσωμεν $x+y=\alpha$ καὶ $xy=\beta$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι: (350).

1062. 1. $x^2+y^2=\alpha^2-2\beta$ 2. $x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta$

1063. 1. $x^4+y^4=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2$ 2. $x^5+y^5=\alpha^5-5\alpha^3\beta+5\alpha\beta^2$.

1064. (352). Ἐὰν θέσωμεν $x=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)^2$, $y=2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^2$ $\omega=\alpha^2+\beta^2$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι $x^2+y^2=\omega^6$.

1065. (353), Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha(3\beta^2-\alpha^2)$, $y=\beta(3\alpha^2-\beta^2)$, $\omega=\alpha^2+\beta^2$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ ἔχωμεν $x^2+y^2=\omega^3$.

1066. (354). Ἐὰν θέσωμεν $x^2+y^2=1$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$(3x-4x^3)^2+(3y-4y^3)^2=1.$$

1067. (355). Ἐὰν θέσωμεν $x=\alpha^2-\beta\gamma$, $y=\beta^2-\alpha\gamma$, $\omega=\gamma^2-\alpha\beta$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\alpha x+\beta y+\gamma\omega=(x+y+\omega)(\alpha+\beta+\gamma).$$

1068. (356). Ἐὰν θέσωμεν

$$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta,\quad B=\alpha+\beta-\gamma-\delta,\quad \Gamma=\alpha-\beta+\gamma-\delta,\quad \Delta=\alpha-\beta-\gamma+\delta$$

καί, ἐὰν εἶναι $\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$A\cdot B(A^2+B^2)=\Gamma\cdot\Delta(\Gamma^2+\Delta^2).$$

1069. (358). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν θέσωμεν:

$x=(\alpha^2+3\beta^2)^2-\alpha+3\beta,\qquad y=-(\alpha^2+3\beta^2)^2+\alpha+3\beta$

$\omega=(\alpha^2+3\beta^2)(\alpha+3\beta)-1,\qquad \varphi=-(\alpha^2+3\beta^2)(\alpha-3\beta)+1$

θὰ ἔχωμεν $x^3+y^3=\omega^3+\varphi^3$. (Ταυτότης τοῦ Binet)

1070. (359). Ἐὰν $x+y=\alpha$ καὶ $x^3+y^3=\beta^3$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις x^4+y^4 καὶ x^5+y^5, συναρτήσει τῶν α καὶ β.

1071. (360). Ἐὰν $x+y+\omega=\alpha$ καὶ $x^2+y^2+\omega^2=\beta^2$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $xy+y\omega+\omega x$, συναρτήσει τῶν α καὶ β.

1072. (361). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$A=x^4+y^4+\omega^4+x^2y^2+x^2\omega^2+y^2\omega^2-2xy\omega(x+y+\omega)$$

εἶναι πάντοτε θετικόν. Εἰς ποίαν περίπτωσιν γίνεται μηδέν;

1073. (362). Ἐὰν εἶναι

$$x+y+\omega=\alpha$$
$$x^2+y^2+\omega^2=\beta^2$$
$$x^3+y^3+\omega^3=\gamma^3$$

νὰ ὑπολογισθῇ τό γινόμενον $xy\omega$ συναρτήσει τῶν α, β, γ.

1074. (363). Ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ $\alpha X+\beta Y+\gamma Z$, τὸ y διὰ τοῦ $\alpha Y+\beta Z+\gamma X$ καὶ τὸ z διὰ τοῦ $\alpha Z+\beta X+\gamma Y$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(X^3+Y^3+Z^3-3XYZ)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma).$$

1075. Ἐὰν εἶναι $x^2+y^2=\omega^2$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$(y\omega)^4+(\omega x)^4+(xy)^4=(\omega^4-x^2y^2)^2.$$

1076. Ἐὰν θέσωμεν

$X=x^3-y^3+3xy(2x+y),\qquad Y=y^3-x^3+3yx(2y+x),$

$Z=3(x^2+xy+y^2),\qquad A=xy(x+y)$

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $X^3+Y^3=A\cdot Z^3$.

1077. (389). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σχέσις

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2=2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

ὑφίσταται μόνον, ὅταν $\alpha=\beta=\gamma$.,

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς ἀσκήσεως: (1046) (447/3).

1078. $A=\dfrac{6x^3-5x^2+3x-1}{3x^3+14x^2-4x+5}$

1079. $B=\dfrac{14x^3-9x^2-41x+6}{2x^3+7x^2-10x-24}$

1080. $\Gamma=\dfrac{10x^2+7x-12}{8x^3+10x^2-x+3}$

1081. $\Delta=\dfrac{6x^2-11x-35}{3x^3+2x^2-2x+5}$

1082. $E=\dfrac{x^5-3x^4+4x^3-2x^2-2x+1}{x^5-x^4+3x^3-2x^2+5x-2}.$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (376)

1083. $\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{2}{(\alpha+\beta)^3}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

1084. $\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$

1085. $\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-$

$$-\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (377).

1086. $\left(\frac{2\alpha}{3\beta}-1\right)\left(\frac{2\alpha}{3\beta}+1\right)\left(\frac{4\alpha^2}{9\beta^2}+1\right)$

1087. $\frac{1-x^2}{\alpha+\alpha^2}\cdot\frac{1-\alpha^2}{x+x^2}\left(\alpha+\frac{\alpha x}{1-x}\right)^2$

1088. $\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}$

1089. $\frac{1-x^2}{1+2y+y^2}\cdot\frac{1-y^2}{y^2+2xy+x^2}\cdot\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x}{1-y}\right).$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (378).

1090. $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+\gamma):\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{2}{\alpha\beta}-\frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}\right)$

1091. $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\alpha^2:\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)$

1092. $\left(\frac{\alpha}{\beta^2}+1\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^4}+1\right):\left(1+\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^4}+\frac{\alpha^3}{\beta^6}\right).$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (379).

1093. $\frac{1}{\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(1-\frac{\beta}{\gamma}\right)}$

1094. $\frac{1}{1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}}+\frac{1}{1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{1}{1+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}}.$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις, χρησιμοποιοῦντες τὴν ταυτότητα:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta).$$

1095. $\frac{x^2-y\omega}{1+\frac{y+\omega}{x}}+\frac{y^2-\omega x}{1+\frac{\omega+x}{y}}+\frac{\omega^2-xy}{1+\frac{x+y}{\omega}}$

1096. $$\frac{\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\alpha-\gamma}}{1+\frac{(\beta-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}+\frac{\frac{\beta(\beta+\gamma)}{\beta-\gamma}+\frac{\beta(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}}{1+\frac{(\gamma-\alpha)^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}}+$$
$$+\frac{\frac{\gamma(\gamma+\alpha)}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma(\gamma+\beta)}{\gamma-\beta}}{1+\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}$$

1097. $$\frac{\beta+\gamma-2\alpha}{\frac{(\beta-\gamma)^3}{\beta^3-\gamma^3}+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}}+\frac{\gamma+\alpha-2\beta}{\frac{(\gamma-\alpha)^3}{\gamma^3-\alpha^3}+\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2}}+$$
$$+\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{\frac{(\alpha-\beta)^3}{\alpha^3-\beta^3}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (380).

1098. $$\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-\alpha}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

1099. $$\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2}\cdot\frac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\left(\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}\right)$$

1100. $$\left[\frac{\frac{\alpha^2(1-x)}{y+\alpha^2x}+1}{\alpha-\frac{\alpha y(1-x)}{y+\alpha^2x}}\right]\cdot\frac{6\alpha x}{3y-\omega}\cdot\left(\frac{y+\omega}{4}-\frac{\omega}{3}\right)$$

1101. $$\left[\frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}+2\alpha}{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}-2\alpha}-\frac{2\beta+\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta-\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\right]:\frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}.$$

1102. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$A=(y\omega+\omega x+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}\right)-xy\omega\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{\omega^2}\right).$$

1103. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

$$(x+y+\omega)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}\right)-1=\frac{(x+y)(y+\omega)(\omega+x)}{xy\omega}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις : (381).

1104. $$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-\frac{\beta}{1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}-\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}.$$

1105. $$1-\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha-\beta}}$$

1106. $$\frac{1-x-x^3}{1-\frac{x}{1+x+\frac{x}{1-x+x^2}}}:\frac{1+x+x^3}{1+\frac{x}{1-x-\frac{x}{1+x+x^2}}}$$

1107. $$\frac{x^3}{1-\frac{1}{x^2+\frac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}}}+\frac{x^2-2}{1-\frac{1}{x^2-\frac{\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}}}$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (382).

1108. $$\frac{(xy)^{\alpha+\beta}+x^{\beta}y^{\alpha}-x^{\alpha}y^{\beta}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}(xy)^{\beta}+y^{\alpha+\beta}[(xy)^{\beta}-(xy)^{-\alpha}]-y^{2\beta}}$$

1109. $$\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\cdot\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$$

1110. $$\frac{\left[\frac{(\alpha+\beta)^3}{3\alpha\beta}-\alpha-\beta\right]\left[\frac{(\alpha-\beta)^3}{3\alpha\beta}+\alpha-\beta\right]}{\left[\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}-1\right][(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta]}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}.$$

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις: (383).

1111. $$\left[1+\frac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\frac{1+x}{1-3x}}\right]:\left[1-3\cdot\frac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\frac{1+x}{1-3x}}\right]$$

1112. $$\frac{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)}{1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}:\frac{1+\frac{x}{y}}{\frac{x^3}{y^3}-1}$$

1113. $$\frac{\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x+2}{4}+\frac{x+2}{x-3}}:\frac{\frac{x+3}{7}-\frac{x+3}{x+4}}{\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{x-1}}$$

1114. $$\frac{1-\frac{1}{x+y}}{\frac{y}{x+y}}:\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1-x}}{\frac{y}{1-x}-\frac{xy}{1+x}}$$

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων : (384).

1115. $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}$ διὰ $y=\dfrac{3x}{4}$

1116. $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{x}{\beta-\alpha}-\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ διὰ $x=\dfrac{\alpha^2(\beta-\alpha)}{\beta(\beta+\alpha)}$

1117. $\dfrac{x+2\alpha}{2\beta-x}+\dfrac{x-2\alpha}{2\beta+x}-\dfrac{4\alpha\beta}{4\beta^2-x^2}$ διὰ $x=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

1118. $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ διὰ $x=\dfrac{\alpha+1}{\alpha\beta+1}$, $y=\dfrac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha\beta+1}$.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων : (385).

1119. $\dfrac{x+2\mu}{2\nu-x}-\dfrac{2\mu-x}{2\nu+x}+\dfrac{4\mu\nu}{x^2-4\nu^2}$, διὰ $x=\dfrac{\mu\nu}{\mu+\nu}$

1120. $\dfrac{x+\mu}{y+\nu}$ διὰ $x=\dfrac{2\nu^2+\lambda^2-\mu^2}{3\mu}$, καὶ $y=\dfrac{2\mu^2+\lambda^2-\nu^2}{3\nu}$

1121. $(x+1)(y+1)$ διὰ $x=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$, $y=\dfrac{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$.

1122. (386). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $x^2+y^2+\omega^2-xy\omega$ διὰ

$$x=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha},\quad y=\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta},\quad \omega=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : (391).

1123. $\left(\dfrac{\mu+\nu}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mu-\nu}{2}\right)^2\equiv\mu\nu$

1124. $\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\equiv\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

1125. $\dfrac{1}{1-\mu x}\cdot\dfrac{\mu^2}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}+\dfrac{\nu^2}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}\cdot\dfrac{1}{1-\nu x}+$

$$+\frac{\lambda^2}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\cdot\frac{1}{1-\lambda x}\equiv\frac{1}{(1-\mu x)(1-\nu x)(1-\lambda x)}$$

1126. $\dfrac{1}{(\beta-\gamma)^2}+\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)^2}+\dfrac{1}{(\alpha-\beta)^2}\equiv\left(\dfrac{1}{\beta-\gamma}+\dfrac{1}{\gamma-\alpha}+\dfrac{1}{\alpha-\beta}\right)^2.$

1127. (337). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ θὰ εἶναι καὶ

$$\Sigma=\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}=0.$$

1128. (338). Ἐὰν εἶναι

$$\frac{\lambda}{x}=\frac{\mu}{y}=\frac{\nu}{\omega}\quad \text{καὶ}\quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{\omega^2}{\gamma^2}=1,$$

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+\frac{\mu^2}{\beta^2}+\frac{\nu^2}{\gamma^2}=\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{x^2+y^2+\omega^2}.$$

1129. (339). 'Εὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+3\beta^2}{\gamma^2+2\gamma\delta+3\delta^2}=\frac{\beta(\alpha-3\beta)}{\delta(\gamma-3\delta)}.$$

1130. (340). 'Εὰν εἶναι

$$\frac{x^2-y\omega}{\alpha}=\frac{y^2-\omega x}{\beta}=\frac{\omega^2-xy}{\gamma}$$

θὰ εἶναι καὶ $$\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{x}=\frac{\beta^2-\gamma\alpha}{y}=\frac{\gamma^2-\alpha\beta}{\omega}.$$

'Εὰν εἶναι $\frac{x}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καί: (341).

1131. $$\frac{x^2+\alpha^2}{x+\alpha}+\frac{y^2+\beta^2}{y+\beta}+\frac{\omega^2+\gamma^2}{\omega+\gamma}=$$
$$=\frac{(x+y+\omega)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(x+y+\omega)+(\alpha+\beta+\gamma)}$$

1132. $$\frac{x^\nu+\alpha^\nu}{x^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}}+\frac{y^\nu+\beta^\nu}{y^{\nu-1}+\beta^{\nu-1}}+\frac{\omega^\nu+\gamma^\nu}{\omega^{\nu-1}+\gamma^{\nu-1}}=$$
$$=\frac{(x+y+\omega)^\nu+(\alpha+\beta+\gamma)^\nu}{(x+y+\omega)^{\nu-1}+(\alpha+\beta+\gamma)^{\nu-1}}.$$

1133. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$A=\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{y\omega+y+1}+\frac{\omega}{\omega x+\omega+1}$$

ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $xy\omega=1$.

1134. 'Εὰν $x+y+\omega=1$ καὶ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=0$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2+(\alpha y+\beta\omega+\gamma x)^2+(\alpha\omega+\beta x+\gamma y)^2$$

ὅπου x, y, ω εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, οἱ δὲ α, β, γ οἱοιδήποτε ἀριθμοί.

1135. 'Εὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4=16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma).$$

1136. (387). 'Εὰν εἶναι $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{4}{\alpha}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta-\gamma)^3+2(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3=2(\beta+\gamma)^3.$$

1137. (388). 'Εὰν εἶναι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

1. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 2. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2$.

1138. (390). 'Εὰν $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ καὶ ν τυχὼν ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\mu\gamma\beta+\nu}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\mu\alpha\gamma+\nu}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\mu\alpha\beta+\nu}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\text{σταθερόν}.$$

'Εὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι: (392).

1139. $$\frac{1}{\tau-\alpha}+\frac{1}{\tau-\beta}+\frac{1}{\tau-\gamma}-\frac{1}{\tau}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

1140. $$1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}.$$

1141. (393). 'Εὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)=9.$$

1142. (394). 'Εὰν $\gamma=\alpha+2$ καὶ $\beta=\alpha-1$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\gamma^2+1}{\alpha^2\beta\gamma-\frac{\gamma}{\beta}+\beta\left(\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}\right)}+1=\alpha^2.$$

1143. (395). 'Εὰν $x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι

$$\frac{\alpha^2}{\alpha-x}=\frac{\beta^2}{\beta-x}=\alpha+\beta.$$

1144. (396]. 'Εὰν $x=\frac{2\beta^2-\alpha^2+\gamma^2}{3\alpha}$ καὶ $y=\frac{2\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{3\beta}$ νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{x+\alpha}{y+\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$.

1145. (397). 'Εὰν α καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $K=\frac{\alpha^{3\nu}-1}{\alpha^2+\alpha+1}$ εἶναι ἀκεραία.

1146. (398). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)-\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)$$

δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν μιᾶς διαφορᾶς δύο τετραγώνων.

1147. (399). 'Εὰν α, β, γ εἶναι ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ παράστασις

$$A=\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}$$

εἶναι μηδέν, θὰ εἶναι ἐπίσης μηδὲν καὶ ἡ παράστασις

$$B=\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}.$$

1148. (401). 'Εὰν εἶναι $\frac{\beta-\gamma}{y-\omega}+\frac{\gamma-\alpha}{\omega-x}+\frac{\alpha-\beta}{x-y}=0$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ

$$(\beta-\gamma)(y-\omega)^2+(\gamma-\alpha)(\omega-x)^2+(\alpha-\beta)(x-y)^2=0.$$

1149. (402). Ἀπὸ τὰς σχέσεις

$$\frac{\frac{\mu}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{\nu}{(\alpha+\gamma)^2}}{\alpha}=\frac{\frac{\nu}{(\beta+\gamma)^2}-\frac{\lambda}{(\alpha-\beta)^2}}{\beta}=\frac{\frac{\lambda}{(\alpha+\gamma)^2}+\frac{\mu}{(\beta+\gamma)^2}}{\gamma} \quad (1)$$

ὅπου οἱ ἀριθμηταὶ καὶ οἱ παρονομασταὶ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, νὰ εὑρεθοῦν αἱ σχέσεις

$$\alpha\lambda+\beta\mu=\gamma\nu \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\beta}{(\alpha+\gamma)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2} \quad (3)$$

1150. (403). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma\omega^2}{\beta\gamma(y-\omega)^2+\gamma\alpha(\omega-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2}$$

διατηρεῖ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν x, y, ω, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὴν $\alpha x+\beta y+\gamma\omega$.

1151. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις :

1ον. $$A^2-B^2=\left[\frac{(\alpha^2+\beta^2)A+(\alpha^2-\beta^2)B}{2\alpha\beta}\right]^2-\left[\frac{(\alpha^2-\beta^2)A+(\alpha^2+\beta^2)B}{2\alpha\beta}\right]^2$$

2ον. $$A^2+B^2=\left[\frac{(\alpha^2-\beta^2)A-2\alpha\beta B}{\alpha^2+\beta^2}\right]^2+\left[\frac{2\alpha\beta A+(\alpha^2-\beta^2)B}{\alpha^2+\beta^2}\right]^2.$$

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι, ἐὰν μία παράστασις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς ἀθροίσματος (ἢ μιᾶς διαφορᾶς) δύο τετραγώνων, δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ ἀνάλογον μορφὴν κατ' ἀπείρους τρόπους.

1152. (404). Ἐὰν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι ἀναγκαστικῶς ἀντίθετοι καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ἔπειτα, ὅτι :

$$\frac{1}{\alpha^{2\nu+1}}+\frac{1}{\beta^{2\nu+1}}+\frac{1}{\gamma^{2\nu+1}}=\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^{2\nu+1}}, \quad (\nu \text{ ἀκέραιος καὶ θετικός}).$$

1153. (405). Δίδεται ἡ παράστασις $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (1), ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι δοθέντες ἀριθμοί. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ y_1, y_2, y_3, y_4 τὰς τιμάς, ποὺ λαμβάνει ἡ (1), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ τὰ x_1, x_2, x_3, x_4 νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}:\frac{y_1-y_4}{y_2-y_4}=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}.$$

1154. (406). Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$ καὶ ἐὰν θέσωμεν $\Sigma_\nu=\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ ἔχωμεν :

1. $2\Sigma_4=\Sigma_2^2$ 2. $\frac{\Sigma_2\Sigma_3}{\Sigma_5}=\frac{6}{5}$ 3. $\frac{\Sigma_5}{\Sigma_4}=\frac{5\Sigma_3}{3\Sigma_2}$ 4. $\frac{5\Sigma_7}{7\Sigma_5}=\frac{\Sigma_4}{\Sigma_2}$.

1155. Δίδεται ἕνα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἕνα ἄλλο κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο αὐτῶν κλασμάτων, ηὐξημένον κατὰ τὸ γινόμενόν των νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα. Ποίαν συνθήκην πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν. Νὰ δοθῇ ἕνα ἀριθμητικὸν παράδειγμα.

1156. 1ον. Νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δύο πολυωνύμων $(x^3+x^2-1)(x^2-x+1)$.

2ον. Κατ' ἀναλογίαν νὰ ἀναλυθῇ τὸ πολυώνυμον x^5+x+1 εἰς γινόμενον δύο παραγόντων.

3ον. Ἔστω x ἕνας ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός· τὸν προσθέτομεν εἰς τὴν πέμπτην δύναμίν του. Νά ἀποδειχθῇ, ὅτι οὔτε ὁ σχηματισθεὶς ἀκέραιος ἀριθμός, οὔτε ὁ προηγούμενος ἀκέραιος ἀριθμός, οὔτε ὁ ἑπόμενος ἀριθμὸς δύνανται νὰ εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί, ἐκτὸς διὰ μίαν καὶ μόνον τιμὴν τοῦ x, τὴν ὁποίαν νὰ ἀναφέρετε.

4ον. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ἀκεραίων ὁ ἀριθμὸς 10 000 000 099.

'Ασκήσεις ἐπὶ τῶν ριζῶν:

1157. (978). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι δύο τυχόντες θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν πάντοτε $\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \sqrt{\alpha\beta}$.

1158. (979). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\sqrt{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

1159. (981). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$2(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})(\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον.

1160. (980). Ἐὰν οἱ α, β, γ, δ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\sqrt[\mu+\nu+\varrho+\sigma]{\alpha\beta\gamma\delta}$ κεῖται μεταξὺ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τῶν παραστάσεων $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\varrho]{\gamma}$, $\sqrt[\sigma]{\delta}$. (Πολυτεχνεῖον).

1161. (986). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐὰν $\alpha^2-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν:

$$1. \quad \sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}$$

$$2. \quad \sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}} - \sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}$$

Κατόπιν αὐτῶν νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες :

1. $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$$

2. $$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=2.$$

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις : (991)

1162. $$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

1163. $$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

1164. $$\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2$$

1165. $$\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

1166. $$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1).$$

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις : (992).

1167. $$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

1168. $$\frac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}$$

1169. $$\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}$$

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες : (993).

1170. $$\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$$

1171. $$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6.$$ (Σχολὴ Ἀεροπορίας)

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις : (994).

1172. $$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$$

1173. $$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}.$$

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις: (995).

1174. $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}$$

1175. $$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}=x.$$

1176. (999). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\sqrt{\alpha+2\sqrt{\alpha-1}}+\sqrt{\alpha-2\sqrt{\alpha-1}}=2, \quad \text{ἐὰν} \quad \alpha<2$$
$$=2\sqrt{\alpha-1}, \quad \text{ἐὰν} \quad \alpha>2.$$

1177. (1000). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις

$$\sqrt{1+\mu+\sqrt{1+2\mu}}+\sqrt{1+\mu-\sqrt{1+2\mu}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+2\mu}, \quad \text{ἐὰν} \quad \mu>0$$
$$=\sqrt{2} \quad \text{ἐὰν} \quad \mu<0.$$

1178. (1001). Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης

$$\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}=\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}.$$

Κατόπιν αὐτοῦ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}.$$

'Εὰν εἶναι $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καί: (1002).

1179. $$\frac{x}{\alpha}=\sqrt{\frac{x^2-xy+2\omega^2}{\alpha^2-\alpha\beta+2\gamma^2}}$$ **1180.** $$\frac{x}{\alpha}=\sqrt[3]{\frac{x^3-y^2\omega}{\alpha^3-\beta^2\gamma}}$$

1181. $$\frac{x}{\alpha}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\beta\gamma}}=\frac{\sqrt[3]{y^2\omega}}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{y^3\omega^3}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{\beta^3\gamma^3}{\alpha}}}$$

1182. $$\sqrt{\alpha x}+\sqrt{\beta y}+\sqrt{\gamma\omega}=\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(x+y+\omega)}$$

1183. $$\sqrt{\alpha^2 x}+\sqrt{\beta^2 y}+\sqrt{\gamma^2\omega}=\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)^2(x+y+\omega)}.$$

1184. (1004). 'Εὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$, ὅπου $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ

$$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha'\beta'}+\sqrt{\alpha''\beta''}=\sqrt{(\alpha+\alpha'+\alpha'')(\beta+\beta'+\beta'')}.$$

Τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει;

1185. (1005). Ὑποθέτομεν, ὅτι $x=\alpha$, $y=\beta$ ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν $y=\sqrt{2x^2+1}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σχέσις αὐτὴ ἐπαληθεύεται καὶ διὰ $x=3\alpha+2\beta$, $y=4\alpha+3\beta$ καὶ διὰ $x=3\alpha-2\beta$, $y=-4\alpha+3\beta$.

1186. (1008). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον

$\varphi(x)=x^3-\alpha^{-\frac{2}{3}}\beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)x+\beta^{\frac{1}{2}}$ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{1}{2}}$.

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πηλίκον τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x-\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{1}{2}}$.

1187. (1009). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πολυώνυμον x^3+3x+2 μηδενίζεται

διὰ $$x=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}.$$

Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες: (1010).

1188. $$\left(\frac{\alpha+(\alpha^2-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\alpha-(\alpha^2-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha+\beta^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

1189. $$2^{\frac{1}{2}}\left[2x+(x^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]\left[x-(x^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=(x+\alpha)^{\frac{3}{2}}-(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}$$

1190. $$\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

1. Ὁρισμοὶ

239. Πρόβλημα. *Τὸ τριπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 12. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;*

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 4· διότι μόνον ὁ τριπλάσιον τοῦ 4 εἶναι ἴσον μὲ 12.

240. Ἐξισώσεις. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἐζητήσαμεν ὰ εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ τριπλάσιον νὰ εἶναι ἴσον μὲ 12.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ x, τὸ ριπλάσιόν του θὰ παρασταθῇ μὲ $x \cdot 3$ ἢ 3x. Ἐπειδὴ δὲ τὸ 3x εἶναι σον μὲ 12, ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3x=12$. (1)

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει μόνον, ὅταν δώσωμεν εἰς τὸ γράμμα ὴν τιμὴν $x=4$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ x ἄλλην τιμὴν ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=4$, ἡ ἰσότης (1) δὲν ἀληθεύει.

Πράγματι, διὰ $x=5$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) δίδει $3 \cdot 5$ ἢ 15, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ δευτέρου μέλους της 12.

Ἐπίσης ἡ ἰσότης $5x=10$ (2)
ἀληθεύει μόνον διὰ $x=2$.

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) λέγονται ἐ ξ ι σ ώ σ ε ι ς.

Γενικῶς : *Κάθε ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα, ποὺ περιέχει, λάβουν καταλλήλους τιμὰς λέγεται* ***ἐ ξ ί σ ω σ ι ς ἢ ἰ σ ό τ η ς ὑ π ὸ ὅ ρ ο υ ς.***

Τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα περιέχει μία ἐξίσωσις καὶ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν τὰς καταλλήλους τιμὰς διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὕτη, λέγονται ἄγνωστοι τῆς ἐξισώσεως.

Τὸ μέρος μιᾶς ἐξισώσεως, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ = λέγεται πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως καὶ τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται δεξιὰ τοῦ = λέγεται δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως.

241. Ταυτότης. Εἰς τὴν § 148 εἴδομεν, ὅτι ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Δηλ. ταυτότης εἶναι μία ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει πάντοτε, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν λάβουν τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ἔχει.

Π. χ. αἱ ἰσότητες $\alpha(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta$ καὶ $x^2-9=(x+3)(x-3)$ εἶναι ταυτότητες.

242. Διάφορα εἴδη ἰσοτήτων. 'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι αἱ ἰσότητες διακρίνονται :

1ον. Εἰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας, δηλ. εἰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι περιέχουν μόνον ἀριθμούς.

Π.χ. $12-7=5$ $9-19=-10$,

2ον. Εἰς ἐγγραμμάτους ἰσότητας, δηλ. εἰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι, ἐκτὸς τῶν ἀριθμῶν, περιέχουν καὶ γράμματα.

Αἱ ἐγγράμματοι ἰσότητες διακρίνονται εἰς ταυτότητας καὶ εἰς ἐξισώσεις.

243. Ταξινόμησις τῶν ἐξισώσεων. *Μία ἐξίσωσις λέγεται ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις, ὅταν δὲν περιέχῃ ἄλλα γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων.*

Μία ἐξίσωσις λέγεται ἐγγράμματος, ὅταν ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων περιέχῃ καὶ ἄλλα γράμματα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν ποσότητας, αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ὡς γνωσταί.

Π. χ. ἡ $3x+5=x+8$ εἶναι μία ἀριθμητικὴ ἐξίσωσις.
ἡ $\alpha x+\beta=\beta x$ » » ἐγγράμματος »

Μία ἐξίσωσις εἶναι ἀκεραία, ὅταν ὁ ἄγνωστός της δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστήν· ἄλλως λέγεται κλασματική.

Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{2x+5}{3}-x=\frac{3x}{5}-7$ εἶναι μία ἀκεραία ἐξίσωσις.

» » $\frac{2x+3}{x-2}+3=\frac{6x}{x+1}$ » » κλασματικὴ »

Μία ἐξίσωσις εἶναι ῥητή, ὅταν ὁ ἄγνωστος δὲν εὑρίσκεται ὑπὸ τὸ ῥιζικόν· ἄλλως λέγεται ἄρρητος ἐξίσωσις.

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3x+5=12$ καὶ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι ρ η τ α ὶ ἐξισώσεις.

Ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{2x+6}=x-1$ εἶναι ἄ ρ ρ η τ ο ς ἐξίσωσις.

Μία ἐξίσωσις λέγεται ἐ ξ ί σ ω σ ι ς μ ὲ ἕ ν α, δ ύ ο, τ ρ ε ῖ ς ἀ γ ν ώ σ τ ο υ ς, ὅταν περιέχῃ ἕνα, δύο, τρία γράμματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων παριστάνει καὶ ἕνα ἄγνωστον.

Μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον παρίσταται συμβολικῶς

$$A(x)=B(x).$$

Ὁμοίως ἡ συμβολικὴ παράστασις

$$A(x, y, \omega, \ldots)=B(x, y, \omega, \ldots)$$

παριστάνει μίαν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει, ὡς ἀγνώστους, τὰ γράμματα $x, y, \omega, \ldots$.

244. Ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως. *Αἱ ἰδιαίτεραι τιμαί, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ λάβουν οἱ ἄγνωστοι μιᾶς ἐξισώσεως, διὰ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται ρ ί ζ α ι ἢ λ ύ σ ε ι ς τ ῆ ς ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ς.*

Π. χ. Ἡ ἐξίσωσις $2x+8=x+13$ ἀληθεύει διὰ $x=5$· ἡ τιμὴ $x=5$ εἶναι ρ ί ζ α τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἢ καὶ λ ύ σ ι ς αὐτῆς.

245. Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις. *Δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰ σ ο δ ύ ν α μ ο ι, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις· δηλ. ὅταν κάθε ρίζα τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπαληθεύει τὴν δευτέραν καὶ κάθε ρίζα τῆς δευτέρας ἐπαληθεύει τὴν πρώτην.*

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3x+5=26$ καὶ $x+4=2x-3$ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν λύσιν $x=7$.

246. Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως. *Ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν ἢ τῶν λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως λέγεται λ ύ σ ι ς τ ῆ ς ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ς.*

Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν, μετασχηματίζομεν αὐτὴν διαδοχικῶς εἰς ἄλλας ἐξισώσεις ἰ σ ο δ υ ν ά μ ο υ ς μέχρις, ὅτου λάβωμεν μίαν τελικὴν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας αἱ ζητούμεναι ρίζαι εἶναι προφανεῖς, ὅπως $x=5$, $x=\alpha+\beta$.

Ὁ μετασχηματισμὸς μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν στηρίζεται ἐπὶ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων τῶν ἐξισώσεων.

2. Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων

247. Ἰδιότης I. ***Ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως τὴν αὐτὴν ποσότητα, λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x+5=4x-1$ (1)

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν αὐτὴν ποσότητα $3x-2$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(2x+5)+(3x-2)=(4x-1)+(3x-2) \quad (2)$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: Ἡ ἐξίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ $x=3$. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του 3 λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$2\cdot3+5=4\cdot3-1 \quad ἤ \quad 11=11.$$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν ἀριθμὸν $3\cdot3-2=7$ (δηλ. τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ $3x-2$ διὰ $x=3$) λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$(2\cdot3+5)+(3\cdot3-2)=(4\cdot3-1)+(3\cdot3-2) \quad ἤ \quad 11+7=11+7$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸ x διὰ τοῦ 3.

Ὥστε ἡ λύσις $x=3$ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).

Ἀντιστρόφως. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἀπόδειξις: Ἡ ἐξίσωσις (2) ἀληθεύει διὰ $x=3$. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του 3 λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$(2\cdot3+5)+(3\cdot3-2)=(4\cdot3-1)+(3\cdot3-2) \quad ἤ \quad 11+7=11+7.$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν ἀριθμὸν $3\cdot3-2$, λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$2\cdot3+5=4\cdot3-1 \quad ἤ \quad 11=11.$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἀριθμητικὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸ x διὰ τοῦ 3.

Ὥστε ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως (1). Ἑπομένως κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἰσοδυνάμων ἐξισώσεων, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Γενικῶς: Ἔστω μία ἐξίσωσις

$$A(x,y,\omega,\ldots)=B(x,y,\omega,\ldots) \quad (1)$$

ἡ ὁποία περιέχει τοὺς ἀγνώστους $x,y,\omega,\ldots$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν $\varphi(x,y,\omega,\ldots)$, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$A(x,y,\omega,\ldots)+\varphi(x,y,\omega,\ldots)=B(x,y,\omega,\ldots)+\varphi(x,y,\omega,\ldots) \quad (2)$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πράγματι· ἔστω $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$ μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τοὺς ἀγνώστους $x,y,\omega,\ldots$ μὲ τὰς τιμάς των $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ θὰ λάβωμεν μίαν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$A(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=B(\alpha,\beta,\gamma,\ldots).$$

Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$, θὰ λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$A(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=B(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots).$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἀριθμητικὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν, λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τοὺς ἀγνώστους $x,y,\omega,\ldots$ μὲ τὰς τιμάς των $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ ἀντιστοίχως.

Ὥστε ἡ λύσις $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).

Ἀντιστρόφως Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἔστω $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$ μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τοὺς ἀγνώστους $x,y,\omega,\ldots$ μὲ τὰς τιμάς των $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ θὰ λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$A(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=B(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)+\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots).$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$, θὰ προκύψῃ ἡ ἀριθμητικὴ ἰσότης

$$A(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=B(\alpha,\beta,\gamma,\ldots).$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἀριθμητικὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ

$$x=\alpha,\quad y=\beta,\quad \omega=\gamma,\ldots$$

Ὥστε ἡ λύσις $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$ τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$, διότι ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη της τὴν παράστασιν $-\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$.

Παρατήρησις : Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις προϋποθέτει, ὅτι ἡ παράστασις $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ ἔχει μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ $x=\alpha$, $y=\beta$, $\omega=\gamma,\ldots$ ἄλλως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι.

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $x=5$ καὶ $x+\sqrt{4-x}=5+\sqrt{4-x}$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι διὰ $x=5$ ἡ παράστασις $\sqrt{4-x}$ γίνεται $\sqrt{-1}$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἀριθμητικὴν τιμήν.

248. Πόρισμα Ι. **Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x-5=2x+10$. Ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη της τὸν ἀριθμὸν 5, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν**

$$3x-5+5=2x+10+5 \quad ἢ \quad 3x=2x+10+5.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος -5 μετεφέρθη ἀπὸ τὸ πρῶτον μέλος

τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἰς τὸ δεύτερον μέλος της μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖον του. Ὥστε :

Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους μιᾶς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο μέλος της, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον του.

249. Πόρισμα II. ***Κάθε ἐξίσωσις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν*** $A(x,y,\omega,\ldots)=0$.

Διότι ἀρκεῖ νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους της εἰς τὸ πρῶτον, ὁπότε τὸ δεύτερον μέλος γίνεται μηδέν.

Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $5x-6=2x+10$ δύναται νὰ γραφῇ

$$5x-6-2x-10=0 \quad \text{ἢ} \quad 3x-16=0.$$

250. Ἰδιότης II. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ ἐὰν διαιρέσωμεν) καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως, ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν (ἡ ὁποία εἶναι πάντοτε ὡρισμένη καὶ διάφορος τοῦ μηδενὸς) λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον μὲ τὴν δοθεῖσαν.***

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3x+4=2x+6$ καὶ $(3x+4)\cdot 10=(2x+6)\cdot 10$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως εἰς τὴν § 247.

Γενικῶς : *Ὑπόθεσις* : Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A(x)=B(x)$ * (1)

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μ, ἡ ὁποία ἔχει μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἡ ὁποία δὲν περιέχει ἀγνώστους, θὰ προκύψῃ ἡ ἐξίσωσις

$$\mu \cdot A(x) = \mu \cdot B(x) \qquad (2)$$

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις : Ἔστω $x=\alpha$ μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (1). Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (1) τὸ x διὰ τοῦ α, θὰ λάβωμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$A(\alpha) = B(\alpha).$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ, θὰ προκύψῃ ἡ ἰσότης

$$\mu \cdot A(\alpha) = \mu \cdot B(\alpha).$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (2), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν τιμήν του α.

Ὥστε : *ἡ λύσις $x=\alpha$ τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).*

Ἀντιστρόφως : Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἔστω $x=\alpha$ μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2).

---

* Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει ἕνα ἄγνωστον· ἡ ἀπόδειξις ὅμως ἰσχύει καὶ δι' ἐξισώσεις μὲ περισσοτέρους ἀγνώστους.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του α λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικήν ἰσότητα

$$\mu \cdot A(\alpha) = \mu \cdot B(\alpha).$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀριθμητικῆς αὐτῆς ἰσότητος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ μ, λαμβάνομεν τὴν ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$$A(\alpha) = B(\alpha).$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης παριστάνει τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1), ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν τιμήν του α.

Ὥστε: ἡ λύσις $x=\alpha$ τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι καὶ λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Μὲ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ μ, διότι ἡ διαίρεσις διὰ μ, ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ $\frac{1}{\mu}$.

251. Πόρισμα Ι. *Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως.*

Διότι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ -1.

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $2x-8=x+5$ καὶ $-2x+8=-x-5$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

252. Πόρισμα ΙΙ. *Δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμητικοὺς παρονομαστὰς τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Π. χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{3x}{2}+5=\frac{4x}{5}-\frac{7}{3}$.

Τρέπομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως εἰς ὁμώνυμα κλάσματα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἑ.κ.π. 30 τῶν παρονομαστῶν των καὶ ἔχομεν:

$$\frac{45x}{30}+\frac{150}{30}=\frac{24x}{30}-\frac{70}{30}.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἐπὶ 30 καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $45x+150=24x-70$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει παρονομαστάς.

Εἰς τὴν πρᾶξιν, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, χωρὶς προηγουμένως νὰ τρέψωμεν ὅλους τοὺς ὅρους της εἰς ὁμώνυμα κλάσματα.

Π. χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 30 τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων της καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{2}\cdot 30+5\cdot 30=\frac{4x}{5}\cdot 30-\frac{7}{3}\cdot 30$$

ἢ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν

$$3x\cdot 15+5\cdot 30=4x\cdot 6-7\cdot 10 \quad ἢ \quad 45x+150=24x-70.$$

Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς μιᾶς ἀκεραίας ἐγγραμμάτου ἐξισώσεως, πρέπει νὰ θεωροῦμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάζωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ αὐτό.

Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{x+\beta}{\beta}=1$.

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της εἶναι $\alpha\beta$. Ἐὰν $\alpha\beta\neq 0$, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἐπὶ $\alpha\beta$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x+\alpha}{\alpha}\cdot\alpha\beta-\frac{x+\beta}{\beta}\cdot\alpha\beta=1\cdot\alpha\beta \quad ἢ \quad (x+\alpha)\beta-(x+\beta)\alpha=\alpha\beta,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ δὲν ἔχει παρονομαστάς.

253. Ιδιότης III. ***1ον. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν, ἡ ὁποία περιέχει ἀγνώστους, εἰσάγομεν γενικῶς ξένας λύσεις.***

2ον. Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἡ ὁποία περιέχει ἀγνώστους, παραλείπομεν, γενικῶς, λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

1ον *Ὑπόθεσις* : Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x=20$ (1), ἡ ὁποία ἔχει τὴν λύσιν $x=4$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ $x+3$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\quad 5x(x+3)=20(x+3) \quad$ (2)

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει τὴν λύσιν $x=4$ καὶ ἄλλην.

Ἀπόδειξις : Ἡ ἐξίσωσις (2) δύναται νὰ γραφῇ

$$5x(x+3)-20(x+3)=0 \quad ἢ \quad (x+3)(5x-20)=0.$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $(x+3)$ καὶ $(5x-20)$ ἴσον μὲ μηδὲν πρέπει νὰ εἶναι

εἴτε $x+3=0$ (3) εἴτε $5x-20=0$ (4)

Ἀπὸ τὴν (3) εὑρίσκομεν $x=-3$ καὶ ἀπὸ τὴν (4) $x=4$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει τὰς λύσεις $x=4$ καὶ $x=-3$, δηλ. ἔχει, ἐκτὸς τῆς λύσεως $x=4$, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ ἡ ἐξίσωσις (1), καὶ τὴν λύσιν $x=-3$, ἡ ὁποία εἶναι ξένη πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (1).

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x(x+3)=20(x+3)$, ἡ ὁποία ἔχει τὰς λύσεις $x=4$ καὶ $x=-3$.

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος $x+3$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $5x=20$, ἡ ὁποία ἔχει μόνον τὴν λύσιν $x=4$.

Γενικῶς: ***1ον.*** *Ὑπόθεσις:* Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$A=B \qquad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὴν ποσότητα Μ, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A \cdot M=B \cdot M \qquad (2)$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι γενικῶς ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: Ἡ ἐξίσωσις (2) δύναται νὰ γραφῇ

$$A \cdot M-B \cdot M=0 \quad ἢ \quad M(A-B)=0.$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων Μ καὶ Α—Β ἴσον μὲ μηδὲν πρέπει ὁ ἕνας, τουλάχιστον, ἀπὸ τοὺς παράγοντάς του νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$εἴτε \quad M=0 \qquad εἴτε \quad A-B=0.$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $A-B=0$ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1)· ἀλλὰ αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $M=0$ δύνανται νὰ μὴ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (2) περιέχει ξένας ρίζας.

Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (1) καὶ (2) δὲν εἶναι γενικῶς ἰσοδύναμοι.

2ον. *Ὑπόθεσις:* Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$A \cdot M=B \cdot M \qquad (3)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος Μ, ὁ ὁποῖος περιέχει ἀγνώστους, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A=B \qquad (4)$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4) δὲν εἶναι, γενικῶς, ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: Ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται

$$A \cdot M-B \cdot M=0 \quad ἢ \quad M(A-B)=0$$

καὶ ἑπομένως ἔχει τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων

$$M=0 \quad καὶ \quad A-B=0$$

ἐνῷ ἡ ἐξίσωσις (4) ἔχει μόνον τὰς λύσεις, τὰς ὁποίας ἔχει ἡ ἐξίσωσις

$$A-B=0.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) διὰ Μ, παραλείπομεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $M=0$.

254 Σπουδαία παρατήρησις. Ὅταν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀγνώστους, δὲν πρέπει ποτὲ νὰ ἁπλοποιοῦμεν τὴν ἐξίσωσιν, διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ τοῦ κοινοῦ παράγοντος, διότι παραλείπομεν λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἀλλὰ πρέπει νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς

ἐξισώσεως εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ νὰ θέτωμεν τὸν κοινὸν αὐτὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως. Ἐξισώνομεν ἔπειτα κάθε παράγοντα μὲ τὸ μηδὲν καὶ εὑρίσκομεν τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων, ποὺ θὰ προκύψουν, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Π. χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $(x+6)(x-4)=3x(x-4)$. Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἔχουν τὸν κοινὸν παράγοντα $(x-4)$.

Μεταφέρομεν τὸ $3x(x-4)$ εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς $(x+6)(x-4)-3x(x-4)=0$ ἢ $(x-4)[(x+6)-3x]=0$ ἢ $(x-4)(6-2x)=0$.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων $(x-4)$ καὶ $(6-2x)$ ἴσον μὲ μηδέν, πρέπει νὰ εἶναι εἴτε $x-4=0$, εἴτε $6-2x=0$.

Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι $x=4$ καὶ $x=3$, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐὰν εἴχομεν διαιρέσει καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ $(x-4)$, θὰ ἐξηφανίζαμεν τὴν λύσιν $x=4$.

Ἐπίσης, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ μίαν παράστασιν, ἡ ὁποία περιέχει ἀγνώστους, πρέπει ὄχι μόνον νὰ ἀποκλείωμεν τὰς ξένας λύσεις, ἀλλὰ καὶ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι δίδουν ὡς λύσεις τὸ ἄπειρον.

255. Βαθμὸς μιᾶς ἐξισώσεως. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸν βαθμὸν μιᾶς ἀκεραίας καὶ ρητῆς ἐξισώσεως, μεταφέρομεν ὅλους τοὺς ὅρους της εἰς τὸ πρῶτον μέλος, κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν $A=0$, ὅπου A εἶναι ἕνα πολυώνυμον ἀκέραιον, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως.

Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου A εἶναι ἐπίσης καὶ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $5x-35=0$ εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ.
ἡ ἐξίσωσις $2x^2-5x-10=0$ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.
ἡ ἐξίσωσις $4x^2y^2-3xy+1=0$ εἶναι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους x καὶ y.

3. Λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

256. Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Στηριζόμενοι εἰς τὰς προηγουμένας ἰδιότητας τῶν ἐξισώσεων, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4+\frac{2x-5}{3}=\frac{x+11}{9}$.

Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς· πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 9 τῶν παρονομαστῶν της καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $4\cdot 9+3(2x-5)=x+11$.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $36+6x-15=x+11$.

Μεταφέρομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους 36 καὶ —15 εἰς τὸ δεύτερον μέλος μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα των καὶ τὸν ἄγνωστον ὅρον x εἰς τὸ πρῶτον μέλος μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν του καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $6x-x=-36+15+11$.

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν $5x=-10$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ 5 τοῦ ἀγνώστου καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$x=-\frac{10}{5}.$$

Ἡ τιμὴ $x=-2$ εἶναι ρίζα, δηλ. λύσις, τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐπαλήθευσις. Ἐξετάζομεν τώρα, ἐὰν ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x=-2$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Πρὸς τοῦτο ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του· ἂν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως αὐτῆς δώσῃ καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, τότε ἡ ἐξεταζομένη αὐτὴ τιμὴ τοῦ x εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἄλλως κάποιο σφάλμα ἔγινε κατὰ τὴν πορείαν τῶν πράξεων καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπαναλάβωμεν μετὰ προσοχῆς καὶ ἐξ ἀρχῆς τὴν πορείαν τῶν πράξεων.

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν διὰ $x=-2$ ἔχομεν :

$$1\text{ον μέλος}=4+\frac{2\cdot(-2)-5}{3}=4+\frac{-9}{3}=4-3=1.$$

$$2\text{ον μέλος}=\frac{-2+11}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $x=-2$ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 1· ἄρα ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ $x=-2$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

257. Κανών. Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

1ον. Ἐξαλείφομεν τοὺς παρανομαστάς, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

2ον. Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, ἐὰν σημειοῦνται τοιαῦται.

3ον. Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους ὅρους, μεταφέροντες τοὺς ἀγνώστους ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς ὅρους εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἢ καὶ τἀνάπαλιν.

4ον. Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

5ον. Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, (ἐὰν οὗτος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός).

258. Ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5(x-2)-2(3-x)=3x-4$,

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $5x-10-6+2x=3x-4$.

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν

$$5x+2x-3x=10+6-4.$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν $4x=12$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ 4 καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{12}{4}=3.$$

Ὥστε ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x=3$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $x=3$ ἔχομεν :

1ον μέλος$=5(3-2)-2(3-3)=5\cdot 1-2\cdot 0=5$

2ον μέλος$=3\cdot 3-4=9-4=5$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}=\frac{x+14}{2}-2$.

Ἐξαλείφομεν παρονομαστάς· πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. 12 τῶν παρονομαστῶν της καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$4(5x-2)-3(x-8)=6(x+14)-2\cdot 12.$$

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $20x-8-3x+24=6x+84-24$.

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν

$$20x-3x-6x=8-24+84-24.$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν $11x=44$.

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ 11 καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{44}{11}=4.$$

Ὥστε ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $x=4$.

Ἐπαλήθευσις. Διὰ $x=4$ ἔχομεν

1ον μέλος $=\frac{5\cdot 4-2}{3}-\frac{4-8}{4}=\frac{18}{3}-\frac{-4}{4}=6+1=7$

2ον μέλος $=\frac{4+14}{2}-2=\frac{18}{2}-2=9-2=7$.

Ἀσκήσεις: *1191, 1193, 1195, 1200, 1202, 1203, 1206, 1208, 1209, 1211, 1213, 1215, 1216.*

4. Λύσις καὶ διερεύνησις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ

259. Γενικὴ μορφὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Μία ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον x, δύναται νὰ ἀναχθῇ, διὰ μιᾶς σειρᾶς μετασχηματισμῶν, στηριζομένων εἰς τὸν κανόνα τῆς § 257, εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν $\boxed{\alpha x+\beta=0}$

ὅπου α καὶ β δύνανται νὰ εἶναι τυχοῦσαι ποσότητες, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, ἀλλὰ πάντως ἀνεξάρτητα τοῦ ἀγνώστου x.

260. Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha x+\beta=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha x=-\beta \qquad (1)$$

σημαίνει, ὅτι θὰ ἐξετάσωμεν:

1ον. Διὰ ποίας ἰδιαιτέρας τιμὰς τῶν γραμμάτων της α καὶ β, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

2ον. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν γραμμάτων της εἶναι ἀδύνατος ἢ ἀόριστος

Κατὰ τὴν διερεύνησιν τῆς ἐξισώσεως (1) δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν αἱ κάτωθι τρεῖς περιπτώσεις:

I Περίπτωσις. $\alpha\neq0$. Ὅταν τὸ α εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ α καὶ νὰ λάβωμεν τὴν μοναδικὴν λύσιν $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

II Περίπτωσις. $\alpha=0$. Ὅταν τὸ α εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ α.

Ἐδῶ δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν δύο περιπτώσεις, διότι, ὅταν τὸ α εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, τὸ β δύναται νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἢ καὶ ἴσον μὲ μηδέν.

1ον. $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq0$. Ὅταν τὸ α εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν καὶ τὸ β διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $0\cdot x=-\beta$.

Διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x, τὸ γινόμενον $0\cdot x$ εἶναι πάντοτε ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ὄχι ἴσον μὲ $-\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει λύσιν· εἶναι ἀδύνατος.

2ον. $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$. Ὅταν τὸ α καὶ τὸ β εἶναι ἴσα μὲ μηδέν, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $0\cdot x=0$ ἢ $0=0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x καὶ λέγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος, ἢ ὅτι ὑπάρχει ἀοριστία εἰς τὴν ἐξίσωσιν.

Πίναξ διερευνήσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$

I.	**Ἐὰν $\alpha\neq0$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$**
II.	**Ἐὰν $\alpha=0$, $\beta\neq0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος**
III.	**Ἐὰν $\alpha=0$, $\beta=0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος**

261. Παράδειγμα ἐξισώσεως ἀδυνάτου.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις : $\frac{x-4}{2}=\frac{7x}{2}-3x-5.$

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 257 ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$x-4=7x-6x-10 \quad \text{ἢ} \quad x-7x+6x=4-10 \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x=-6.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον κάθε ἀριθμοῦ x ἐπὶ μηδὲν εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ὄχι μὲ −6, συνάγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

262. Παράδειγμα ἀορίστου ἐξισώσεως.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις : $\frac{8x}{3}+4=\frac{5x+12}{3}+x.$

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 257 ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$8x+12=5x+12+3x \quad \text{ἢ} \quad 8x-5x-3x=12-12 \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x=0$$

Ἐπειδὴ κάθε ἀριθμὸς x, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδὲν δίδει γινόμενον μηδέν, ἕπεται, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ὡς λύσιν ἕνα τυχόντα ἀριθμόν· δηλ. ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι μία ταυτότης καὶ ἐπομένως ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος.

Ἀσκήσεις : 1228, 1230, 1232, 1233, 1236 1237.

263. Παραμετρικαὶ ἐξισώσεις. *Παραμετρικαὶ ἐξισώσεις λέγονται αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν, ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων, καὶ γράμματα, τὰ ὁποῖα λέγονται παράμετροι, καὶ τῶν ὁποίων γραμμάτων ἡ τιμὴ θεωρεῖται γνωστή.*

Αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις λύονται ὅπως αἱ ἀριθμητικαὶ ἐξισώσεις. Πρέπει ὅμως νὰ διερευνῶμεν τὰς τοιαύτας ἐξισώσεις, δηλ. νὰ ἐξετάζωμεν διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν λύσιν ἢ εἶναι ἀδύνατος ἢ εἶναι ἀόριστος.

Ἐπίσης πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει, ὅτι, ἐὰν ἡ παράμετρος ἢ αἱ παράμετροι εὑρίσκωνται ὡς παρονομασταί, δὲν πρέπει νὰ δίδωμεν εἰς αὐτὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τοὺς παρονομαστάς, διότι, διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τὰ κλάσματα καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχουν ἔννοιαν (§ 77).

264. Παράδειγμα 1ον. *Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\mu x+\frac{9x-\mu}{3}=4x+2.$$

Ἐξαλείφομεν παρανομαστὰς κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$3\mu x+9x-\mu=12x+6 \quad \text{ἢ} \quad 3\mu x+9x-12x=\mu+6 \quad \text{ἢ} \quad (3\mu-3)x=\mu+6 \quad (1).$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν μορφὴν $\alpha x=\beta$, ὅπου $\alpha=3\mu-3$ καὶ $\beta=\mu+6$.

I. Ἐὰν $3\mu-3\neq0$, δηλ. ἐὰν $3\mu\neq3$, ἢ $\mu\neq1$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{\mu+6}{3\mu-3}. \qquad (2)$$

II. Ἐὰν $3\mu-3=0$, δηλ. ἐὰν $\mu=1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0x=7$ καὶ εἶναι ἀδύνατος διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν (2), ἐὰν $\mu\neq1$ καὶ δὲν ἔχει λύσιν διὰ $\mu=1$.

265 Παράδειγμα 2ον. *Διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου α, ἡ ἐξίσωσις* $\alpha^2x+1=x+\alpha$.

1ον. Ἔχει μίαν μόνον λύσιν; 2ον. Εἶναι ἀδύνατος; 3ον. Εἶναι ἀόριστος;

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha^2x-x=\alpha-1 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha^2-1)x=\alpha-1 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha+1)(\alpha-1)x=\alpha-1 \qquad (1)$$

I. Ἐὰν $(\alpha+1)(\alpha-1)\neq0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq-1$ καὶ $\alpha\neq1$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{\alpha-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{1}{\alpha+1} \qquad (2)$$

II. Ἔστω τώρα, ὅτι $(\alpha+1)(\alpha-1)=0$, δηλ. ὅτι $\alpha=-1$, εἴτε $\alpha=1$.

Ἐξετάζομεν χωριστὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς περιπτώσεις $\alpha=-1$ καὶ $\alpha=1$.

1ον. Ἐὰν $\alpha=-1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0x=-2$ καὶ ἑπομένως εἶναι ἀδύνατος.

2ον. Ἐὰν $\alpha=1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=0$ καὶ ἑπομένως εἶναι ἀόριστος.

Ὥστε: ἐὰν $\alpha\neq-1$ καὶ $\alpha\neq1$ ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν (2)
ἐὰν $\alpha=-1$ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος
ἐὰν $\alpha=1$ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀόριστος.

266. Παράδειγμα 3ον *Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\alpha x-\beta^2+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta x.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha x-\beta x=\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha-\beta)x=(\alpha-\beta)^2 \qquad (1).$$

1ον. Ἐὰν $\alpha-\beta\neq0$, δηλ. $\alpha\neq\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha-\beta}=\alpha-\beta.$$

2ον. Ἐὰν $\alpha-\beta=0$, δηλ. $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=0$ καὶ εἶναι ἀόριστος.

267. Παράδειγμα 4ον. *Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\alpha^2x+4=\alpha(x+2)+\beta.$$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha^2x+4=\alpha x+2\alpha+\beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha^2x-\alpha x=2\alpha+\beta-4 \quad \text{ἢ} \quad \alpha(\alpha-1)x=2\alpha+\beta-4 \qquad (1).$$

I. Ἐὰν $\alpha(\alpha-1)\neq0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\neq0$ καὶ $\alpha\neq1$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{2\alpha+\beta-4}{\alpha(\alpha-1)}.$$

II. Ἔστω τώρα, ὅτι $\alpha(\alpha-1)=0$, δηλ. ὅτι $\alpha=0$, εἴτε $\alpha=1$. Ἐξετάζομεν χωριστὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς περιπτώσεις $\alpha=0$ καὶ $\alpha=1$.

1ον. Ἐὰν $\alpha=0$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=\beta-4$.

Ἐὰν τώρα εἶναι καὶ $\beta-4=0$, δηλ. $\beta=4$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=0$ καὶ ἑπομένως εἶναι ἀόριστος.

Ἐὰν εἶναι $\beta-4\neq 0$, δηλ $\beta\neq 4$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=\beta-4$ καὶ εἶναι ἀδύνατος.

2ον. Ἐὰν $\alpha-1=0$, δηλ. ἐὰν $\alpha=1$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$0\cdot x=2\cdot 1+\beta-4 \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x=\beta-2.$$

Ἐὰν τώρα εἶναι καὶ $\beta-2=0$, δηλ. $\beta=2$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=0$ καὶ εἶναι ἀόριστος.

Ἐὰν εἶναι $\beta-2\neq 0$, δηλ. $\beta\neq 2$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0\cdot x=\beta-2$ καὶ εἶναι ἀδύνατος.

Κατωτέρω συνοψίζομεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς διερευνήσεως.

I. Ἐὰν $\alpha(\alpha-1)\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν λύσιν $x=\dfrac{2\alpha+\beta-4}{\alpha(\alpha-1)}$.

II. Ἐὰν $\alpha=0$ { $\beta=4$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος
$\beta\neq 4$ » » ἀδύνατος.

III Ἐὰν $\alpha=1$ { $\beta=2$ » » ἀόριστος
$\beta\neq 2$ » » ἀδύνατος.

Ἀσκήσεις: *1238, 1240, 1242, 1244, 1246, 1248, 1250, 1253, 1255, 1258, 1259, 1261, 1263, 1266, 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1274, 1278 1279, 1281, 1283, 1285, 1287, 1289.*

5. Ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου, ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ

268. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $A\cdot B\cdot \Gamma=0$. Γνωρίζομεν, ὅτι διὰ νὰ εἶναι ἕνα γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἴσον μὲ τὸ μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων του νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδὲν (§ 57).

Συνεπῶς: αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $A\cdot B\cdot \Gamma=0$ εἶναι αἱ ῥίζαι τῶν ἐξισώσεων: $A=0,\quad B=0,\quad \Gamma=0.$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(2x-1)(x+4)(x-8)=0$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀναλύεται εἰς τὰς τρεῖς ἐξισώσεις

$$2x-1=0,\quad x+4=0,\quad x-8=0.$$

Αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν

$$x=\frac{1}{2},\quad x=-4,\quad x=8.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3-4x=0$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $x(x^2-4)=0$ ἢ $x(x+2)(x-2)=0$.

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἀναλύεται εἰς τὰς ἐξισώσεις

$$x=0,\quad x+2=0,\quad x-2=0.$$

Αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $x=0$, $x=-2$, $x=2$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(5x-1)^2-(3x+2)^2=0$ (1)

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^2-\beta^2$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ τὸ γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$[(5x-1)+(3x+2)]\cdot[(5x-1)-(3x+2)]=0$$

ἢ $(5x-1+3x+2)(5x-1-3x-2)=0$ ἢ $(8x+1)(2x-3)=0$ (2)

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ (2) πρέπει νὰ εἶναι εἴτε $8x+1=0$ (3) εἴτε $2x-3=0$ (4)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν $x=-\frac{1}{8}\cdot$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν $x=\frac{3}{2}\cdot$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2), ἄρα καὶ τῆς ἰσοδυνάμου (1), εἶναι

$$x=-\frac{1}{8} \quad \text{καὶ} \quad x=\frac{3}{2}\cdot$$

Ἀσκήσεις: 1290, 1292, 1294, 1297, 1299, 1300.

269. Λύσις κλασματικῶν ἐξισώσεων. Αἱ κλασματικαὶ ἐξισώσεις λύονται, ὅπως καὶ αἱ ἀκέραιαι ἐξισώσεις· δὲν πρέπει ὅμως νὰ παραδεχώμεθα ὡς λύσιν μίαν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου x, ἡ ὁποία θὰ ἐμηδένιζε ἕνα παρονομαστήν.

Παράδειγμα 1ον Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{2x-3}{x-4}=\frac{3}{x-4}+\frac{2x+1}{x-1}\cdot$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $(x-4)(x-1)$, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν διάφορον τοῦ μηδενός· δηλ. ὑποθέτομεν, ὅτι

$$(x-4)(x-1)\neq 0, \text{ ἢ ὅτι } x\neq 4 \text{ καὶ } x\neq 1.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ $(x-4)(x-1)$ καὶ ἔχομεν $(2x-3)(x-1)=3(x-1)+(2x+1)(x-4)$.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν

$$2x^2-3x-2x+3=3x-3+2x^2+x-8x-4.$$

Χωρίζομεν τοὺς ἀγνώστους ὅρους ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς καὶ ἔχομεν

$$2x^2-3x-2x-3x-2x^2-x+8x=-3-3-4.$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ ἔχομεν

$$-x=-10 \quad \text{ἢ} \quad x=10$$

Ἡ τιμὴ $x=10$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, διότι δὲν μηδενίζει κανένα παρονομαστήν της.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{3}{x+2}-\frac{6x}{x^2-4}=\frac{3}{x-2}\cdot$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(x+2)(x-2)$, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν διάφορον τοῦ μηδενός· δηλ. ὑποθέτομεν, ὅτι

$$(x+2)(x-2)\neq 0, \text{ ἢ ὅτι } x\neq -2 \text{ καὶ } x\neq 2.$$

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κτλ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$3(x-2)-6x=3(x+2) \text{ ἢ } 3x-6-6x=3x+6 \text{ ἢ } 3x-6x-3x=6+6$$

$$\text{ἢ } -6x=12 \text{ ἢ } 6x=-12, \text{ ἄρα } x=-2.$$

Ἡ τιμὴ $x=-2$ εἶναι ἀπαράδεκτος, διότι μηδενίζει δύο παρονομαστάς· ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x+3}{x-3}-\frac{1}{x}=\frac{3}{x(x-3)}\cdot$

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ἔννοιαν, ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν ὅρων της

εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $x \neq 0$ καὶ $x-3 \neq 0$ ἢ $x \neq 3$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνθήκη αὐτὴ πληροῦται, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, δηλ. ἐπὶ $x(x-3)$ καὶ ἔχομεν

$$x(x+3)-(x-3)=3 \quad \text{ἢ} \quad x^2+3x-x+3=3 \quad \text{ἢ} \quad x^2+3x-x+3-3=0$$
$$\text{ἢ} \quad x^2+2x=0 \quad \text{ἢ} \quad x(x+2)=0.$$

Αἱ ῥίζαι τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι $x=0$ καὶ $x=-2$.

Ἡ τιμὴ $x=0$ ἀπεκλείσθη. Μόνον ἡ τιμὴ $x=-2$ εἶναι ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀσκήσεις: *1302, 1304, 1306, 1312, 1314, 1316, 1319, 1323, 1325, 1334, 1336, 1340, 1342, 1346, 1343, 1350, 1354, 1355, 1361.*

6. Ἄρρητοι ἐξισώσεις

270 Ἄρρητοι ἐξισώσεις. *Κάθε ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους ὑπὸ ἕνα ἢ περισσότερα ῥιζικὰ λέγεται ἄ ρ ρ η τ ο ς ἐ ξ ί σ ω σ ι ς.*

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $\sqrt{x+5}=x-1$, $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$ εἶναι ἄρρητοι ἐξισώσεις.

Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἄρρητον ἐξίσωσιν προσπαθοῦμεν νὰ ἐξαλείψωμεν τὰ ῥιζικά, ὑψώνοντες καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον, ἢ εἰς μίαν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ὁ δείκτης τοῦ ῥιζικοῦ.

Πρέπει ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸ κάτωθι θεώρημα :

271. Θεώρημα. *Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ὅλας τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἀλλὰ δὲν εἶναι γενικῶς ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν.*

Ὑπόθεσις : Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (1). Ἐὰν ὑψώσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $A^2=B^2$ (2).

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (1), ἀλλὰ ἔχει καὶ ξένας ῥίζας πρὸς αὐτάς.

Ἀπόδειξις : Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$A^2-B^2=0 \quad \text{ἢ} \quad (A-B)(A+B)=0.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν συνάγομεν, ὅτι θὰ εἶναι

$$\text{εἴτε} \quad A-B=0 \quad (3), \quad \text{εἴτε} \quad A+B=0 \quad (4).$$

Ἀπὸ τὴν (3) λαμβάνομεν $A=B$, ἤτοι εὑρίσκομεν τὴν ἀρχικὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἀπὸ τὴν (4) λαμβάνομεν $A=-B$, ἤτοι εὑρίσκομεν μίαν

ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι ξ έ ν α ι πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

Ὥστε αἱ ἐξισώσεις $A=B$ καὶ $A^2=B^2$ δὲν εἶναι γενικῶς ἰσοδύναμοι.

272. Ἄρρητοι ἐξισώσεις μὲ ἕνα ριζικόν. ***Παράδειγμα 1ον.*** *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $2x+\sqrt{x^2+9}=x+9$.

Λύσις : Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\sqrt{x^2+9}=-2x+x+9 \quad ἤ \quad \sqrt{x^2+9}=9-x \qquad (1)$$

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη της (1) καὶ ἔχομεν

$$(\sqrt{x^2+9})^2=(9-x)^2 \quad ἤ \quad x^2+9=81-18x+x^2 \quad ἤ \quad x^2+9-81+18x-x^2=0$$
$$ἤ \quad 18x-72=0 \quad ἤ \quad 18x=72, \quad ἄρα \quad x=4.$$

Ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x=4$.

Ἐπαλήθευσις : Ἐξετάζομεν, ἐὰν ἡ τιμὴ $x=4$ εἶναι ρίζα τῆς δ ο θ ε ί σ η ς ἐξισώσεως. Διὰ $x=4$ ἔχομεν :

1ον μέλος$=2\cdot 4+\sqrt{4^2+9}=8+\sqrt{25}=8+5=13$.

2ον μέλος$=4+9=13$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ τιμὴ $x=4$ δίδει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν εἰς τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἄρα ἡ τιμὴ $x=4$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $2-\sqrt{3x+4}=2x$.

Λύσις : Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ ἔχομεν

$$2-2x=\sqrt{3x+4} \qquad (1)$$

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$(2-2x)^2=(\sqrt{3x+4})^2 \quad ἤ \quad 4-8x+4x^2=3x+4 \quad ἤ \quad 4x^2-11x=0$$
$$ἤ \quad x(4x-11)=0 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν προκύπτει, ὅτι εἶναι

$$εἴτε \quad x=0, \quad εἴτε \quad 4x-11=0 \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν (3) εὑρίσκομεν $x=\frac{11}{4}$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι $x=0$ καὶ $x=\frac{11}{4}$.

Ἐπαλήθευσις : Ἐξετάζομεν τώρα, ἐὰν αἱ τιμαὶ $x=0$ καὶ $x=\frac{11}{4}$ εἶναι ρίζαι τῆς δ ο θ ε ί σ η ς ἐξισώσεως.

Διὰ $x=0$ ἔχομεν

1ον μέλος$=2-\sqrt{4}=2-2=0$.

2ον μέλος$=2\cdot 0=0$.

Ἡ τιμὴ $x=0$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, διότι δίδει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη της.

Διὰ $x=\frac{11}{4}$ ἔχομεν

$$1\text{ον μέλος}=2-\sqrt{3\cdot\frac{11}{4}+4}=2-\sqrt{\frac{49}{4}}=2-\frac{7}{2}=-\frac{3}{2}.$$

$$2\text{ον μέλος}=2\cdot\frac{11}{4}=\frac{11}{2}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ τιμὴ $x=\frac{11}{4}$ δὲν δίδει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· ἄρα ἡ τιμὴ $x=\frac{11}{4}$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως· εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $$2+\sqrt{3x+4}=2x.$$

Ἡ ἐξίσωσις $2+\sqrt{3x+4}=2$ λέγεται σ υ ζ υ γ ὴ ς ἐξίσωσις τῆς δοθείσης $2-\sqrt{3x+4}=2x$ καὶ προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸ τοῦ ριζικοῦ.

Σημ. Τὸ ὅτι ἡ ρίζα $x=\frac{11}{4}$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως φαίνεται καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι θετικόν, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν καὶ τὸ πρῶτον μέλος της, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $2-2x>0$ ἢ $x<1$.

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ $x=\frac{11}{4}$ δὲν ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν $x<1$, ἕπεται, ὅτι ἡ τιμὴ $x=\frac{11}{4}$ δὲν εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

273 Ἄρρητοι ἐξισώσεις μὲ περισσότερα ριζικά. *Παράδειγμα.* *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-3}=\sqrt{x+42}.$$

Λύσις: Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν

$$(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x-3})^2=(\sqrt{x+42})^2.$$

$$\text{ἢ}\quad x+2+4\sqrt{(x+2)(x-3)}+4(x-3)=x+42$$

$$\text{ἢ}\quad x+2+4\sqrt{(x+2)(x-3)}+4x-12=x+42.$$

Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ ἔχομεν

$$4\sqrt{(x+2)(x-3)}=-x-2-4x+12+x+42$$

ἢ $4\sqrt{(x+2)(x-3)}=-4x+52$ ἢ $\sqrt{(x+2)(x-3)}=13-x$ (1)

Ὑψοῦμεν πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) καὶ ἔχομεν

$$\left(\sqrt{(x+2)(x-3)}\right)^2=(13-x)^2 \quad ἢ \quad (x+2)(x-3)=169-26x+x^2$$

$$ἢ \quad x^2+2x-3x-6-169+26x-x^2=0 \quad ἢ \quad 25x-175=0$$

$$ἢ \quad 25x=175 \quad ἢ \quad x=7.$$

'Επαλήθευσις : Ἐξετάζομεν τώρα, ἐὰν ἡ τιμὴ $x=7$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Διὰ $x=7$ ἔχομεν

1ον μέλος $=\sqrt{7+2}+2\sqrt{7-3}=\sqrt{9}+2\sqrt{4}=3+2\cdot2=7$

2ον μέλος $=\sqrt{7+42}=\sqrt{49}=7$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ τιμὴ $x=7$ δίδει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἄρα ἡ τιμὴ $x=7$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

'Ασκήσεις : *1362, 1363, 1365, 1367, 1368.*

Ἀσκήσεις

Ἀκέραιαι ἐξισώσεις :

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (448).

1191. $3x+21+5x-60=45+10x-12$

1192. $7y-9-2y+10=8y-9-4y$

1193. $16\omega-4\omega-60=4\omega+12\omega-80.$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (449).

1194. $5(x-3)+10(2-5x)+10x=-(15+10x)$

1195. $9(8-\omega)-10(9-\omega)-4(\omega-1)=1-8\omega.$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (471).

1196. $-\left\{2(x-4)-3(x+1)+[10-2(x+1)-60]\right\}=15(x+1)$

1197. $3\left\{2[5(2x-4)-10]-25\right\}-40=x$

1198. $5\left\{3[2(x+1)+12]+2\right\}-100=20x+130$

1199. $\frac{6}{7}\left\{\frac{5}{12}\left[\frac{7}{8}\left(\frac{3x}{4}+5\right)-10\right]+3\right\}-24=0.$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (450).

1200. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{3x-5}{2}$

1201. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-3}{4}+\frac{8}{3}=0$

1202. $\frac{5y-3}{2}-\frac{3y}{4}=y-5$

1203. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14$

1204. $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{15}$

1205. $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}$

1206. $\frac{1}{6}(3-x)+x-1\frac{2}{3}=\frac{1}{2}(x+6)-\frac{x}{3}$

1207. $2x-\frac{1}{2}(19-2x)=\frac{1}{2}(2x-11)$.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (451).

1208. $\frac{2(3x-5)}{5}-\frac{5(5x+10)}{12}=\frac{7(3x+2)}{4}-71$

1209. $\frac{3(x-4)}{4}-\frac{2(x+5)}{3}-\frac{3x-5}{2}=2-\frac{5(x+1)}{6}-x$

1210. $\frac{7(x-3)}{4}-\frac{3(2-x)}{5}-\frac{5(x-1)}{6}=x-2$.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (452).

1211. $2x-\left(\frac{15x}{9}-5\right)=\frac{x-6}{3}+7$

1212. $\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$

1213. $12-\left(\frac{3x+1}{4}+\frac{2x+1}{3}\right)=10-\left(\frac{5x-1}{4}-\frac{x+5}{6}\right)$

1214. $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5}\right)=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}$

1215. $\frac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\frac{1}{4}=0$

1216. $\frac{1}{2}\left[8-\frac{x}{3}-2\left(\frac{x}{2}+5\right)\right]-\left[6-\frac{3x}{2}+3(x-5)\right]+5=0$.

1217. (469). Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2+2\mu x-5=0$ ἀληθεύει :

1ον. Διὰ $x=3$. 2ον. Διὰ $x=-1$. 3ον. Διὰ $x=\frac{1}{2}$.

Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον : (470).

1218. $x^3+\mu x^2+2\mu x-1$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$
1219. $x^3+\mu x^2+2\mu x-1$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-1$
1220. $\alpha x^2+\mu x-3\alpha\mu$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$
1221. $\mu x^3+2\mu x+5$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$
1222. $\mu x^2-(\mu-1)x-4\mu$ νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+2$.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (473).

1223. $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0$

1224. $\frac{x-\frac{2x+3}{9}}{8}-\frac{x-\frac{1}{3}}{2}=\frac{2x-\frac{5(x+3)}{6}}{4}-\frac{x+1}{3}$

1225. $\frac{x-\frac{2(x-6)}{3}}{8}+\frac{x+3}{5}=x-10+\frac{x-\frac{3x-6}{5}}{3}$

1226. $\frac{x-\frac{5}{3}}{2}-\frac{1-\frac{x}{3}}{4}+\frac{\frac{x}{2}}{6}-\frac{x+1}{3}=\frac{5x+8}{12}$

1227. $\frac{\frac{3x-5}{2}-1}{4}=\frac{4(2x-7)}{9}+\frac{3-\frac{5(x-2)}{3}}{3}+\frac{13}{24}.$

'Εξισώσεις ἀδύνατοι καὶ ἀόριστοι:

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (453).

1228. $\frac{5x}{7}=10\left(\frac{x}{14}+1\right)$

1229. $\frac{6(9+8x)}{2}-27=24x$

1230. $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-3}{7}=4+\frac{x-2}{35}$

1231. $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+5=\frac{5x}{6}+2$

1232. $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}=\frac{x-3}{4}+1$

1233. $\frac{3x}{4}-\frac{16+7x}{20}=\frac{2(x-2)}{5}$

1234. $2x-5=\frac{x+7}{2}+\frac{3x}{2}$

1235. $\frac{3x}{2}-5+x=\frac{x-10}{2}+2x$

1236. $\frac{x+6}{2}+\frac{2(x+17)}{3}+\frac{5(x-10)}{6}=2x+6$

1237. $\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{5}+\frac{3x+1}{2}=\frac{27x+19}{20}.$

Παραμετρικαὶ ἐξισώσεις:

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἐξισώσεις: (463).

1238. $\alpha x+\alpha+1=x$

1239. $4\alpha^2x-1=x+2\alpha$

1240. $2\alpha x+1=4\alpha^2+x$

1241. $\mu x+8x=2(\mu-1)x+10$

1242. $(\mu-2)x+\mu=7$

1243. $(x-1)+40\mu x-5\mu=0$

1244. $\mu^2(x-2)-3\mu=x+1$

1245. $(\mu^2-4)x=\mu^2-2\mu.$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (464).

1246. $x-\frac{2}{\mu^2}=\frac{1}{\mu^2}(4x+1)$

1247. $\frac{2x+\mu}{3}-\frac{x-3}{\mu}-\frac{3\mu x+(\mu-3)^2}{3\mu}=0$

1248. $\frac{9x}{20\mu}+\frac{x}{20}-1=\frac{x(\mu+9)}{20}-\mu$

1249. $\frac{x-2}{\mu}-\frac{4+\mu^2}{2\mu}=-\frac{x-\mu}{2}.$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (465).

1250. $\alpha x+\alpha=\beta x+\beta$

1251. $\alpha x+\beta^2=\alpha^2-\beta x$

1252. $\frac{\mu x}{2}-\frac{1}{3}=\frac{\nu}{3}+x$

1253. $\alpha x-2\alpha^2=\beta x-2\beta^2$

1254. $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=2\alpha^3$

1255. $\alpha x+\beta-\frac{3x+2\alpha\beta}{3}=\frac{1}{2}$

1256. $(\alpha+x)(1+\beta x)=\alpha(1+\beta)+\alpha^2\beta^2+\beta x^2$

1257. $(x-\alpha)(2x-\beta)^2-(x-\beta)(2x-\alpha)^2=0$

1258. $\mu^2(\mu-x)+\mu^2\nu=\nu^2(\nu-x)+\mu\nu^2.$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (466).

1259. $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=1$

1260. $\frac{x}{2\alpha}-\frac{x}{2\beta}=2$

1261. $\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta}=\alpha-\beta$

1262. $\frac{\alpha x-\beta}{\beta}=\frac{\beta x}{\alpha}+1$

1263. $(\alpha+x)(\beta+x)=\alpha(\beta+1)+\frac{\alpha^2}{\beta}+x^2$

1264. $\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{x+\alpha}{\beta}=1$

1265. $\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha}-\frac{x}{\beta}$

1266. $\frac{\alpha x}{\beta}-\frac{\beta x-1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}$

1267. $\frac{2x+\alpha}{\beta}-\frac{x-\beta}{\alpha}=\frac{3\alpha x+(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}$

1268. $\frac{4\lambda x+1}{\mu}-3=\frac{3x}{\mu}+2$

1269. $(\alpha+x)(\alpha-x)=\frac{\beta(\alpha-x)}{\alpha+\beta}+\frac{2x}{\alpha}-x^2.$

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι ἀδύνατοι; (467).

1270. $\frac{\alpha x-1}{3}+\frac{x+1}{2}=4$

1271. $\frac{x-\alpha+3}{2}=\frac{2x+3\alpha x}{3}.$

1272. (468). Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha x-\beta}{3}+\frac{x}{2}=3x-\alpha$$

1ον. Ἔχει μίαν λύσιν; 2ον. Εἶναι ἀδύνατος; 3ον. Εἶναι ἀόριστος:

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (477).

1273. $(x+1)^2-\alpha(5-2\alpha-x)=(x-2\alpha)^2+5$

1274. $[(\alpha^2-\beta^2)x-1]^2+(2\alpha\beta x-1)^2=[(\alpha^2+\beta^2)x+1]^2$

1275. $(x-\alpha)^2(x+2\beta+\alpha)-(x+\beta)^2(x-2\alpha-\beta)=0$

1276. $[(\mu^2-1)x-1]^2=[(\mu^2+1)x+1]^2-(2\mu x-1)^2$

1277. $\alpha(x-\beta)(x-\gamma)-\beta(x-\alpha)(x-\gamma)=(\alpha-\beta)(x-\alpha)(x-\beta)$

1278. $(\alpha-x)(1-\beta)=(\alpha-x)(1-x)+(1+x)(\beta-x).$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (478).

1279. $\frac{x}{2\alpha-\beta}+2(\alpha-2\beta)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}x-\frac{\beta^2}{\alpha}$

1280. $\frac{(\alpha+x)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}+\frac{(\alpha-x)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{(x-\alpha)(\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$

1281. $\frac{x+\alpha^2}{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}+\frac{x-\beta^2-\gamma^2}{(\gamma-\alpha-\beta)(\beta-\alpha-\gamma)}=1$

1282. $\frac{(\alpha+\beta)^2(x+1)-(\alpha+\beta)(x+1)+x+1}{\alpha+\beta+1}=(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)+1.$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (479).

1283. $(2x-\alpha-\beta)[(x-\alpha)^2-(x-\beta)^2]=3(\beta-\alpha)[(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2]$

1284. $\frac{(x-\alpha)^2+(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)^2}{19}=\frac{(x-\alpha)^2-(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)^2}{49}$

1285. $\frac{6x}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-2)}-\frac{x}{\alpha(\alpha^2-1)}=\frac{5x+2}{(\alpha^2-1)(\alpha-2)}.$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (480).

1286. $\frac{x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{x}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=2$

1287. $\frac{\beta\gamma x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\alpha\gamma x}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\alpha\beta x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\alpha\beta\gamma$

1288. $\frac{\alpha^2 x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^2 x}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^2 x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\alpha\beta\gamma$

1289. $\frac{\beta^2\gamma^2 x-\alpha^2}{\beta\gamma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\gamma^2\alpha^2 x-\beta^2}{\gamma\alpha(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\alpha^2\beta^2 x-\gamma^2}{\alpha\beta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0.$

Ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου, ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ:

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (462).

1290. $x(x-1)(3x+2)(x-5)=0$

1291. $(3x+1)^2-(2x-1)^2=0$

1292. $(x-2\beta)^2=(x+2\alpha)^2$

1293. $x^3-9x=0$

1294. $5x-45x^3=0$

1295. $(\alpha+x)(x^2-4\beta^2)=0.$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (472).

1296. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3)$

1297. $(x+1)(x-2)=(x-3)(x-4)+3x-1$

1298. $(2x+5)^2-(18x+6)=(4x-1)(x+1)$

1299. $(2x+5)^2-(x+1)(x+2)=(x-3)^2+(2x-1)(x+2)$

1300. $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=\frac{39}{4}$

1301. $7x^2+5=(5x-2)(3x+7)-(4x-1)(2x+11).$

Κλασματικαὶ ἐξισώσεις:

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (458).

1302. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+5}=3$

1303. $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{2x^2-3x}=\frac{5}{x}$

1304. $\frac{2x+1}{3x-3}=\frac{7x-1}{6x+6}-\frac{2x^2-3x-45}{4x^2-4}$

1305. $\frac{3+x}{x-4}+\frac{2-x}{2x-8}+\frac{2x-1}{3x-12}=\frac{5}{6}$

1306. $\frac{7x+8}{21}-\frac{x+4}{8x-11}=\frac{x}{3}$

1307. $\frac{2x-3}{2x-4}-6=\frac{x-5}{3(x-2)}-\frac{11}{2}$

1308. $\frac{7x+16}{21}-\frac{x+8}{4x+10}=\frac{23}{70}+\frac{x}{3}$

1309. $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{2(x^2+2)}{x^2-4}$

1310. $\frac{3}{4-2x}+\frac{30}{8(1-x)}=\frac{3}{2-x}+\frac{5}{2-2x}$

1311. $\frac{2x-13}{2x-16}+\frac{2(x-6)}{x-8}=\frac{7}{8}+\frac{10x-78}{3x-24}.$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (459).

1312. $\frac{x}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-8}{x-6}-\frac{x-9}{x-7}$

1313. $$\frac{x+5}{x+4}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-15}{x-16}$$

1314. $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}$$

1315. $$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$$

1316. $$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3}.$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (160).

1317. $$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}$$

1318. $$\frac{2+2x}{9x^2-4}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}=\frac{x+4}{9x^2-4}$$

1319. $$\frac{3}{x-2}-\frac{4}{5x-15}=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

1320. $$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$$

1321. $$\frac{1}{3x-1}+\frac{2(x+1)}{x-1}-\frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1}=1$$

1322. $$\frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}.$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις : (461).

1323. $$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta-1}$$

1324. $$\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha-\beta}{x}=\alpha\beta^2-\frac{\alpha+\beta}{x}$$

1325. $$\frac{x-1}{x+\alpha-\beta}=\frac{1-x}{x-\alpha+\beta}+2$$

1326. $$\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}=\frac{\alpha-\beta}{x^2-\alpha\beta}$$

1327. $$\frac{1}{x+6\alpha}+\frac{2}{x-3\alpha}+\frac{3}{x+2\alpha}=\frac{6}{x+\alpha}$$

1328. $$\frac{2x+3\beta}{x(x-\alpha)}+\frac{3x-5\alpha}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{5}{x-\beta}$$

1329. $$\frac{x+4\alpha+\beta}{x+\alpha+\beta}+\frac{4x+\alpha+2\beta}{x+\alpha-\beta}=5$$

1330. $$\frac{\beta x+\alpha}{2\alpha^2\beta}+\frac{x-1}{3\beta^2}=\frac{3\beta^2+7\alpha^2}{6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)}$$

1331. $$\frac{8\alpha}{(x+2)^2}+\frac{8\beta}{(x-2)^2}-\frac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2}=-(\alpha+\beta).$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (475).

1332. $$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$$

1333. $$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=0$$

1334. $$\frac{(x+1)^2}{x(1-x)}+\frac{1}{x-1}=\frac{7}{x(1-x)}-1$$

1335. $$\frac{4}{1+x}+\frac{x+1}{1-x}=\frac{x^2-3}{1-x^2}$$

1336. $$\frac{x^2-4x+4}{x-1}+\frac{x^2-3x-1}{x-2}-\frac{2(x^2-5x+5)}{x-3}=0.$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (476).

1337. $$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

1338. $$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{14}{x-3}-\frac{9}{x-2}$$

1339. $$\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)^2}+\frac{3}{x(x-3)}$$

1340. $$\frac{5x-1}{2(x-3)}=\frac{2(4x+1)}{3(x+3)}+\frac{7x^2-8x+1}{2(x^2-9)}$$

1341. $$\frac{x}{2}-\frac{2(2x-3)}{3(x-1)}+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3(x^2+2)}{2(3x-2)}$$

1342. $$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}+\frac{16}{(x-3)(x-4)}=\frac{19}{(x-2)(x-4)}$$

1343. $$\frac{3+x}{x-4}+\frac{2-x}{2x-8}+\frac{2x-1}{3(x-4)}=\frac{5}{6}.$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (474)

1344. $$\frac{1}{x+\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{x-3}}}=4$$

1345. $$\frac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}=\frac{3}{14-x}$$

1346. $$\frac{2x}{3}+\frac{\dfrac{3x-5}{4}-\dfrac{5x-3}{6}}{\dfrac{4x-3}{9}-\dfrac{2x-5}{4}}=\frac{2x-4}{3}$$

1347. $$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$$

1348. $$\frac{\dfrac{1}{1+x}}{1-\dfrac{1}{1+x}}+\frac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x}}+\frac{\dfrac{1}{1-x}}{\dfrac{x}{1+x}}+\frac{3}{2x}=0$$

1349. $$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=\frac{\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\dfrac{3x}{2}}{2x-1+\dfrac{15}{x-3}}.$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (481).

1350. $$\frac{\alpha x-1}{x-1}+\frac{\beta}{x+1}=\frac{\alpha(x^2+1)}{x^2-1}$$

1351. $$\frac{\alpha}{\alpha x-1}+\frac{\beta}{\beta x-1}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)x-1}$$

1352. $$(x^2+\alpha^2-\beta^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}\right)+(\alpha^2+\beta^2-x^2)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+$$
$$+(\beta^2+x^2-\alpha^2)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{x}\right)=0$$

1353. $$\frac{1}{(x+\alpha)^2-\beta^2}+\frac{1}{(x+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{1}{x^2-(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{x^2-(\alpha-\beta)^2}$$

1354. $$\frac{x-\alpha}{x-\alpha-1}-\frac{x-\alpha-1}{x-\alpha-2}=\frac{x-\beta}{x-\beta-1}-\frac{x-\beta-1}{x-\beta-2}$$

1355. $$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x+\alpha+\beta}=\frac{3}{x}$$

1356. $$\frac{x+\alpha+\beta}{x+\alpha}=\frac{x+\alpha-\beta}{x-\alpha}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-\alpha^2}.$$

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (482).

1357. $$x\left(\frac{x-2\alpha}{x+\alpha}\right)^2+\alpha\left(\frac{2x-\alpha}{x+\alpha}\right)^2=x^2-\alpha^2$$

1358. $$\frac{x+\alpha}{x-\alpha}+\frac{x+2\alpha}{x-2\alpha}=\frac{x-2\alpha}{x+2\alpha}+\frac{x-\alpha}{x+\alpha}$$

1359. $$\frac{\alpha-x}{\alpha+x}+\frac{\beta-x}{\beta+x}=\frac{\alpha+x}{\alpha-x}+\frac{\beta+x}{\beta-x}$$

1360. $$\frac{(\beta-\gamma)(1+\alpha^2)}{x+\alpha^2}+\frac{(\gamma-\alpha)(1+\beta^2)}{x+\beta^2}+\frac{(\alpha-\beta)(1+\gamma^2)}{x+\gamma^2}=0$$

1361. $$\frac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)}+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x+\alpha)(x+\beta)}=\frac{(x+\gamma)(x+\delta)}{(x-\gamma)(x-\delta)}+\frac{(x-\gamma)(x-\delta)}{(x+\gamma)(x+\delta)}$$

Ἄρρητοι ἐξισώσεις :

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1362. $13-\sqrt{4x^2+7x-8}=2x$

1363. $x-1=\sqrt{x^2-5}$

1364. $\sqrt{x^2-x-4}+x=9$

1365. $x-\sqrt{2x+1}=1$

1366. $2x+\sqrt{(3x-4)(x-1)}=2$

1367. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$

1368. $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x+2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

1. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες

274. Ὁρισμοί. Εἰς τὴν § 107 εἴδομεν, ὅτι μία ἀ ν ι σ ό τ η ς εἶναι τὸ σύνολον δύο παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι χωρίζονται μὲ τὰ σημεῖα $>$ ἢ $<$. Αἱ ἀνισότητες διακρίνονται :

1ον. Εἰς ἀριθμητικὰς ἀνισότητας.

2ον. Εἰς ἐγγραμμάτους ἀνισότητας.

Π. χ. Ἡ ἀνισότης $13-18>-9$ εἶναι μία ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ὴ ἀ ν ι σ ό τ η ς.
Ἡ ἀνισότης $4\alpha^2+5>15\alpha-1$ εἶναι μία ἐ γ γ ρ ά μ μ α τ ο ς »

Αἱ ἐγγράμματοι ἀνισότητες δύνανται νὰ εἶναι μ ό ν ι μ ο ι ἀ ν ι σ ό τ η τ ε ς (ταυτότητες ἀνισοτήτων), δηλ. νὰ ἀληθεύουν διὰ κάθε τιμὴν τῶν γραμμάτων, ποὺ περιέχουν, ἢ νὰ εἶναι δ ε σ μ ε υ μ έ ν α ι ἀ ν ι σ ό τ η τ ε ς (ἀνισοεξισώσεις), δηλ. νὰ ἀληθεύουν δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων, ποὺ περιέχουν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ γράμματα τῶν ἀνισοτήτων αὐτῶν λέγονται ἄ γ ν ω σ τ ο ι αὐτῶν.

Π. χ. Ἡ ἀνισότης $(3\alpha-4)^2+5>1$ εἶναι μ ό ν ι μ ο ς.
Ἡ ἀνισότης $5x-4>6$ εἶναι δ ε σ μ ε υ μ έ ν η.

Κατωτέρω τὰς δεσμευμένας ἀνισότητας θὰ ὀνομάζωμεν ἁπλῶς ἀ ν ι σ ό τ η τ α ς.

Λ ύ σ ι ν μ ι ᾶ ς ἀ ν ι σ ό τ η τ ο ς μὲ ἕνα ἄγνωστον, ὀνομάζομεν κάθε τιμὴν τοῦ ἀγνώστου αὐτοῦ, ποὺ καθιστᾷ τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα μίαν ἀριθμητικὴν ἀνισότητα.

Αἱ τιμαί, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν μίαν ἀνισότητα λέγονται καὶ ρ ί ζ α ι τῆς ἀνισότητος αὐτῆς.

Αἱ ἀνισότητες δύνανται, ὅπως αἱ ἐξισώσεις, νὰ εἶναι ἀ κ έ ρ α ι α ι ἢ κ λ α σ μ α τ ι κ α ί, ρ η τ α ὶ ἢ ἄ ρ ρ η τ ο ι, μ ὲ ἕ ν α ἢ π ε ρ ι σ σ ο τ έ ρ ο υ ς ἀ γ ν ώ σ τ ο υ ς.

Ἰσοδύναμοι ἀνισότητες. *Δύο ἀνισότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τοὺς α ὐ τ ο ὺ ς ἀ γ ν ώ σ τ ο υ ς, λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ ο ι, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις.*

275 Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων. Αἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν ἀνισοτήτων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὰς § 108—113 ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δεσμευμένας ἀνισότητας καὶ ἀποδεικνύονται, ὅπως αἱ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων (§ 247—253). Διὰ τὰς ἀνισότητας, αἱ ἰδιότητες αὐταὶ ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς :

Ἰδιότης I. ***Ἐὰν προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὴν αὐτὴν ποσότητα καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον ἀνισότητα.***

Πορίσματα *1ον*. ***Ἐὰν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ὑπάρχουν δύο ὅροι ἴσοι, δυνάμεθα νὰ τοὺς παραλείψωμεν.***

2ον. ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον της ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον του.***

3ον. ***Εἰς μίαν ἀνισότητα δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἑνὸς μέλους της εἰς τὸ ἄλλο.***

Π. χ. ἡ ἀνισότης $A>B$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A-B>0$.

Ἰδιότης II. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν θετικὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον ὁμοιόστροφον ἀνισότητα.***

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀρνητικὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν μίαν ἰσοδύναμον, ἀλλὰ ἑτερόστροφον ἀνισότητα.

Πορίσματα. *1ον*. ***Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητος λαμβάνομεν μίαν ἑτερόστροφον ἀνισότητα.***

2ον. ***Δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς μιᾶς ἀνισότητος, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ τῶν ὅρων της.***

276. Παρατήρησις. Δὲν πρέπει νὰ παλλαπλασιάζωμεν ἢ νὰ διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ μίαν ἐγγράμματον παράστασιν, ἐκτὸς ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον της.

Π. χ. Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $(\mu^2+1)(5x-4)>0$ λαμβάνομεν τὴν ἀνισότητα $5x-4>0$, διότι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ μ^2+1.

Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $(\mu^2-1)(5x-4)>0$ δὲν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ἀνισότητα $5x-4>0$, διότι τὸ μ^2-1 δὲν εἶναι πάντοτε θετικόν. Διὰ $\mu=0$, τὸ μ^2-1 εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἐπομένως ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $(\mu^2-1)(5x-4)>0$ λαμβάνομεν τὴν ἀνισότητα $5x-4<0$.

Ἐπίσης δὲν πρέπει νὰ ὑψώνωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη

μιᾶς ἀνισότητος ἢ νὰ ἐξάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν των. Θὰ ἴδωμεν ἀργότερον, ποίας προϋποθέσεις πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει, διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς δύο ἀνωτέρω πράξεις.

2. Ἀνισότητες τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

277. Λύσις ἀκεραίων ἀνισοτήτων. Ἡ λύσις τῶν ἀνισοτήτων γίνεται ὅπως καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων (§ 257). Πρέπει ὅμως νὰ προσέχωμεν, ὅταν ἀλλάσσωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος, νὰ ἀλλάσσωμεν καὶ τὴν στροφὴν αὐτῆς.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $3(x-2)+2(3-x)>7x-3$.

Λύσις: Ἐκτελοῦμεν πράξεις καὶ ἔχομεν $3x-6+6-2x>7x-3$.

Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους καὶ ἔχομεν

$$3x-2x-7x>+6-6-3 \quad \text{ἢ} \quad -6x>-3 \qquad (1)$$

Ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος (1), δηλ. πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα καὶ ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει στροφὴν καὶ ἔχομεν $6x<3$, ἄρα $x<\frac{1}{2}$.

Ὥστε ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ $\frac{1}{2}$, δηλ. οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ $-\infty$ καὶ τοῦ $\frac{1}{2}$, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

$$-\infty \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots \quad +\infty$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}>7-\frac{4+x}{4}$.

Λύσις: Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. $7\cdot5\cdot4$ τῶν παρονομαστῶν της καὶ ἔχομεν

$$20(x-1)+28(23-x)>7\cdot5\cdot4\cdot7-35(4+x)$$

ἢ $$20x-20+644-28x>980-140-35x$$

ἢ $$20x-28x+35x>20-644+980-140$$

ἢ $$27x>216, \quad \text{ἄρα} \quad x>8.$$

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 8, δηλ. οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ 8 καὶ τοῦ $+\infty$ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

$$-\infty \quad \ldots\ldots \quad 8 \quad \ldots\ldots \quad +\infty$$

278. Διάστημα. *Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, (α<β) λέγεται* ***διάστημα*** *καὶ παρίσταται συμβολικῶς μὲ (α, β).*

Ἐπίσης τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὴν διπλῆν ἀνισότητα $\alpha<x<\beta$ λέγεται ***διάστημα τῶν τιμῶν τοῦ x ἀπὸ α ἕως β.***

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται **ἄκρα τοῦ διαστήματος.**

Ὅταν εἰς τὰς τιμὰς ἑνὸς διαστήματος περιλαμβάνωνται καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ, τὸ διάστημα λέγεται κ λ ε ι σ τ ό ν· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει λέγεται ἀ ν ο ι κ τ ό ν.

Οὕτω τὸ διάστημα $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ λέγεται κ λ ε ι σ τ ὸ ν διάστημα
τὸ » $\alpha < x < \beta$ » ἀ ν ο ι κ τ ὸ ν »
τὸ » $\alpha \leqslant x < \beta$ » κ λ ε ι σ τ ὸ ν πρὸς τ' ἀριστερὰ
τὸ » $\alpha < x \leqslant \beta$ » κ λ ε ι σ τ ὸ ν πρὸς τὰ δεξιά.

Λέγομεν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς μ εἶναι ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (α, β), ἐὰν δὲν περιέχεται μεταξὺ τῶν α καὶ β, δηλ. ἐὰν εἶναι μικρότερος τοῦ α ἢ μεγαλύτερος τοῦ β, $\mu < \alpha$, εἴτε $\mu > \beta$.

$$-\infty \quad . \ . \ . \quad \alpha \quad . \ . \ . \quad \beta \quad . \ . \ . \quad +\infty$$

Ἀσκήσεις : *1369, 1370, 1371, 1372, 1373.*

279. Λύσις καὶ διερεύνησις τῆς ἀνισότητος $\alpha x + \beta > 0$. Μία ἀκεραία ἀνισότης τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον x δύναται πάντοτε νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha x + \beta > 0$$

εἰς τὴν ὁποίαν οἱ α καὶ β εἶναι ποσότητες ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, μονώνυμα ἢ πολυώνυμα, ἀνεξάρτητα πάντως τοῦ x.

Ὁ συντελεστὴς α τοῦ ἀγνώστου x πρέπει ν ὰ ε ἶ ν α ι π ά ν τ ο τ ε δ ι ά φ ο ρ ο ς τ ο ῦ μ η δ ε ν ό ς, διότι ἄλλως ἡ ἀνισότης θὰ ἐλάμβανε τὴν μορφὴν $\beta > 0$ καὶ δὲν θὰ ἦτο πλέον μία δεσμευμένη ἀνισότης, ἀλλὰ μία ἀριθμητικὴ ἀνισότης.

Ὁ β δύναται νὰ εἶναι τυχὼν ἀριθμὸς θετικός, ἀρνητικὸς ἢ μηδέν.

Ἔστω τώρα, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα

$$\alpha x + \beta > 0 \qquad (1)$$

Μεταφέρομεν τὸ β εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα $\alpha x > -\beta$ (2)

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

1ον. $\alpha > 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α καὶ λαμβάνομεν τὴν λύσιν $x > -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

2ον. $\alpha < 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ α, ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει στροφὴν καὶ λαμβάνομεν τὴν λύσιν $x < -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Παρατήρησις. Ἀνωτέρω εἴπομεν, ὅτι ὁ α πρέπει νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\alpha = 0$, ἡ ἀνισότης

$$\alpha x+\beta>0 \quad \text{γίνεται} \quad 0\cdot x+\beta>0 \qquad (1)$$

Ἐὰν $\beta>0$, ἡ ἀνισότης (1) ἐπαληθεύεται πάντοτε.
Ἐὰν $\beta<0$, ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἀδύνατος.
Ἐὰν $\beta=0$, ἡ ἀνισότης λαμβάνει τὴν μορφὴν $0x+0>0$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκόμη ἀδύνατος, ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι πάντοτε μηδέν.

280. Ἐφαρμογαί. ***Παράδειγμα 1ον.*** *Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης* $\mu(x-2)>x-3$.

Λύσις: Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$\mu x-2\mu>x-3 \quad \text{ἢ} \quad \mu x-x>2\mu-3 \quad \text{ἢ} \quad (\mu-1)x>2\mu-3 \qquad (1)$$

I. Ἐὰν $\mu-1>0$, δηλ. ἐὰν $\mu>1$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\mu-1$ καὶ ἔχομεν $x>\frac{2\mu-3}{\mu-1}$.

II. Ἐὰν $\mu-1<0$, δηλ. ἐὰν $\mu<1$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ $\mu-1$ καὶ λαμβάνομεν $x<\frac{2\mu-3}{\mu-1}$.

III. Ἐὰν $\mu-1=0$, δηλ. $\mu=1$, ἡ (1) γίνεται

$$0\cdot x>2\cdot 1-3 \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x>-1$$

ἡ τελευταία δὲ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνισότης

$$\frac{\mu x-2}{3}+\frac{3\mu-x}{4}<\frac{\mu}{2}.$$

Λύσις: Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$4(\mu x-2)+3(3\mu-x)<6\mu \quad \text{ἢ} \quad 4\mu x-8+9\mu-3x<6\mu$$

$$\text{ἢ} \quad 4\mu x-3x<+8-9\mu+6\mu \quad \text{ἢ} \quad (4\mu-3)x<8-3\mu \qquad (1)$$

I. Ἐὰν $4\mu-3>0$, δηλ. ἐὰν $\mu>\frac{3}{4}$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $4\mu-3$ καὶ λαμβάνομεν $x<\frac{8-3\mu}{4\mu-3}$.

II. Ἐὰν $4\mu-3<0$, δηλ. ἐὰν $\mu<\frac{3}{4}$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ $4\mu-3$ καὶ λαμβάνομεν $x>\frac{8-3\mu}{4\mu-3}$.

III. Ἐὰν $4\mu-3=0$, δηλ. ἐὰν $\mu=\frac{3}{4}$, ἡ ἀνισότης (1) γίνεται

$$0\cdot x<8-3\cdot\frac{3}{4} \quad \text{ἢ} \quad 0\cdot x<\frac{23}{4}$$

καὶ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Ἀσκήσεις: *1375, 1377, 1379, 1381, 1385.*

3. Ἀνισότητες τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἀνισοτήτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

281. Ἀνισότητες τῆς μορφῆς $A \cdot B \cdot \Gamma > 0$. Ἡ λύσις ἀνισοτήτων μὲ ἕνα ἄγνωστον, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου καὶ τῆς μορφῆς $A \cdot B \cdot \Gamma > 0$, ὅπου A, B, Γ εἶναι διώνυμα τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta$, ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν πολλῶν ἀνισοτήτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Εἶναι ἀνάγκη ὅμως, νὰ γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου $A \cdot B \cdot \Gamma$.

282. Σημεῖον ἑνὸς γινομένου πρωτοβαθμίων παραγόντων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου $A \cdot B \cdot \Gamma$, ὅπου A, B, Γ εἶναι πρωτοβάθμιοι παράγοντες τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta$ ἐργαζόμεθα, ὅπως εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma = (x+2)(x-4)(x-8).$$

Εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῶν διωνύμων παραγόντων $x+2$, $x-4$, $x-8$. Πρὸς τοῦτο ἐξισοῦμεν μὲ τὸ μηδὲν κάθε παράγοντα, δηλ. θέτομεν

$$x+2=0, \quad x-4=0, \quad x-8=0$$

καὶ εὑρίσκομεν τὰς ρίζας $x=-2$, $x=4$, $x=8$.

Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τοῦ x λέγονται χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ α ὶ τ ι μ α ὶ τ ο ῦ x.

Τάσσομεν τὰς ρίζας αὐτὰς κατὰ τάξιν μεγέθους οὕτως, ὥστε νὰ βαίνουν αὐξανόμεναι, -2, 4, 8.

Αἱ χαρακτηριστικαὶ αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x χωρίζουν τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἰς μικρότερα διαστήματα, ὅπως φαίνεται κατωτέρω

$$-\infty \quad . \quad . \quad -2 \quad . \quad . \quad 4 \quad . \quad . \quad 8 \quad . \quad . \quad +\infty.$$

Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι ὁ ἄγνωστος x λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$.

Ὅταν ὁ x λάβῃ τιμὰς μικροτέρας τοῦ -2, οἱ παράγοντες $x+2$, $x-4$, $x-8$ εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενόν των

$$\Gamma = (x+2)(x-4)(x-8)$$

θὰ εἶναι ἀρνητικόν, ὡς γινόμενον τριῶν ἀρνητικῶν παραγόντων.

Ὅταν ὁ x λάβῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ -2 καὶ 4, δηλ. μεγαλυτέρας τοῦ -2, ἀλλὰ μικροτέρας τοῦ 4, ὁ παράγων $x+2$ εἶναι θετικὸς καὶ οἱ δύο ἄλλοι παράγοντες $x-4$ καὶ $x-8$ εἶναι ἀρνητικοί. Τὸ γινόμενόν των ὅμως Γ θὰ εἶναι θετικόν, διότι τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον.

Ὅταν ὁ x λάβῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ 8 καὶ $+\infty$, δηλ. ὅταν $8 < x < +\infty$ καὶ οἱ τρεῖς παράγοντες $x+2$, $x-4$, $x-8$ εἶναι θετικοὶ καὶ ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενόν των εἶναι θετικόν.

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma = (x+2)(x-4)(x-8).$$

x	$-\infty \ldots -2 \ldots 4 \ldots 8 \ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ.	$-$ $+$ $-$ $+$

Ὥστε τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου $\Gamma=(x+2)(x-4)(x-8)$ εἶναι θετικὸν διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας εἰς τὰ διαστήματα $(-2, 4)$ καὶ $(8, +\infty)$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας εἰς τὰ διαστήματα $(-\infty, -2)$ καὶ $(4, 8)$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=(x-5)(2x+3)(5x-4)(x+9).$$

Εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῶν διωνύμων παραγόντων

$$x-5,\ 2x+3,\ 5x-4,\ x+9.$$

Πρὸς τοῦτο θέτομεν

$$x-5=0, \quad 2x+3=0, \quad 5x-4=0, \quad x+9=0$$

καὶ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως

$$x=5, \quad x=-\frac{3}{2}, \quad x=\frac{4}{5}, \quad x=-9.$$

Τάσσομεν τὰς ρίζας αὐτὰς κατὰ τάξιν μεγέθους οὕτως, ὥστε νὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ ἔχομεν $-9, -\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, 5.$

Ἀλλάσσομεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου Γ οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι των νὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον γινόμενον

$$\Gamma=(x+9)(2x+3)(5x-4)(x-5).$$

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων χωρίζουν τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$ εἰς μικρότερα διαστήματα, ὅπως φαίνεται κατωτέρω

$$-\infty \ldots -9 \ldots -\frac{3}{2} \ldots \frac{4}{5} \ldots 5 \ldots +\infty.$$

Δίδομεν τώρα εἰς τὸ x τιμὰς ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$.

Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς μικροτέρας τοῦ -9, δηλ. ὅταν $-\infty < x < -9$, οἱ παράγοντες $x+9$, $2x+3$, $5x-4$, $x-5$ τοῦ γινομένου εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ ἐπειδὴ εἶναι τέσσαρες, δηλ. τὸ πλῆθος των εἶναι ἄρτιον, τὸ γινόμενόν των $\Gamma=(x+9)(2x+3)(5x-4)(x-5)$ εἶναι θετικόν.

Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ -9 καὶ $-\frac{3}{2}$, δηλ. ὅταν εἶναι $-9 < x < -\frac{3}{2}$, μόνον ὁ πρῶτος παράγων $x+9$ εἶναι θετικός, δηλ. ἀλλάσσει σημεῖον, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον Γ εἶναι ἀρνητικόν.

Ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μεταξὺ τοῦ $-\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{4}{5}$, δηλ. ὅταν εἶναι $-\frac{3}{2} < x < \frac{4}{5}$, ἀλλάσσει σημεῖον καὶ ὁ δεύτερος παράγων καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον Γ εἶναι θετικόν, καὶ οὕτω καθεξῆς. Δηλ. κάθε φοράν, ποὺ ὁ x διέρχεται ἀπὸ μίαν ρίζαν, τὸ γινόμενον ἀλλάσσει σημεῖον.

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=(x+9)(2x+3)(5x-4)(x-5).$$

x	$-\infty \ldots -9 \ldots -\frac{3}{2} \ldots \frac{4}{5} \ldots 5 \ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ.	+ − + − +

Ὥστε τὸ γινόμενον Γ εἶναι θετικόν, ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας εἰς τὰ διαστήματα $(-\infty, -9)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{5}\right)$ καὶ $(5, +\infty)$ καὶ ἀρνητικόν, ὅταν ὁ x λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας εἰς τὰ διαστήματα

$$\left(-9, -\frac{3}{2}\right) \text{ καὶ } \left(\frac{4}{5}, 5\right).$$

283. Σπουδαία παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν, ὅτι δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προσδιορίζωμεν τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου Γ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἀπὸ τὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. Διότι, ὅταν προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον τοῦ Γ εἰς ἕνα διάστημα τιμῶν τοῦ x, τὸ σημεῖον τοῦ Γ ἀλλάσσει εἰς τὸ ἑπόμενον διάστημα, διότι ἀλλάσσει τὸ σημεῖον ἑνὸς παράγοντος καὶ οὕτω καθεξῆς. Εἰδικώτερον τὸ σημεῖον τοῦ Γ εἶναι π ά ν τ ο τ ε θ ε τ ι κ ό ν, διὰ τιμὰς τοῦ x περιεχομένας εἰς τὸ τελευταῖον διάστημα, διότι, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ Γ εἶναι θετικοί. Διὰ τοῦτο θέτομεν εἰς τὸ τελευταῖον διάστημα πάντοτε τὸ σημεῖον + καὶ ἔπειτα ἐναλλὰξ τὸ σημεῖον $-, +, \ldots$ εἰς τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ διαστήματα.

284. Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν λύσιν ἀνισοτήτων τῆς μορφῆς $A \cdot B \cdot \Gamma > 0$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $(2x-3)(3x-4)(5x+2) > 0$ (1)

Λύσις: Εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma = (2x-3)(3x-4)(5x+2).$$

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ Γ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

x	$-\infty \ldots -\frac{2}{5} \ldots \frac{4}{3} \ldots \frac{3}{2} \ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ.	− + − +

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (1) πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι θετικόν. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας εἰς τὰ διαστήματα

$$\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3}\right) \text{ καὶ } \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

δηλ. διὰ $-\frac{2}{5} < x < \frac{4}{3}$ καὶ διὰ $\frac{3}{2} < x < +\infty$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$(x-5)(3x+1)(-5x+4)(x+6) > 0 \qquad (1)$$

Λύσις: Διὰ νὰ εἶναι θετικοὶ ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τοῦ x ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον τοῦ τρίτου παράγοντος, ὁπότε θὰ ἀλλάξῃ στροφὴν καὶ ἡ ἀνισότης. Θὰ εἶναι λοιπὸν $(x-5)(3x+1)(5x-4)(x+6)<0$ (2)

Εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου

$$\Gamma=(x-5)(3x+1)(5x-4)(x+6).$$

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ Γ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

x	$-\infty \ldots -6 \ldots -\frac{1}{3} \ldots \frac{4}{5} \ldots 5 \ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ.	+ − + − +

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (2) καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ἰσοδύναμός της (1) πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ x περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα $\left(-6,\ -\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{4}{5},\ 5\right)$,

δηλ. διὰ $-6<x<-\frac{1}{3}$ καὶ διὰ $\frac{4}{5}<x<5$.

Ἀσκήσεις: *1386, 1388, 1389, 1390.*

285. Ἀνισότητες τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}>0$. Ἔστω ἡ ἀνισότης $\frac{A}{B}>0$, (1) ὅπου A καὶ B εἶναι διώνυμα τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta$. Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομεν τὸ σημεῖον τοῦ παρονομαστοῦ, ἐφ' ὅσον περιέχει τὸν ἄγνωστον x, δὲν δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη της ἐπὶ B διὰ νὰ ἐξαλειφθῇ ὁ παρονομαστής. Δυνάμεθα ὅμως νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ, δηλ. ἐπὶ B^2, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε θετικόν, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\frac{A}{B}\cdot B^2>0$ ἢ $A\cdot B>0$.

Ἡ λύσις λοιπὸν τῆς ἀνισότητος $\boxed{\frac{A}{B}>0}$ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἰσοδυνάμου ἀνισότητος $\boxed{A\cdot B>0}$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{x(x+5)}{(x-1)(x+2)}>0$.

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$x(x+5)(x-1)(x+2)>0$ ἢ $(x+5)(x+2)x(x-1)>0$ (1

Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) εἶναι
$-5, \quad -2, \quad 0, \quad 1.$
Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου
$\Gamma=(x+5)(x+2)x(x-1).$

x	$-\infty \ldots -5 \ldots -2 \ldots 0 \ldots 1 \ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ.	+ − + − +

Ἡ ἀνισότης (1) καὶ ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα ἀληθεύει διὰ
$-\infty < x < -5$, διὰ $-2 < x < 0$, καὶ διὰ $1 < x < +\infty$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{2}{3x+1} > \frac{3}{x-4}$.

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα ἀνισότης γράφεται

$$\frac{2}{3x+1} - \frac{3}{x-4} > 0 \quad ἤ \quad \frac{2(x-4)-3(3x+1)}{(3x+1)(x-4)} > 0$$

ἤ $$\frac{-(7x+11)}{(3x+1)(x-4)} > 0 \quad ἤ \quad \frac{7x+11}{(3x+1)(x-4)} < 0 \qquad (1)$$

Ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν
$$(7x+11)(3x+1)(x-4) < 0 \qquad (2)$$
Αἱ ρίζαι τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) εἶναι
$-\frac{11}{7}, \quad -\frac{1}{3}, \quad 4.$
Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου
$\Gamma=(7x+11)(3x+1)(x-4).$

x	$-\infty \ldots -\frac{11}{7} \ldots -\frac{1}{3} \ldots 4 \ldots +\infty$
Σημεῖον τοῦ Γ.	− + − +

Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης (2) πρέπει τὸ πρῶτον μέλος της νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἡ ἀνισότης αὐτή, ἑπομένως καὶ ἡ ἰσοδύναμος δοθεῖσα, ἀληθεύουν διὰ
$$-\infty < x < -\frac{11}{7} \quad καὶ \ διὰ \quad -\frac{1}{3} < x < 4.$$

Ἀσκήσεις: 1391, 1392, 1394, 1396.

286 Συναληθεύουσαι ἀνισότητες. *Λέγομεν, ὅτι δύο ἤ περισσότεραι ἀνισότητες τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, συναληθεύουν ἤ ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα ἀνισοτήτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, ὅταν ἀληθεύουν μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων*

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν κοινῶν λύσεων τῶν διαφόρων ἀνισοτήτων λέγεται λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἀνισοτήτων.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τῶν κοινῶν λύσεων ἑνὸς συστήματος ἀνισοτήτων.

Παράδειγμα 1ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$6x-8>4x-20 \quad (1), \qquad \frac{3x+5}{2}<x+10 \qquad (2)$$

Λύομεν χωριστὰ τὰς ἀνισότητας (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διὰ $x>-6$ καὶ ἡ (2) ἀληθεύει διὰ $x<15$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1) καὶ (2) σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τοῦ x

$$-\infty \;....\; -6 \;....\; 15 \;....\; +\infty$$

A (−∞ … −6), B (15 … +∞)

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x>-6$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα A.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x<15$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα B.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ συναληθεύουν αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες πρέπει ὁ x νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μόνον εἰς τὸ διάστημα $(-6, 15)$. Ὥστε αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-6<x<15$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων

$$3x+5>0 \quad (1), \qquad x-6<0 \quad (2), \qquad (x+2)(x-4)(x-8)>0 \qquad (3)$$

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x>-\frac{5}{3}$.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x<6$.

Ἡ ἀνισότης (3), ὅπως εὑρήκαμεν εἰς τὸ 1ον παράδειγμα τῆς § 282 ἀληθεύει διὰ $-2<x<4$ καὶ διὰ $8<x<+\infty$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1), (2) καὶ (3), σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα, ὁ ὁποῖος περιέχει τὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς τοῦ x κατὰ τάξιν μεγέθους

$$-\infty \;....\; -2 \;....\; -\frac{5}{3} \;....\; 4 \;....\; 6 \;....\; 8 \;....\; +\infty$$

A (−∞ … −2), B (−2 … −5/3), Γ (4 … 6), Δ (6 … 8), E (8 … +∞)

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x>-\frac{5}{3}$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα A καὶ B.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x<6$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Δ καὶ E.

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $-2<x<4$ καὶ διὰ $8<x<+\infty$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα A, Γ καὶ Δ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ συναληθεύουν καὶ αἱ τρεῖς ἀνισότητες (1), (2), (3) πρέπει ὁ x νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας μόνον εἰς τὸ διά-

στημα $\left(-\frac{5}{3}, 4\right)$. Ὥστε αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ

$$-\frac{5}{3} < x < 4.$$

Παράδειγμα 3ον. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$2x > x-2 \quad (1), \qquad \frac{4x}{3} < x+2 \quad (2), \qquad x+1 > \frac{x}{2}+6 \quad (3)$$

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x > -2$.
Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x < 6$.
Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $x > 10$.
Εὑρίσκομεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3).

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν τοῦ x.

$$-\infty \;\ldots\; -2 \;\ldots\; 6 \;\ldots\; 10 \;\ldots\; +\infty$$

A B Γ Δ

Ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει διὰ $x > -2$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα Α.

Ἡ ἀνισότης (2) ἀληθεύει διὰ $x < 6$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Γ καὶ Δ.

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $x > 10$· ἄρα ὁ x δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ τιμὰς περιεχομένας εἰς τὰ διαστήματα Α, Β, Γ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες δὲν συναληθεύουν μὲ καμμίαν τιμὴν τοῦ x. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων (1), (2), (3), εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν ἢ ὅτι αἱ ἀνισότητες αὐταὶ εἶναι ἀ σ υ μ β ί β α σ τ ο ι.

Ἀσκήσεις : 1398, 1399, 1400, 1401, 1402

Ἀσκήσεις

Ἀκέραιαι ἀνισότητες :

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες : (629).

1369. $\frac{3x+1}{4} - \frac{4-x}{3} > 1$ **1370.** $\frac{5(3x-2)}{2} - 3(x-1) > 10$

1371. $x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{4}$

1372. $\frac{3(x-4)}{5} - \frac{2(5+x)}{6} < \frac{5x-1}{10}$

1373. $\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{2}\right) - \frac{x+5}{6} < 2$

1374. $\frac{x-3}{2} - \frac{x-4}{3} - \frac{x-5}{4} > 1$

Διερεύνησις ἀνισοτήτων :

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες : (630).

1375. $\mu(x-1)>x-2$ **1376.** $2\mu(x-1)>\mu(x+2)$

1377. $\frac{\mu x}{2}-\frac{2\mu x}{3}-\frac{3\mu x}{4}>1$ **1378.** $\mu(x+5)>x-4$

1379. $3(\mu x-1)+2(2\mu-x)<x$

1380. $\frac{\mu x+2}{3}-\frac{x-\mu}{4}>\frac{2\mu-x}{6}$.

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες : (631).

1381. $\frac{x}{\mu}+\frac{1-3x}{2}>\frac{x+2}{4\mu}$

1382. $\frac{2x-1}{\mu+1}-\frac{x+2}{3}>\frac{2x-5}{2(\mu+1)}$

1383. $\frac{3x-1}{\mu+1}-\frac{2x+3}{2}>\frac{3x-4}{3(\mu+1)}$

1384. $\frac{\mu x}{\mu-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}$

1385. $\frac{5-3x}{\mu+2}-\frac{1-x}{\mu+2}-\frac{2-x}{3}+\frac{1+x}{4}>0$.

'Ανισότητες τῆς μορφῆς $A\cdot B\cdot \Gamma>0$:

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες : (632).

1386. 1. $(x+3)(x-2)>0$ 2. $x(x+5)(x-7)>0$

1387. $(3x+1)(x-4)(x+2)(4x-3)<0$

1388. $(-2x+1)(x+4)(3x-5)>0$

1389. $(-x+5)(-x-7)(-x+2)(-3x-1)>0$

1390. $x(2x+1)(x-5)(x+3)(-3x+4)>0$.

'Ανισότητες τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}>0$:

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες : (633).

1391. 1. $\frac{x-4}{x+5}<0$ 2. $\frac{-2x+5}{(3x+1)(x-4)}<0$

1392. 1. $\frac{x(x+3)}{x^2-4}>0$ 2. $\frac{x(x-1)(x+2)}{x^2-9}>0$

1393. 1. $\frac{-3x+2}{(2x+1)(x-3)}<0$ 2. $\frac{(x-3)(x+5)}{x(x-2)(x+1)}>0$.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες : (634).

1394. 1. $\frac{x+4}{3x-1}>2$ 2. $\frac{-3x+2}{2x+1}<-3$

1395. 1. $\dfrac{3}{x-2} > \dfrac{4}{3x-2}$ 2. $\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-1} > 1$

1396. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+1} > 0$

1397. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{3}{x+2} < 0.$

Συναληθεύουσαι ἀνισότητες :

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ κάτωθι ἀνισότητες : (635),

1398. $2x - \dfrac{5}{7} < 3(x-5)$ καὶ $x - \dfrac{2}{3}(x+2) > 5$

1399. $\dfrac{7x}{3} + 2 > x+8$ καὶ $91 - 4x > 8x + 6$

1400. $8x - 7 > \dfrac{15x-9}{2}$ καὶ $4x - 5 > 5x - \dfrac{8}{3}$

1401. $4x - 5 > \dfrac{2}{3}$ καὶ $-5x + 3(x-2) > \dfrac{2}{3}(x+11)$

1402. $(2x-1)(3x-5) < 0$ καὶ $x(2x+1)(3-x)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) > 0$

1403. $\dfrac{2x+3}{5x-4} > 0$ καὶ $\dfrac{x(x-2)(3x+2)}{(4x-7)(3x-1)} < 0$

Θεωρητικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ἀνισοτήτων :

1404. (636). **Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε** $\alpha^2+\beta^2 > 2\alpha\beta$.

1405. (637). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2} > \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$.

1406. (638). Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta > 0$, νὰ δειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} > 2$.

1407. (639). Ἐὰν α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) > 8\alpha\beta\gamma$.

1408. (640). Ἐὰν α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\alpha\beta\gamma > (\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)$.

1409. (641). Ἐὰν $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 > \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$

1410. (642). Ἐὰν $\alpha > \beta > \gamma$ ἢ $\beta > \gamma > \alpha$ ἢ $\gamma > \alpha > \beta$, νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἀνισότης $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha > \alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta$.

1411. (643). Ἐὰν $\alpha < \beta < \gamma$ ἢ $\beta < \gamma < \alpha$ ἢ $\gamma < \alpha < \beta$, νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἀνισότης $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha < \alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta$.

1412. (644). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι
$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\mu^2+\nu^2+\lambda^2) > (\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\lambda)^2.$$

1413. (645). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $3(1+\alpha^2+\alpha^4) > (1+\alpha+\alpha^2)^2$ δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ α, θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν διάφορον τοῦ $+1$.

Ἐὰν α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ διάφοροι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης: (646).

1414. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3>3\alpha\beta\gamma$

1415. $(\alpha+\beta+\gamma)^3>3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

Ἐὰν $\alpha>1$, νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες: (647).

1416. $\alpha^3>\alpha^2-\alpha+1$

1417. $2\alpha^4+1>2\alpha^3+\alpha^2$.

1418. (648). Ἐὰν $\alpha>0$ καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $(1+\alpha)^\mu>1+\mu\alpha$.

1419. (649). Ἐὰν $x^2+y^2+\omega^2=1$ καὶ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega<1$, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως
$$\alpha-x=\beta-y=\gamma-\omega=0.$$

1420. (650). Ἐὰν εἶναι $x^2+y^2=1$ καὶ $\alpha^2+\beta^2=1$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha x+\beta y<1$.

1421. (651). Ἐὰν α, β, γ εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι
$$\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2\geqslant\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma).$$

1422. (652). Ἐὰν α, β, γ παριστάνουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$. (Σχολὴ Εὐελπίδων)

1423. (653). Ἐὰν α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha+\beta+\gamma=1$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι:
$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)>8\alpha\beta\gamma.$$

1424. (654). Ἐὰν $\alpha>\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^2>\alpha\beta$, ἂν $\alpha>0$ καὶ $\alpha^2<\alpha\beta$, ἐὰν $\alpha<0$

1425. (655). Ἐὰν $\alpha>1$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu>1$, ἐὰν $\mu>0$· ἂν δὲ εἶναι $\alpha<1$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu<1$.

1426. (656). Ἐὰν $\alpha>\beta$, $\gamma>\delta$ καὶ $\alpha\delta>0$, ἔνθα α καὶ δ θετικά, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha\gamma>\beta\delta$. Ἂν δὲ $\alpha\delta>0$ καὶ α καὶ δ εἶναι καὶ τὰ δύο ἀρνητικά, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\alpha\gamma<\beta\delta$. Περαιτέρω δείξατε διὰ καταλλήλων ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων, ὅτι, ἐὰν $\alpha\delta<0$, τότε δύνανται νὰ συμβοῦν αἱ τρεῖς περιπτώσεις: $\alpha\gamma>\beta\delta$, $\alpha\gamma=\beta\delta$, $\alpha\gamma<\beta\delta$.

Ποῖον κανόνα λογισμοῦ μὲ ἀνισότητας συνάγετε ἐκ τῶν ἀνωτέρω;

(Πολυτεχνεῖον 1937)

1427. (657). Ἐὰν α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης $(1+\alpha)(1+\beta)>1+\alpha+\beta$.

1428. (658). Ἐὰν α, β, ..., λ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης $(1+\alpha)(1+\beta)\ldots(1+\lambda)>1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda$.

1429. (659). Ἐὰν α, β, γ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης
$$(\alpha+\beta)\alpha\beta+(\alpha+\gamma)\alpha\gamma+(\beta+\gamma)\beta\gamma>6\alpha\beta\gamma.$$

Ἐὰν α, β, γ εἶναι θετικοὶ καὶ διάφοροι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες: (660).

1430. $\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)<2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$

1431. $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2+(-\alpha+\beta+\gamma)^2>\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

1432. $3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)<8(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$

1433. $(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)>\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2>\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$.

1434. (661). Νὰ ἀποδειχθῇ, δι' ἀναλύσεως εἰς γινόμενον παραγόντων, ἡ ἀνισότης $(A^2+B^2+\Gamma^2+\ldots)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)>(A\alpha+B\beta+\Gamma\gamma+\ldots)^2$.

1435. (662). 'Εὰν $\alpha>\beta>0$ καὶ ν ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης $(\alpha^{2\nu+2}-\beta^{2\nu+2})^\nu>(\alpha^{2\nu}-\beta^{2\nu})^{\nu+1}$.

1436. (663). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, μικρότερον (ἢ μεγαλύτερον) τῆς μονάδος αὐξάνει (ἢ ἐλαττοῦται), ὅταν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μ.

1437. (664). Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2\geqslant\frac{2}{\nu-1}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu).$$

1438. (665). Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{4}>\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right)^2.$$

1439. (666). 'Εὰν $\alpha>\beta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ $\nu\beta^{\nu-1}$ καὶ $\nu\alpha^{\nu-1}$.

1440. (667). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha'}{\beta'}<\frac{\alpha''}{\beta''}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\nu\alpha+\nu'\alpha'+\nu''\alpha''}{\nu\beta+\nu'\beta'+\nu''\beta''}<\frac{\alpha''}{\beta''}$, ἐὰν οἱ β, β', β'', ν, ν', ν'' εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

1441. 'Εὰν $\alpha>\beta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}<\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

1442. 'Εὰν ν εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}+\ldots+\frac{1}{2\nu}>\frac{1}{2}.$$

1443. 'Εὰν ν ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ 1, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\ldots2\nu<(\nu+1)^\nu.$$

1444. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀνισότης $2\alpha^4+1\geqslant2\alpha^3+\alpha^2$ ἀληθεύει διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ α.

1445. 'Εὰν α καὶ β εἶναι δύο θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\alpha\beta\leqslant\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

'Η ἰσότης ὑφίσταται, ἐὰν $\alpha=\beta$.

Γενικῶς: Ἔστωσαν μ θετικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\alpha\beta\gamma\ldots\lambda\leqslant\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda}{\mu}\right)^\mu.$$

'Η ἰσότης ὑφίσταται, ἐὰν $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\lambda$.

1446. Ἐὰν x_1 εἶναι ἕνας θετικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$1+x_1 \geqslant 2\sqrt{x_1}.$$

Γενικῶς: Ἐὰν $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\ldots(1+x_\nu) \geqslant 2^\nu \sqrt{x_1x_2x_3\ldots x_\nu}.$$

Εἰς ποίαν περίπτωσιν ὑφίσταται ἡ ἰσότης;

1447. Ἐὰν α, β, γ εἶναι τρεῖς θετικοὶ καὶ ἄνισοι ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\alpha+\beta+\gamma<\sqrt{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$.

Τί θὰ συμβῇ, ἐὰν $\alpha=\beta=\gamma$;

1448. Ἐὰν $\alpha \geqslant -\frac{1}{4}$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\alpha} \leqslant 1+\alpha.$$

Ἐξ αὐτοῦ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι μὲ $-\frac{1}{4}$, θὰ εἶναι

$$\sqrt{4\alpha+1}+\sqrt{4\beta+1}+\sqrt{4\gamma+1} \leqslant 3+2(\alpha+\beta+\gamma).$$

Εἰς ποίαν περίπτωσιν ὑφίσταται ἡ ἰσότης;

Νὰ ἐξετασθῇ ἡ ἰδιαιτέρα περίπτωσις $\alpha+\beta+\gamma=1$.

1449. Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ ἀκέραιοι, ἢ κλασματικοὶ καὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha<\beta$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ἄπειρον πλῆθος συστημάτων ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ καὶ τοιούτων, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha<\frac{2\lambda+1}{2\mu+1}<\frac{2\lambda+1}{2\mu}<\beta$.

Ἐφαρμογή: $\alpha=10$, $\beta=11$.

1450. Οἱ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{A}{B}$ εἶναι δύο λόγοι τοιοῦτοι, ὥστε $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{A}{B}$. Νὰ ταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους οἱ λόγοι

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{A}{B},\ \frac{\nu\alpha+A}{\nu\beta+B},\ \frac{\alpha+\nu A}{\beta+\nu B}$$

ὅπου ὁ ν εἶναι τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός.

1451. Ἐὰν x_1, x_2, x_3, x_4 εἶναι τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geqslant (x_1+x_2)(x_3+x_4).$$

Εἰς ποίαν περίπτωσιν ὑφίσταται ἡ ἰσότης; Νὰ γενικευθῇ ἡ πρότασις εἰς τὴν περίπτωσιν 2ν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots x_{2\nu}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

1. Προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

287. Στοιχεῖα ἑνὸς προβλήματος. Εἰς προηγούμενον κεφάλαιον ἐμάθομεν νὰ λύωμεν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως δὲν θὰ συναντήσωμεν ποτὲ ἐξισώσεις, ἀλλὰ προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων· διότι κάθε πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τὴν σχέσιν ἢ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ τῶν ἀγνώστων του.

Τὰ δεδομένα ἑνὸς προβλήματος εἶναι ἀριθμοὶ ἢ ποσότητες γνωσταί, καὶ οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος ἢ τὰ ζητούμενα αὐτοῦ, εἶναι ἀριθμοὶ ἢ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος:

Π. χ. εἰς τὸ πρόβλημα :

Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 15 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ ἐλαττωθὲν κατὰ 9, ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι : τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς 15, τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὁ ἀριθμὸς 9.

Ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων ἑνὸς προβλήματος λέγεται λύσις τοῦ προβλήματος.

Ἐπειδὴ κάθε πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μὲ μίαν ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις, ἀναλόγως τῶν ἀγνώστων, ποὺ περιέχει, ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν, πῶς εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν λύσιν αὐτοῦ.

288. Πρόβλημα Ι. *Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δι-*

πλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 15, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ ἐλαττωθὲν κατὰ 9.

Λύσις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, τὸ διπλάσιόν του θὰ παρασταθῇ μὲ $2x$ καὶ τὸ τριπλάσιόν του θὰ παρασταθῇ μὲ $3x$.

Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ εἶναι

$$\text{διπλάσιον ἀριθμοῦ} + 15 = \text{τριπλάσιον ἀριθμοῦ} - 9,$$

$$\text{ἢ} \quad 2x + 15 = 3x - 9.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$2x - 3x = -15 - 9 \quad \text{ἢ} \quad -x = -24, \quad \text{ἢ} \quad x = 24.$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 24.

289. Πρόβλημα II. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τριῶν προσώπων εἶναι 86 ἔτη. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία ἑκάστου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ δεύτερος ἔχει διπλασίαν ἡλικίαν τοῦ πρώτου καὶ ὅτι ὁ τρίτος εἶναι 14 ἔτη μικρότερος τοῦ δευτέρου.*

Λύσις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἡλικίαν τοῦ πρώτου, ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου θὰ παρασταθῇ μὲ $2x$ καὶ τοῦ τρίτου μὲ $2x-14$.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἡλικιῶν εἶναι 86 ἔτη, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x+2x+(2x-14)=86$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$x+2x+2x=86+14 \quad \text{ἢ} \quad 5x=100 \quad \text{ἄρα} \quad x=\frac{100}{5}=20.$$

Ὥστε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου εἶναι 20 ἔτη, τοῦ δευτέρου 40 ἔτη καὶ τοῦ τρίτου $40-14=26$ ἔτη. Πράγματι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν τριῶν αὐτῶν προσώπων εἶναι $20+40+26=86$ ἔτη.

290. Λύσις ἑνὸς προβλήματος. Ἀπὸ τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα συνάγομεν, ὅτι ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος περιλαμβάνει γενικῶς:

1ον. Τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων.

2ον. Τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως (ἢ τῶν ἐξισώσεων) τοῦ προβλήματος.

3ον. Τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (ἢ τῶν ἐξισώσεων).

4ον. Τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ προβλήματος καὶ τὴν διερεύνησιν αὐτοῦ.

1ον. Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου. Γενικῶς ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος καθορίζει ποῖοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος.

Π. χ. Εἰς τὸ πρόβλημα I (§ 288) ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος λέγει: «Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου . . .». Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ἄγνωστος εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός.

Ἐνίοτε ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου γίνεται διαφόρως.

Π. χ. Εἰς τὸ πρόβλημα: «Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅτι . . .» δὲν λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὸν ζητούμενον διψήφιον ἀριθμόν,

ἀλλὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, διότι εἰς τὴν πραγματικότητα ὑπάρχουν δύο ἄγνωστοι: τὸ ψηφίον τῶν μονάδων καὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν μὲ τὸ x τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τότε τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων θὰ παρασταθῇ μὲ $3x$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ παρασταθῇ μὲ $3x \cdot 10+x$ ἢ μὲ $31x$.

2ον. Εὕρεσις τῆς ἐξισώσεως ἑνὸς προβλήματος. Ἐπειδὴ ἡ ποικιλία τῶν προβλημάτων εἶναι μεγάλη, δὲν ὑπάρχει γενικὸς κανών, ὁ ὁποῖος νὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ νὰ εὑρίσκωμεν ἀμέσως τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς προβλήματος.

Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὴν κάτωθι πορείαν πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος.

Ἐξετάζομεν μετὰ προσοχῆς τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη, δηλ. ὅτι εὑρήκαμεν τὸν ἄγνωστον τοῦ προβλήματος. Σημειώνομεν ἔπειτα τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ποὺ συνδέουν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος μὲ τὸν ἄγνωστον κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὡς νὰ ἠθέλαμεν νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ὅτι ὁ ἐκλεγεὶς ἄγνωστος ἱκανοποιεῖ τοὺς ὅρους τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος. Ἡ ἰσότης, τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἶναι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Ὅταν σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, τότε ἡ λύσις του ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεώς του.

3ον. Λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος. Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος γίνεται, ὅπως καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων.

4ον. Ἐπαλήθευσις καὶ διερεύνησις τοῦ προβλήματος. Ἐὰν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι ἀριθμοί, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις τῆς ἐξισώσεως ἱκανοποιεῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος ἢ ἀόριστος καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Ἐὰν τὰ δεδομένα ἑνὸς προβλήματος παρίστανται μὲ γράμματα ἢ ἐξαρτῶνται ἀπὸ μίαν παράμετρον, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος, ὅπως θὰ δείξωμεν κατωτέρω.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθοῦμεν διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.

291. Πρόβλημα III. *Τρία πρόσωπα Α, Β, Γ διενεμήθησαν ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Ὁ Α ἔλαβε τὸ* $\frac{1}{5}$ *αὐτοῦ καὶ 100 δραχ. ἀκόμη, ὁ*

B ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ καὶ 90 δραχ. ἀκόμη καὶ ὁ Γ ἔλαβε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ καὶ 70 δραχ. ἀκόμη. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἦτο τὸ διανεμηθὲν ποσὸν καὶ πόσα ἔλαβε κάθε πρόσωπον.

Λύσις: Ἔστω, ὅτι τὸ χρηματικὸν ποσὸν ἦτο x δραχμαί. Ὁ A ἔλαβε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ποσοῦ καὶ 100 δραχ. ἀκόμη, δηλ. ἔλαβε $\frac{x}{5}+100$ δραχ. Ὁ B ἔλαβε $\frac{x}{3}+90$ δραχ. καὶ ὁ Γ ἔλαβε $\frac{x}{4}+70$ δραχ.

Ἐπειδὴ τὰ τρία μερίδια ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸ διανεμηθὲν ποσὸν x, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{x}{5}+100\right)+\left(\frac{x}{3}+90\right)+\left(\frac{x}{4}+70\right)=x.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐξαλείφομεν τὰς παρενθέσεις καὶ τοὺς παρονομαστὰς καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν $12x+6000+20x+5400+15x+4200=60x$

$$12x+20x+15x-60x=-6000-5400-4200$$

ἢ $-13x=-15600$ ἢ $13x=15600$· ἄρα $x=\frac{15600}{13}=1200.$

Ὥστε τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἦτο 1200 δραχ.

Ὁ A ἔλαβε $1200\cdot\frac{1}{5}+100=340$ δραχ.

Ὁ B ἔλαβε $1200\cdot\frac{1}{3}+90=490$ δραχ.

Ὁ Γ ἔλαβε $1200\cdot\frac{1}{4}+70=370$ δραχ.

292. Πρόβλημα IV. *Ἕνας ἐχώρισεν ἕνα κεφάλαιον 48000 δραχ. εἰς δύο μέρη καὶ ἐτόκισε τὸ πρῶτον μέρος πρὸς 6 % καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4 %· ἔλαβε δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο κεφάλαια τόσον ἐτήσιον τόκον, ὅσον θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἐτόκιζε ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιόν του πρὸς 5,5 %. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη τοῦ κεφαλαίου.*

Λύσις: Ἔστω, ὅτι τὸ ἕνα μέρος τοῦ κεφαλαίου εἶναι x δραχμαί· τότε τὸ ἄλλο μέρος θὰ εἶναι $48000-x$ δραχ.

Αἱ x δραχμαὶ τοκιζόμεναι πρὸς 6 % φέρουν, εἰς 1 ἔτος, τόκον

$$\frac{x\cdot 6\cdot 1}{100} \text{ δραχ. ἢ } \frac{6x}{100}.$$

Αἱ $48000-x$ δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 4 % φέρουν, εἰς 1 ἔτος, τόκον

$$\frac{(48000-x)\cdot 4\cdot 1}{100} \text{ δραχ.}$$

Αἱ 48000 δραχ. τοκιζόμεναι πρὸς 5,5 % φέρουν, εἰς 1 ἔτος, τόκον

$$\frac{48000\cdot 5{,}5\cdot 1}{100} \text{ δραχ.}$$

Ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, οἱ τόκοι τῶν δύο μερῶν ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{6x}{100}+\frac{(48000-x)4}{100}=\frac{48000\cdot 5{,}5}{100}.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$6x+(48000-x)4=48000\cdot 5{,}5$ ἢ $6x+192000-4x=264000$

ἢ $6x-4x=-192000+264000$ ἢ $2x=72000$ ἄρα $x=36000$.

Ὥστε τὸ ἕνα μέρος ἦτο 36000 δρχ. καὶ τὸ ἄλλο

48000—36000=12000 δρχ.

293. Πρόβλημα V. *Ἕνα κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ ζυγίζει εἰς τὸν ἀέρα 1160 γραμμάρια· ὅταν τὸ κρᾶμα αὐτὸ βυθισθῇ εἰς τὸ ὕδωρ, ζυγίζει μόνον 1040 γραμ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου καὶ τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ, ποὺ περιέχονται εἰς τὸ κρᾶμα, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου εἶναι 10,47 καὶ τοῦ χαλκοῦ 8,85.*

Λύσις: Γνωρίζομεν, ὅτι κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον βυθίζεται εἰς τὸ ὕδωρ χάνει ἀπὸ τὸ βάρος του ἕνα μέρος ἴσον μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος (Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους).

Τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος εἶναι 1160 γρ.—1040 γρ.=120 γρμ.

Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κράματος εἶναι 120 κυβικὰ ἑκατοστόμετρα.

Ἔστω x γραμ. τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου· τότε τὸ βάρος τοῦ χαλκοῦ θὰ εἶναι 1160—x γραμ.

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀργύρου εἶναι ἴσος μὲ $\frac{\text{βάρος}}{\text{ειδικ. βάρος}}$, δηλ. μὲ $\frac{x}{10{,}47}$. Ὁ ὄγκος τοῦ χαλκοῦ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1160-x}{8{,}85}$. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν μετάλλων εἶναι ἴσον μὲ 120 κ. ἑκ., θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{10{,}47}+\frac{1160-x}{8{,}85}=120.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$8{,}85x+(1160-x)10{,}47=120\cdot 10{,}47\cdot 8{,}85$$

ἢ $8{,}85x+12145{,}20-10{,}47x=11119{,}14$ ἢ $8{,}85x-10{,}47x=-12145{,}2+11119{,}14$

ἢ $-1{,}62x=-1026{,}06$ ἢ $162x=102606$, ἄρα $x=\frac{102606}{162}=633{,}370$ γραμ.

Ὥστε τὸ βάρος τοῦ ἀργύρου ἦτο 633,370 γραμ. καὶ τοῦ χαλκοῦ

1160—633,370=526,63 γραμ.

294. Πρόβλημα VI. *Δύο ποδηλάται A καὶ B ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων K καὶ Λ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 195 χιλιόμετρα, καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ἡ ταχύτης τοῦ B εἶναι κατὰ 3 χιλιόμετρα μικροτέρα τῶν $^{9}/_{10}$ τῆς ταχύτητος τοῦ A. Οἱ ποδηλάται συνηντήθησαν μετὰ 6 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των. Νὰ ὑπολογισθοῦν*

αἱ ταχύτητες τῶν ποδηλατῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ Β ἐστάθμευσε καθ' ὁδὸν ἐπὶ μίαν ὥραν.

Λύσις: Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ Α (εἰς χιλιόμετρα—ὥρα). Τότε ἡ ταχύτης τοῦ Β θὰ εἶναι $\frac{9x}{10}-3$ χιλιόμετρα.

Κ Σ Λ

x $\frac{9x}{10}-3$

Ὁ Α, ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύῃ x χιλιόμετρα, εἰς 6 ὥρας θὰ διανύσῃ $x \cdot 6$ ἢ $6x$ χιλιόμετρα. Ὁ ποδηλάτης Β ἐστάθμευσεν ἐπὶ μίαν ὥραν καὶ ἑπομένως ἐκινήθη ἐπὶ 1 ὥραν ὀλιγώτερον, δηλ. ἐκινήθη ἐπὶ 5 ὥρας· ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν διανύῃ $\frac{9x}{10}-3$ χιλμ., εἰς 5 ὥρας θὰ διανύσῃ

$$\left(\frac{9x}{10}-3\right)5 \text{ χιλμ.}$$

Ὅταν οἱ δύο ποδηλάται συνηντήθησαν εἰς τὸ σημεῖον Σ, εἶχον διανύσει ὅλην τὴν ἀπόστασιν τῶν 195 χιλμ., ποὺ ἐχώριζε τὰς δύο πόλεις Κ καὶ Λ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$6x+\left(\frac{9x}{10}-3\right)5=195.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς

$$6x+\frac{45x}{10}-15=195 \quad \text{ἢ} \quad 60x+45x-150=1950$$

$$\text{ἢ} \quad 60x+45x=150+1950 \quad \text{ἢ} \quad 105x=2100$$

$$\text{ἄρα} \quad x=\frac{2100}{105}=20 \text{ χιλιόμετρα.}$$

Ὥστε ἡ ταχύτης τοῦ Α ἦτο 20 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ τοῦ Β ἦτο $\frac{9}{10}\cdot 20-3=15$ χιλιόμετρα τὴν ὥραν.

295. Πρόβλημα VII. *(Γεωμετρίας). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ΒΓ=α, ΑΒ=ΑΓ=β. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, νὰ ὁρίζῃ ἕνα τραπέζιον ΔΒΓΕ, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι τριπλασία τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.*

Λύσις: Τὸ ζητούμενον σημεῖον Δ θὰ ὁρισθῇ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀπόστασίν του ΑΔ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α.

Ἔστω λοιπόν, ὅτι ΑΔ=x.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

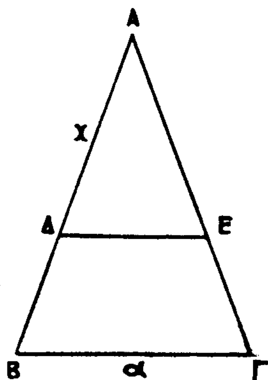
περίμετρος τραπεζ. ΔΒΓΕ=3 περίμ. τριγ. ΑΔΕ

ἢ ΔΒ+ΒΓ+ΓΕ+ΕΔ=3(ΑΔ+ΔΕ+ΕΑ) (1)

Ὑπολογίζομεν τὰς πλευρὰς τοῦ τραπεζίου καὶ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν α, β καὶ x.

Ἐδῶ εἶναι ΔΒ=ΕΓ=β—x, ΒΓ=α, ΑΔ=ΑΕ=x.

Ὑπολογίζομεν τὴν πλευρὰν ΔΕ. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ἔχομεν $\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ ἢ $\frac{ΔΕ}{α} = \frac{x}{β}$ ἢ $ΔΕ = \frac{αx}{β}$.



Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΔΒ, ΒΓ, ... μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$(β-x)+α+(β-x)+\frac{αx}{β} = 3\left(x+\frac{αx}{β}+x\right).$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$β-x+α+β-x+\frac{αx}{β} = 3x+\frac{3αx}{β}+3x$$

ἢ $β^2-βx+αβ+β^2-βx+αx=3βx+3αx+3βx$ ἢ

$-βx-βx+αx-3βx-3αx-3βx=-β^2-αβ-β^2$

ἢ $-8βx-2αx=-2β^2-αβ$

ἢ $8βx+2αx=β(2β+α)$

ἢ $2x(4β+α)=β(2β+α)$.

Ἐπειδὴ τὸ $4β+α$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, ἔχομεν $x = \frac{β(2β+α)}{2(4β+α)}$.

Ἀσκήσεις: 1452, 1454, 1455, 1457, 1460.

296. Προβλήματα ἀδύνατα, προβλήματα ἀόριστα. Τὰ προηγούμενα προβλήματα εἶχον ἐκλεγῆ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἔχουν μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον.

Τὰ κατωτέρω παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν, πῶς ἕνα πρόβλημα τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύναται νὰ εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν, δηλ. νὰ μὴ ἔχῃ καμμίαν λύσιν, ἢ νὰ εἶναι ἀ ό ρ ι σ τ ο ν, δηλ. νὰ ἔχῃ ἀπείρους λύσεις (§ 290, 4ον).

297. Πρόβλημα I. *Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἥμισύ του καὶ τὸ τρίτον του εἶναι ἴσον μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἕκτου τοῦ ἀριθμοῦ καὶ μὲ 12 ἀκόμη.*

Λύσις: Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3} = \frac{5x}{6}+12 \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$3x+2x=5x+72$ ἢ $3x+2x-5x=72$ ἢ $0x=72$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος· ἄρα καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν.

298. Πρόβλημα II. *Δώδεκα ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐξώδευσαν ἐν ὅλῳ εἰς μίαν ἐκδρομὴν 870 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ*

πόσαι αἱ γυναῖκες, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐξώδευσε 70 δρχ. καὶ ἑκάστη τῶν γυναικῶν 50 δρχ.

Λύσις: Ἔστω, ὅτι οἱ ἄνδρες ἦσαν x· τότε αἱ γυναῖκες θὰ ἦσαν $12-x$.

Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐξώδευσε 70 δρχ., οἱ x ἄνδρες ἐξώδευσαν $70 \cdot x$ ἢ $70x$ δρχ.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γυναικῶν ἐξώδευσε 50 δρχ., αἱ $12-x$ γυναῖκες ἐξώδευσαν $50(12-x)$ δρχ.

Ἐπειδὴ τὰ ἔξοδα τῶν ἀνδρῶν καὶ τῶν γυναικῶν ἦσαν 870 δρχ., ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $$70x+50(12-x)=870.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν
$$70x+600-50x=870 \quad ἢ \quad 70x-50x=-600+870$$
$$ἢ \quad 20x=270 \quad ἄρα \quad x=\frac{270}{20}=13\frac{1}{2}.$$

Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀπαράδεκτος, διότι, κατὰ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος, ἡ τιμὴ τοῦ x ἔπρεπε νὰ εἶναι ἀ κ ε ρ α ί α. Τὸ δοθὲν λοιπὸν πρόβλημα εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν.

299. Πρόβλημα III. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 30 μέτρα καὶ ὅτι, ἐὰν αὐξήσωμεν κατὰ 5 μέτρα τὴν βάσιν του καὶ κατὰ 4 μέτρα τὸ ὕψος του τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐξάνει κατὰ 100 τετρ. μέτρα.*

Λύσις: Ἔστω, ὅτι ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι x μέτρα· τότε τὸ ὕψος του θὰ εἶναι $30-x$ μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $x(30-x)$ τετρ. μέτρα.

Ἐὰν ἡ βάσις του γίνῃ $x+5$ μέτρα καὶ τὸ ὕψος του $(30-x)+4$ ἢ $34-x$ μέτρα, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $(x+5)(34-x)$ τετρ. μέτρα.

Ἐπειδὴ τὸ δεύτερον ἐμβαδὸν εἶναι κατὰ 100 τετρ. μέτρα μεγαλύτερον τοῦ πρώτου, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν
$$(x+5)(34-x)=x(30-x)+100.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν
$$34x+170-x^2-5x=30x-x^2+100 \quad ἢ \quad 34x-x^2-5x-30x+x^2=-170+100$$
$$ἢ \quad -x=-70 \quad ἢ \quad x=70.$$

Εὑρήκαμεν, ὅτι ἡ βάσις του εἶναι 70 μέτρα· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀπαράδεκτον, διότι κατὰ τὸ πρόβλημα ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἔπρεπε νὰ ἔχουν ἄθροισμα 30 μέτρα, δηλ. ἔπρεπε ἡ τιμὴ τοῦ x, δηλ. ἡ βάσις, νὰ ἦτο μικροτέρα τῶν 30 μέτρων. Τὸ πρόβλημα εἶναι λοιπὸν ἀ δ ύ ν α τ ο ν.

Ἐὰν ὑπελογίζαμεν τὸ ὕψος, θὰ εὑρίσκομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ $30-70=-40$ μέτρα καὶ ἡ ἀ ρ ν η τ ι κ ὴ αὐτὴ λύσις θὰ ἐδείκνυε ἀκόμη, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

300. Πρόβλημα IV. *Εἰς τὰ $\frac{5}{6}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν 2. Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ*

ηὐξημένου κατὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ ἠλαττωμένου κατὰ 3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι εἶναι ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 9 καὶ περιέχεται μεταξὺ τοῦ 50 καὶ 80.

Λύσις: Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{5x}{6}+2\right)-\frac{1}{2}(x+6)=\frac{1}{3}(x-3) \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\frac{5x}{6}+2-\frac{x}{2}-3=\frac{x}{3}-1 \quad ἢ \quad 5x+12-3x-18=2x-6$$

$ἢ \quad 5x-3x-2x=-12+18-6 \quad ἢ \quad 0x=0$ (ἀ ο ρ ι σ τ ί α).

Ἡ ἐξίσωσις $0x=0$ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x.

Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ πρόβλημα, διότι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 καὶ να περιέχεται μεταξὺ τοῦ 50 καὶ 80. Ὥστε τὸ πρόβλημα ἔχει μόνον τὰς λύσεις

$$x=54, \quad x=63, \quad x=72.$$

301. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα παρατηροῦμεν, ὅτι ἕνα πρόβλημα δύναται νὰ εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν, **ὄχι μόνον**, ὅταν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, δὲν ἐκπληροῖ ὡρισμένους ὅρους, οἱ ὁποῖοι πηγάζουν ἀπὸ αὐτὴν τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος· π. χ. νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἀκεραία, θετική, ἢ νὰ περιέχεται μεταξὺ ὡρισμένων ὁρίων κλπ.

302. Ἐξήγησις τῶν ἀρνητικῶν λύσεων. Ὅταν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἑνὸς προβλήματος καὶ εὕρωμεν μίαν ἀρνητικὴν λύσιν, συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Πολλάκις ὅμως δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς λύσιν τοῦ προβλήματος, τὴν ἀρνητικὴν αὐτὴν λύσιν, ἂν τροποποιήσωμεν τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος.

303. Πρόβλημα I. *Πατήρ τις εἶναι 56 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 30 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;*

Λύσις: Ἔστω, ὅτι θὰ συμβῇ αὐτὸ μετὰ x ἔτη. Μετὰ x ἔτη ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $56+x$ ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του $30+x$.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\quad (56+x)=2(30+x) \quad (1)$

Λύομεν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $x=-4$.

Ἡ ἀρνητικὴ λύσις $x=-4$ δεικνύει, ὅτι τὸ πρόβλημα, ὅπως ἐδόθη, εἶναι ἀδύνατον, δηλ. ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς δὲν θὰ εἶναι ποτέ, ε ἰ ς τ ὸ μ έ λ λ ο ν, διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

Ἂν ὅμως παραδεχθῶμεν νὰ παριστάνωμεν μὲ θετικὸν ἀριθμὸν τὸν μέλλοντα χρόνον καὶ μὲ ἀρνητικὸν τὸν παρελθόντα χρόνον, ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ δώσῃ λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα, ἀρκεῖ νὰ τροποποιήσωμεν τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ὡς ἑξῆς:

Πατήρ τις εἶναι 56 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 30. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;

Ἐπειδὴ τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχει τὴν λύσιν $x=-4$, συνάγομεν, ὅτι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ πρὸ 4 ἐτῶν. Πράγματι· πρὸ 4 ἐτῶν ὁ πατήρ του ἦτο 52 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του 26 ἐτῶν.

304. Παρατήρησις. Ὅταν ὁ ἄγνωστος ἑνὸς προβλήματος εἶναι ἕνα μέγεθος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ μετρηθῇ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκλέγωμεν τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἀγνώστου μεγέθους.

Κατόπιν αὐτοῦ κάθε λύσις ἀρνητικὴ δεικνύει, ὅτι τὸ ἄγνωστον μέγεθος πρέπει νὰ ληφθῇ κατ' ἀντίθετον φορὰν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὑπεθέσαμεν κατὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος.

305. Πρόβλημα ΙΙ. *Ἕνας ἔμπορος, ὁ ὁποῖος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον του 15000 δρχ., κάμνει δύο ἐμπορικὰς πράξεις. Κατὰ τὴν πρώτην πρᾶξιν εἰσπράττει τὸ τριπλάσιον τῶν ὅσων μένουν εἰς τὸ ταμεῖον του μετὰ τὴν δευτέραν πρᾶξιν. Κατὰ τὴν δευτέραν πρᾶξιν ἐπλήρωσεν 22000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τί ποσὸν εἰσέπραξεν ἢ ἐπλήρωσε τελικῶς;*

Λύσις: Ἔστω x τὸ ποσόν, ποὺ εἰσέπραξε ἢ ἐπλήρωσε· ὁ x θὰ παριστάνῃ εἴσπραξιν, ἐὰν εἶναι θετικὸς καὶ πληρωμήν, ἐὰν εἶναι ἀρνητικός. Εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας πράξεως τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ $15000+x$.

Κατὰ τὴν πρώτην πρᾶξιν εἰσέπραξε $3(15000+x)$ καὶ ἑπομένως τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ $15000+3(15000+x)$ δρχ. Ὅταν πληρώσῃ 22000 δρχ. θὰ μείνουν εἰς τὸ ταμεῖον $15000+3(15000+x)-22000$ δρχ.

Ἐπειδὴ τὸ ποσὸν αὐτὸ παριστάνει τὰ χρήματα, ποὺ ἔμειναν εἰς τὸ ταμεῖον μετὰ τὴν δευτέραν πρᾶξιν, δηλ. παριστάνει τὸ ποσὸν $15000+x$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$15000+3(15000+x)-22000=15000+x.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$15000+45000+3x-22000=15000+x$$

ἢ $3x-x=-15000-45000+22000+15000$

ἢ $2x=-23000$ ἄρα $x=-11500.$

Ὥστε τελικῶς ὁ ἔμπορος ἐπλήρωσεν 11500 δρχ.

Ἀσκήσεις: ***1461, 1463, 1466, 1469, 1472, 1475, 1480, 1487, 1490, 1492, 1500, 1503, 1505, 1509, 1512, 1517, 1521.***

2. Διερεύνησις γενικῶν προβλημάτων

306. Διερεύνησις γενικῶν προβλημάτων. Ὅταν τὰ δεδομένα ἑνὸς προβλήματος εἶναι ἐγγράμματα, δηλ. ὅταν τὸ πρόβλημα εἶναι γενικόν, εἶναι ἀνάγκη νὰ διερευνῶμεν τὸ πρόβλημα αὐτό. Δηλ. πρέπει νὰ ζητοῦμεν τὰς διαφόρους λύσεις, τὰς ὁποίας δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα, ἂν κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ νὰ ὁρίζωμεν τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχουν τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ διὰ τὸ πρόβλημα.

307. Πρόβλημα 1ον. *Πατήρ τις εἶναι α ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.*

Λύσις: Ἔστω, ὅτι θὰ συμβῇ αὐτὸ μετὰ x ἔτη. Μετὰ x ἔτη ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $\alpha+x$ ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του $\beta+x$. Ἐπειδὴ μετὰ x ἔτη ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ τριπλασίαν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha+x=3(\beta+x).$$

Λύομεν αὐτὴν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\alpha+x=3\beta+3x \quad ἢ \quad x-3x=-\alpha+3\beta$$

$$ἢ \quad -2x=-\alpha+3\beta \quad ἢ \quad 2x=\alpha-3\beta \quad ἄρα \quad x=\frac{\alpha-3\beta}{2} \qquad (1)$$

Διερεύνησις: *I.* Ἐὰν $\alpha-3\beta>0$, δηλ. ἐὰν $\alpha>3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετικὴ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον.

II. Ἐὰν $\alpha-3\beta<0$, δηλ. ἐὰν $\alpha<3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀρνητικὴ καὶ τὸ ζητούμενον ἔγινε εἰς τὸ παρελθόν.

III Ἐὰν $\alpha-3\beta=0$, δηλ. ἐὰν $\alpha=3\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι μηδὲν καὶ ἐπομένως ἡ σημερινὴ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

308. Πρόβλημα 2ον. *Πόσας ὀκάδας ἐλαίου τῶν μ δραχμῶν κατ' ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν μὲ ἔλαιον τῶν 8 δραχμῶν κατ' ὀκᾶν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα 80 ὀκάδων ἐλαίου, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῆται πρὸς μ—6 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν; Νὰ γίνῃ διερεύνησις ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τοῦ μ.*

Ἔστω, ὅτι πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν x ὀκάδας ἀπὸ τὸ ἔλαιον τῶν μ δραχμῶν· τότε ἀπὸ τὸ ἔλαιον τῶν 8 δραχμῶν κατ' ὀκᾶν θὰ ἀναμείξωμεν $80-x$ ὀκάδας. Ἡ ἀξία τῶν x ὀκάδων εἶναι μx δραχμάς· ἡ ἀξία τῶν $80-x$ ὀκάδων εἶναι $8(80-x)$ δραχμὰς καὶ ἡ ἀξία τοῦ μείγματος εἶναι $80(\mu-6)$ δραχμάς. Πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι $\mu x+8(80-x)=80(\mu-6)$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν. Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\mu x+640-8x=80\mu-480 \quad ἢ \quad \mu x-8x=-640+80\mu-480$$

$$ἢ \quad (\mu-8)x=80\mu-1120 \qquad (1)$$

Διερεύνησις: *I.* Ἐὰν $\mu-8>0$, δηλ. ἐὰν $\mu>8$, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{80\mu-1120}{\mu-8}.$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως παραδεκτὴ ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ 80. Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$0<\frac{80\mu-1120}{\mu-8}<80.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\frac{80\mu-1120}{\mu-8}>0$ (2) καὶ $\frac{80\mu-1120}{\mu-8}<80$ (3)

Ἡ ἀνισότης (2) εἶναι ἰσοδύναμος (§ 285) μὲ τὴν

$$(\mu-8)(80\mu-1120)>0 \quad ἢ \quad (\mu-8)(\mu-14)>0$$

καὶ ἀληθεύει διὰ $\mu<8$ καὶ διὰ $\mu>14$.

Ἡ ἀνισότης (3) γράφεται

$$\frac{80\mu-1120}{\mu-8}-80<0 \quad ἢ \quad \frac{80\mu-1120-80(\mu-8)}{\mu-8}<0$$

$$ἢ \quad \frac{-480}{\mu-8}<0 \quad ἢ \quad \frac{480}{\mu-8}>0.$$

Ἡ τελευταία ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$480(\mu-8)>0 \quad ἢ \quad \mu-8>0,$$ ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $\mu>8$.

Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 286) εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ἀνισότητες (2) καὶ (3) συναληθεύουν διὰ $\mu>14$.

$$-\infty \ldots\ldots 8 \ldots\ldots 14 \ldots\ldots +\infty.$$

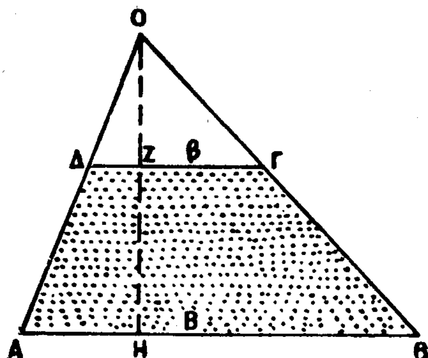
Ὥστε διὰ νὰ εἶναι παραδεκτὴ ἡ τιμὴ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι $\mu>14$.

II. Ἐὰν $\mu-8=0$, δηλ. ἐὰν $\mu=8$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$0\cdot x=-480 \quad (\text{ἀδύνατος}).$$

Πράγματι· ἐὰν ἀναμείξωμεν ἔλαιον τῶν 8 δρχ. κατ' ὀκᾶν μὲ ἔλαιον τῶν 8 δρχ., δὲν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μεῖγμα τῶν $\mu-6=8-6=2$ δρχ.

309. Πρόβλημα 3ον. *Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι Β, β καὶ τὸ ὕψος του υ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ μεγάλου τριγώνου, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἂν προεκτείνωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των.*



Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί, προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θέτομεν ΟΗ$=x$, ὁπότε ΟΖ$=x-υ$.

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΔΓ καὶ ΟΑΒ ἔχομεν

$$\frac{OZ}{OH}=\frac{\Delta\Gamma}{AB} \quad ἢ \quad \frac{x-\upsilon}{x}=\frac{\beta}{B}.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν.

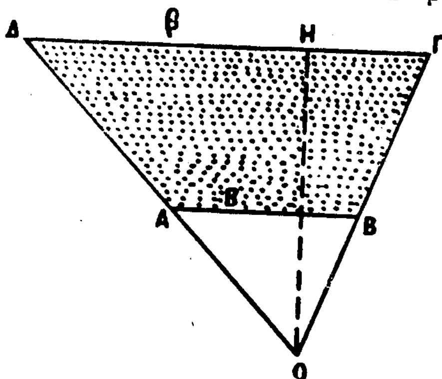
Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$B(x-υ)=βx \quad ἢ \quad Bx-Bυ=βx$$

$$ἢ \quad Bx-βx=Bυ· \quad ἢ \quad (B-β)x=Bυ \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $B-β\neq0$ (ἰδιότης τοῦ τραπεζίου), διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) διὰ $B-β$ καὶ ἔχομεν $x=\frac{Bυ}{B-β}$ (2)

Διερεύνησις. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅλα τὰ μεγέθη θεωροῦνται θετικά. Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ x, ποὺ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2), νὰ εἶναι θετική. Ἐδῶ τὸ γινόμενον Bυ εἶναι θετικόν· ἐπομένως τὸ σημεῖον τοῦ κλάσματος $\frac{Bυ}{B-β}$, δηλ. ἡ τιμὴ τοῦ x, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ παρονομαστοῦ B—β.



I. Ἐὰν $B-β>0$, δηλ. ἐὰν $B>β$, ὁ παρονομαστὴς εἶναι θετικός, ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετικὴ καὶ ἐπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ Ο κεῖται ἄνω τῆς ΑΒ.

II. Ἐὰν $B-β<0$, δηλ. ἐὰν $B<β$, ὁ παρονομαστὴς B—β εἶναι ἀρνητικός, ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι ἀρνητική. Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν μίαν ἔκφρασιν εἰς τὴν λύσιν αὐτήν, ἂν θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ο κεῖται κάτωθι τῆς ΑΒ.

III. Ἐὰν $B-β=0$, δηλ. ἐὰν $B=β$, ἡ τιμὴ τοῦ x γίνεται ∞ καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Πράγματι· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ τραπέζιον γίνεται ἕνα παραλληλόγραμμον καὶ αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ, ὡς παράλληλοι, δὲν συναντῶνται ποτέ.

Ἀσκήσεις: 1600, 1602, 1605, 1607, 1609, 1614, 1618, 1621, 1625, 1626, 1627.

Ἀσκήσεις

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1452. (483). **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ μεῖον 19.**

1453. (484). **Πατήρ τις εἶναι 58 ἐτῶν καὶ ἔχει υἱὸν 27 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ διπλασίαν ἡλικίαν τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του;**

1454. (485). **Πατήρ τις εἶναι κατὰ 25 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 6 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των ἦτο 43 ἐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ.**

1455. (486). Ἔμπορος εἶχε δύο τεμάχια ὑφάσματος. Τὸ πρῶτον ἦτο τριπλάσιον τοῦ δευτέρου. Ἀπὸ τὸ πρῶτον ἐπώλησε 36 μέτρα καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 4 μέτρα καὶ οὕτω τὰ τεμάχια ἔγιναν ἴσα κατὰ τὸ μῆκος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τεμαχίου.

1456. (487). Δύο βαρέλια περιέχουν τὴν αὐτὴν ποσότητα οἴνου· ἐξάγομεν 34 ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 80 ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ μένει διπλασία ποσότης οἴνου εἰς τὸ πρῶτον βαρέλιον ἢ εἰς τὸ δεύτερον. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε ἕκαστον βαρέλιον ;

1457. (488). Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ κάμνουν 170;

1458, (489). Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ καὶ κατὰ 8, δίδει τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀγδόου αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 2.

1459. (490) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{6}{17}$, τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$.

1460. (491). Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{29}{42}$ διὰ νὰ γίνῃ τὸ κλάσμα ἴσον μὲ 0,5 ;

1461. (492). Ἕνας πατὴρ εἶναι 27 ἐτῶν καὶ ἡ κόρη του 3 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τῆς κόρης θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ τέταρτον τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός της ;

1462. (493). Πατήρ τις εἶναι 35 ἐτῶν, ὁ υἱός του 15 ἐτῶν καὶ ἡ κόρη του 10 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο τέκνων του ἴσον μὲ $\frac{8}{7}$.

1463. (494). Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 7 ἢ 9 ἀφήνει ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλίκα διαφέρουν κατὰ 4.

1464. (495). Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ τοιοῦτοι ὥστε, τὸ ἥμισυ τοῦ μικροτέρου καὶ τὸ τέταρτον τοῦ μεγαλυτέρου νὰ ἀποτελοῦν τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ μεταξὺ αὐτῶν ἀριθμοῦ.

1465. (496). Ἔμπορος ἔχει ὕφασμα τῶν 80 δρχ. κατὰ μέτρον. Πωλεῖ τὸ ἥμισυ πρὸς 85 δρχ., τὸ τρίτον πρὸς 75 δρχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 90 δρχ. καὶ κερδίζει οὕτω 150 δρχ. Πόσων μέτρων ἦτο τὸ ὕφασμα ;

1466. (497). Ὁ μαθηματικὸς Διόφαντος ἔζησε τὰ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παιδίον, τὸ δωδέκατον αὐτῆς ὡς νεανίας, τὸ ἕβδομον αὐτῆς μετὰ τὸν γάμον του καὶ 5 ἔτη, ὅτε ἀπέκτησε υἱόν, ὅστις ἔζησε τὸ ἥμισυ ἢ ὅσον ὁ πατήρ του· ἔζησε δὲ ἀκόμη 4 ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ του. Πόσα ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος ;

1467. (498). Νὰ χωρισθῇ ὁ 240 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ πηλίκον τῶν μερῶν νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{7}$.

1468. (499). Νά χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 205 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον διαιρεθὲν διὰ τοῦ μικροτέρου, νὰ δίδῃ πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 25.

1469. (500). Εἰς μίαν ἐκδρομὴν οἱ ἄνδρες ἦσαν τριπλάσιοι τῶν γυναικῶν. Μετὰ τὴν ἀναχώρησιν τεσσάρων ἀνδρῶν μετὰ τῶν συζύγων των ἔμειναν ἑπταπλάσιοι ἄνδρες τῶν γυναικῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

1470. (501). Χωρικὴ ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ ὅσα αὐγὰ εἶχε πρὸς 50 λεπτὰ ἕκαστον· ἐπειδὴ ἔσπασαν 3, ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 60 λεπτὰ καὶ δὲν ἐζημιώθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

1471. (502). Χωρικός τις ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα καὶ πόσας ὄρνιθας ἔχει ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς: «Τὰ ζῶα μου ἔχουν ἐν ὅλῳ 30 κεφάλια καὶ 72 πόδια». Πόσα πρόβατα καὶ πόσας ὄρνιθας εἶχεν ὁ χωρικός;

1472. (503). Ἠγόρασέ τις 12 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο κατὰ 25 δρχ. μικροτέρα, θὰ ἠγόραζε μὲ τὸ αὐτὸ ποσὸν 3 πήχεις περισσότερον. Πόσαν ἐτιμᾶτο ὁ πῆχυς;

1473. (504). Ὑπηρέτης λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν 3600 δρχ καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Ἂν διὰ 8 μῆνας ἔλαβε 2740 μόνον δραχμάς, πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ἐνδυμασία;

1474. (505). Δύο ἐργάται εἰργάσθησαν ὁ μὲν πρῶτος ἐπὶ 27 ἡμέρας, ὁ δὲ δεύτερος ἐπὶ 21 ἡμέρας. Ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος κερδίζει 20 δρχ. περισσοτέρας ἡμερησίως ἀπὸ τὸν δεύτερον, ἔλαβεν 810 δρχ. ἐπὶ πλέον τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου.

1475. (506). Μία μητέρα καὶ ἡ κόρη της ἐργάζονται εἰς ἕνα ἐργοστάσιον γυναικείων εἰδῶν. Ἡ μητέρα ἐργάζεται ἐπὶ 60 ἡμέρας καὶ ἡ κόρη ἐπὶ 50 ἡμέρας. Ἡ μητέρα κερδίζει 10 δρχ. ἡμερησίως περισσότερον τῆς κόρης της καὶ ἡ κόρη λαμβάνει 900 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν μητέρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης.

1476. (507). Ἡ χωρητικότης βαρελίου Α ἔχει λόγον $\frac{13}{6}$ πρὸς τὴν χωρητικότητα ἄλλου βαρελίου Β. Ἐὰν τὰ βαρέλια εἶναι πλήρη καὶ ἀφαιρέσωμεν 50 ὀκάδες ἐκ τοῦ Α καὶ 100 ὀκάδες ἐκ τοῦ Β, μένουν εἰς τὸ Α τριπλάσιαι ὀκάδες ἢ εἰς τὸ Β. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἕκαστον βαρέλιον;

1477. (508). Νὰ εὑρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα νὰ διαφέρουν κατὰ 51.

1478. (509). Δύο ἀριθμοὶ διαφέρουν κατὰ 5. Τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεγαλυτέρου κατὰ 100. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

1479. (510). Διψηφίου ἀριθμοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 36. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

1480. (511). Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 12. Ἐὰν ἐλαττωθῇ οὗτος κατὰ 18 προκύπτει ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του εὑρισκόμενος ἀριθμός. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

1481. (512). Ἐδαπάνησέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ ἔμειναν 56 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχεν;

1482. (513). Τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 70. Ὁ δεύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου δίδει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1, ὁ τρίτος διαιρούμενος διὰ τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 3. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

1483. (514). Τρεῖς ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ποσοῦ πλὴν 500 δρχ.· ὁ δεύτερος ἔλαβε τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος τὸ ἥμισυ αὐτοῦ πλὴν 3 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἦτο τὸ ποσὸν καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

1484. (515). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τριῶν προσώπων εἶναι 100 ἔτη. Ἡ ἡλικία τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο ἄλλων καὶ ἡ ἡλικία τοῦ νεωτέρου εἶναι κατὰ 10 ἔτη μικροτέρα τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τῶν τριῶν προσώπων.

1485. (516). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι δύο προσώπων, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου καὶ ὅτι μετὰ 6 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πρώτου.

1486. (517). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τριῶν προσώπων Α, Β, Γ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των εἶναι ἴσον μὲ 59 ἔτη· ὅτι ὁ Β εἶναι κατὰ 3 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ Α καὶ ὁ Γ κατὰ 4 ἔτη μικρότερος τοῦ Α.

1487. (518). Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἔλαβον μέρος 30 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία. Ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν ἦτο ἴσος μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν παιδίων ἦτο τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν μαζί. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδία;

1488. (519). Ἔμπορος ἠγόρασε ἐμπορεύματα, ἀντὶ 3 400 δρχ. Ἐὰν ἐπώλει αὐτὰ πρὸς 3,50 δρχ. τὴν ὀκᾶν, θὰ ἔχανε τόσα, ὅσα ἐκέρδιζε, ἐὰν τὰ ἐπώλει πρὸς 5 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας ἐμπορευμάτων ἠγόρασε;

1489. (520). Ἔμπορος ἐπώλησεν ἕνα ὕφασμα πρὸς 75 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ ἐκέρδισεν οὕτω 900 δρχ. Ἐὰν ἐπώλει τὸ ὕφασμα κατὰ 20 δρχ. εὐθηνότερον θὰ ἐζημιοῦτο 3 000 δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα;

1490. (521). Τὰ ἔσοδα ἑνὸς ἐμπόρου ἐκ μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἀνέρχονται κατ' ἔτος εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον κατέχει εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους, τὰ δὲ ἔξοδά του εἰς τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου. Μετὰ δύο ἔτη ὁ ἔμπορος εἶχε κερδίσει 9 100 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον τοῦ ἐμπόρου.

1491. (522). Ἠγόρασέ τις οἶνον πρὸς 3,20 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔλαιον πρὸς 12 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων τοῦ οἴνου ὑπερβαίνει κατὰ 40 ὀκ.

τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων τοῦ ἐλαίου καὶ τὸ πληρωθὲν ποσὸν διὰ τὸ ἔλαιον ὑπερβαίνει κατὰ 576 δρχ. τὸ πληρωθὲν ποσὸν διὰ τὸν οἶνον. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας οἴνου καὶ ἐλαίου ἠγόρασεν;

1492. (523). Βρύσις γεμίζει μίαν δεξαμενὴν εἰς 3 ὥρας· ἄλλη τὴν γεμίζει εἰς 4 καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν γεμίζουν, ἂν ρέουν καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως;

1493. (524). Κρουνὸς γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας, ἄλλος γεμίζει αὐτὴν εἰς 10 ὥρας καὶ τρίτος ἀδειάζει αὐτὴν εἰς 30 ὥρας. Ἂν καὶ αἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν συγχρόνως, εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

1494. (525). Πατὴρ καὶ υἱὸς σκάπτουν ἕνα ἀγρὸν εἰς 6 ἡμέρας· ὁ πατὴρ μόνος του σκάπτει αὐτὸν εἰς 10 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας σκάπτει αὐτὸν ὁ υἱὸς μόνος του;

1495. (526). Ὁ Α δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἕνα ἔργον εἰς χρόνον δύο φορὰς ὀλιγώτερον ἐκείνου, ποὺ ἐχρειάζετο ὁ Β διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον. Ὁ χρόνος, ποὺ ἐχρειάζετο ὁ Β διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ χρόνου, ποὺ ἐχρειάζετο ὁ Γ διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον. Καὶ οἱ τρεῖς μαζὶ δύνανται νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς 6 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἕκαστος διὰ νὰ ἐκτελέσῃ μόνος του τὸ ἔργον.

1496. (527). Κρουνὸς Α γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 20 ὥρας. Δεύτερος παρέχει εἰς τὴν δεξαμενὴν τετραπλασίαν ποσότητα ὕδατος εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ ἐπὶ 3 ὥρας καὶ οἱ δύο κρουνοί, ἡ δεξαμενή, εἰς τὴν ὁποίαν χύνεται τὸ ὕδωρ τῶν κρουνῶν, χρειάζεται ἀκόμη 400 ὀκ. διὰ νὰ γεμίσῃ. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

1497. (528). Ὁ Α ἐργάτης ἐξετέλεσε τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς ἔργου εἰς 12 ἡμέρας, ὁπότε ἔρχεται καὶ δεύτερος ἐργάτης Β καὶ ἐκτελοῦν μαζὶ τὸ ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 3 ἡμέρας. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσας ἡμέρας ἠδύνατο νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον ὁ Β μόνος του;

1498. (529). Μία βρύσις παρέχει 11 400 ὀκ. ὕδατος εἰς 6 ὥρας· δευτέρα βρύσις παρέχει 37 500 ὀκ. ὕδατος εἰς 15 ὥρας καὶ τρίτη παρέχει 36 000 ὀκ. εἰς 24 ὥρας. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ αἱ τρεῖς βρύσεις, εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσουν μίαν δεξαμενήν, ἡ ὁποία χωρεῖ 227 300 ὀκ. ὕδατος;

Προβλήματα τόκου καὶ ὑφαιρέσεως.

1499. (530). Ἐδάνεισέ τις τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 4 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 % καὶ εἰσέπραξε μετὰ ἕνα ἔτος τόκον 1540 δρχ. Πόσα ἐδάνεισε πρὸς 4 % καὶ πόσα πρὸς 5 %;

1500. (531). Εἶχε τις 45000 δρχ. καὶ ἐτόκισε μέρος αὐτῶν πρὸς 6 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 %. Μετὰ ἕνα ἔτος ἔλαβε καὶ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων τόκον 2570 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη τὸ κεφάλαιον.

1501. (532). Ἐχώρισέ τις ἕνα κεφάλαιον 60 000 δρχ. εἰς δύο μέρη καὶ ἐτόκισε τὸ πρῶτον πρὸς 4,5 % ἐπὶ 6 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4 % ἐπὶ 10

μῆνας. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθη τὸ κεφάλαιον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ τόκος τοῦ πρώτου μέρους ἦτο κατὰ 512,5 δρχ. μεγαλύτερος τοῦ τόκου τοῦ δευτέρου μέρους.

1502. (533). Τοκίζει τις μὲ ἁπλοῦν τόκον τρία κεφάλαια: τὸ πρῶτον πρὸς 4 % ἐπὶ 5 ἔτη, τὸ δεύτερον πρὸς 5 % ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 9 μῆνας καὶ τὸ τρίτον πρὸς 1 % ἐπὶ 2 ἔτη καὶ 8 μῆνας. Ἔλαβε δὲ συνολικῶς καὶ ἀπὸ τὰ τρία κεφάλαια τόκον 4410 δρχ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ δεύτερον κεφάλαιον ἦτο διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ τὸ τρίτον τριπλάσιον τοῦ δευτέρου, νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ οἱ τόκοι ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

1503. (534) Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατὰ 5 000 δραχμάς· τὸ μεγαλύτερον ἐτοκίσθη πρὸς 4 % καὶ τὸ μικρότερον 5 %. Ἐὰν εἰς τὰ κεφάλαια αὐτὰ προστεθοῦν ἀντιστοίχως καὶ οἱ ἐτήσιοι τόκοι των, προκύπτουν ἴσα κεφάλαια. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀρχικὰ κεφάλαια.

1504. (535). Ἐχώρισέ τις ἕνα κεφάλαιον 48 000 δρχ. εἰς δύο μέρη καὶ ἐτόκισε τὸ πρῶτον πρὸς 6 % καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 4 %. Ἔλαβε δὲ καὶ ἀπὸ τὰ δύο κεφάλαια, τόσον ἐτήσιον τόκον, ὅσον θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἐτόκιζεν ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιόν του πρὸς 5,5 %. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη τοῦ κεφαλαίου.

1505. (536). Κατέθεσέ τις τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς κεφαλαίου του πρὸς 3,5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 5 %. Ἐὰν ἠλάττωνε τὸ κεφάλαιόν του κατὰ 2 000 δρχ καὶ ἐτόκιζε τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4,5 %, θὰ ηὔξανε τὸν ἐτήσιον τόκον κατὰ 54 δρχ Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον.

1506. (537). Εἶχε τις ἕνα χρηματικὸν ποσὸν καὶ διέθεσε τὸ $\frac{1}{4}$ διὰ νὰ ἀγοράσῃ μίαν οἰκίαν, ἡ ὁποία τοῦ ἀπέδιδε 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας της, τὸ $\frac{1}{3}$ διὰ τὴν ἀγορὰν ἀγροκτήματος, τὸ ὁποῖον τοῦ ἀπέδιδε 4,5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον διέθεσε δι' ἀγορὰν μετοχῶν, αἱ ὁποῖαι τοῦ ἐπέφερον μίαν ζημίαν 2 %. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἦτο τὸ ἀρχικὸν ποσόν, ἐὰν τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημά του ἦτο 19 000 δρχ.

1507. (538). Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 15 000 δρχ. πρὸς 8 % καὶ ἕνα ἄλλο κεφάλαιον 14 000 δρχ. πρὸς 6 %. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ καὶ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων τόκον 6120 δραχμάς;

1508. (539). Δύο γραμμάτια εἶναι πληρωτέα, τὸ πρῶτον μὲν μετὰ ἕνα ἔτος καὶ τὸ δεύτερον μετὰ 18 μῆνας. Τὸ δεύτερον γραμμάτιον ὑπερβαίνει τὸ πρῶτον κατὰ 45 000 δρχ. Ἐὰν τὰ γραμμάτια αὐτὰ πληρωθοῦν σήμερον, θὰ ἔχουν, πρὸς 5 %, συνολικὴν ἔκπτωσιν 4 875 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τῶν γραμματίων.

Προβλήματα κινήσεως.

1509. (540). Διὰ νὰ ἀνέλθῃ μία ἅμαξα εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς λόφου καὶ νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεώς της, χρειάζεται, ἀφαιρουμένων τῶν στάσεων, μίαν καὶ ἡμίσειαν ὥραν. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ, ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ λόφου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἅμαξα δια-

νύει 7 χιλιόμετρα τὴν ὥραν κατὰ τὴν ἀνάβασιν καὶ 12 χιλιόμετρα τὴν ὥραν κατὰ τὴν κατάβασιν ;

1510. (541). Ἕνας λεμβοῦχος διανύει 50 μέτρα κατὰ λεπτὸν τῆς ὥρας, ὅταν ἀκολουθῇ τὸ ρεῦμα ἑνὸς ποταμοῦ, καὶ 20 μέτρα, ὅταν κινῆται πρὸς τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος. Μέχρι ποίας ἀποστάσεως πρέπει νὰ κατέλθῃ κωπηλατῶν, διὰ νὰ δυνηθῇ νὰ ἐπιστρέψῃ τὴν 3 ὥραν 5 λ., ἀπογευματινὴν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἀνεχώρησε τὴν 10 ὥραν 45 λ. πρωϊνήν ;

1511. (542). Ἐκ τινος τόπου ἀνεχώρησε πεζὸς διατρέχων 60 χιλιόμετρα καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 ἡμέρας. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν;

1512. (543). Ἱππεὺς διήνυσε μίαν ἀπόστασιν μὲ ταχύτητα 12 χιλιομ. τὴν ὥραν. Ἐὰν ἐκινεῖτο μὲ ταχύτητα 8 χιλιομ. τὴν ὥραν θὰ ἐχρειάζετο 2 ὥρας περισσότερον διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν αὐτήν. Πόσην ἀπόστασιν διήνυσε ;

1513. (544). Θέλων τις νὰ κάμῃ ἕνα περίπατον, ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς οἰκίας του μὲ μίαν ἅμαξαν, ἡ ὁποία διανύει 12 χλμ. τὴν ὥραν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς οἰκίας του πρέπει νὰ ἐγκαταλείψῃ τὴν ἅμαξαν, ἵνα ἐπιστρέφων πεζῇ μὲ ταχύτητα 4 χλμ. τὴν ὥραν εὑρίσκεται εἰς τὴν οἰκίαν του μετὰ 5 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ἐξ αὐτῆς.

1514. (545). Δύο ποδηλάται Α καὶ Β, ἀπέχοντες μεταξύ των 49,6 χιλιόμετρα, ἐκκινοῦν συγχρόνως καὶ διευθύνονται ὁ ἕνας πρὸς τὸν ἄλλον. Ὅταν συνηντήθησαν, ὁ Α εἶχε διανύσει 1,6 χιλιόμετρα περισσότερον τοῦ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ Α διήνυσε καθ' ὥραν 800 μέτρα περισσότερον τοῦ Β.

1515. (546). Δύο φίλοι ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α διὰ νὰ κάμουν ἕνα περίπατον 4 χιλιομέτρων. Ὁ πρῶτος βαδίζει μὲ ταχύτητα 2,5 χλμ. τὴν ὥραν καὶ ὁ δεύτερος μὲ ταχύτητα 3 χλμ. τὴν ὥραν. Ὁ δεύτερος φθάσας εἰς τὸ τέρμα Β τοῦ περιπάτου , ἐπιστρέφει διὰ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ καὶ συναντᾷ τὸν φίλον του. Νὰ εὑρεθῇ, ποὺ συνήντησε τὸν φίλον του ;

1516. (547). Αὐτοκίνητον ἐκτελοῦν τὴν συγκοινωνίαν τῶν πόλεων Α καὶ Β, ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς πόλεως Α, 4 ὥρας βραδύτερον ποδηλάτου, ὁ ὁποῖος μετέβαινεν ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν Β, μὲ ταχύτητα 12 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Τὸ αὐτοκίνητον, διανῦον 30 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν Β καὶ μετὰ παραμονὴν 1,5 ὥρας, ἐπιστρέφον πρὸς τὴν πόλιν Α, μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, συνήντησε τὸν ποδηλάτην εἰς ἀπόστασιν 30 χιλιομέτρων ἀπὸ τῆς πόλεως Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων.

1517. (548). Δύο ποδηλάται Α καὶ Β ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐξ Ἀθηνῶν μὲ ταχύτητα 17,6 χιλιομέτρων καὶ 13,2 χιλιομέτρων τὴν ὥραν ἀντιστοίχως. Μετὰ πορείαν 3 ὡρῶν, ὁ πρῶτος, θέλων νὰ συναντήσῃ τὸν δεύτερον, ἐλαττώνει τὴν ταχύτητά του εἰς 10 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν Ἀθηνῶν θὰ συναντήσῃ τὸν Β ;

1518. (549). Πεζὸς καὶ ποδηλάτης ἀναχωροῦν συγχρόνως, ὁ μὲν ἐκ τοῦ

σημείου Α, ὁ δὲ ἐκ τοῦ σημείου Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Μετὰ 4 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των συνηντήθησαν εἰς ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ποδηλάτης διανύει 9 χιλιόμετρα τὴν ὥραν περισσότερον τοῦ πεζοῦ, νὰ εὑρεθοῦν: 1ον Αἱ ταχύτητες τοῦ πεζοῦ καὶ ποδηλάτου καὶ 2ον ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

1519. (550). Ἕνας ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἐξ ἑνὸς σημείου Α, μὲ ταχύτητα 8 χλμ. τὴν ὥραν, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἄλλο σημεῖον Β. Ὅταν εἶχε διανύσει 24 χλμ. ἀναγκάζεται νὰ ἐπιστρέψῃ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως Α. Ἐπιστρέφει μὲ ταχύτητα 12 χλμ. τὴν ὥραν. Ἀναχωρεῖ ἔπειτα μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ φθάνει εἰς τὸν προορισμόν του, δηλ. εἰς τὸ σημεῖον Β κατὰ τὴν ἐκ τῶν προτέρων ὁρισθεῖσαν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

1520. (551). Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό τινος τόπου, διανύων 12 χιλιόμετρα τὴν ὥραν· 3 ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος, διανύων 16 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. 1ον. Πότε θὰ προηγῆται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου κατὰ 12 χιλιόμετρα; 2ον. Πότε θὰ προηγῆται ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 50 χλμ.;

1521. (552). Ποδηλάτης καὶ πεζοπόρος ἀναχωροῦν συγχρόνως, ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α, ὁ δὲ ἐκ τῆς πόλεως Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ὁ ποδηλάτης διανύει 16 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ὁ πεζοπόρος 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πόλεως Α, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 105 χλμ.

1522. (553). Δύο αὐτοκίνητα Α καὶ Β ἀναχωροῦν ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως Ο καὶ διευθύνονται ἀντιθέτως. Μετὰ 4 ὥρας τὰ αὐτοκίνητα ἀπέχουν μεταξύ των 312 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητές των, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{6}{7}$ τῆς ταχύτητος τοῦ ἄλλου.

1523. (554). Δύο πόλεις Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 270 χιλιόμετρα, συνδέονται διὰ σιδηροδρομικῆς γραμμῆς. Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ τῶν Α καὶ Β καὶ φθάνουν εἰς τὴν ἄλλην πόλιν. Ἡ ταχύτης τῆς μιᾶς εἶναι τὰ $\frac{8}{4}$ τῆς ταχύτητος τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητές των, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ταχεῖα φθάνει εἰς τὸ τέρμα 2,5 ὥρας ἐνωρίτερον.

1524. (555). Ἐκ μιᾶς πόλεως Α ἀναχωρεῖ πεζοπόρος, ὁ ὁποῖος διανύει 20 χλμ. εἰς 5 ὥρας. Ἐκ μιᾶς ἄλλης πόλεως Β, ἡ ὁποία κεῖται 16 χλμ. ὄπισθεν αὐτῆς, ἀναχωρεῖ 5 ὥρας βραδύτερον, ἕνας ἄλλος πεζοπόρος, ὁ ὁποῖος διανύει 16,5 χλμ. εἰς τρεῖς ὥρας. Πότε καὶ ποῦ ὁ δεύτερος πεζοπόρος, θὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον;

1525. (556). Δύο αὐτοκίνητα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα ἀνεχώρησαν ταυτοχρόνως καὶ διευθύνονται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, χωρίζονται ὑπὸ μιᾶς ἀποστάσεως 32 χλμ. Τὸ προπορευόμενον Β διανύει 42 χλμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ Α 58 χλμ. τὴν ὥραν. Πότε τὸ αὐτοκίνητον Α θὰ συναντήσῃ τὸ Β καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ Α;

1526. (557). Ἕνας κλέπτης, διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὴν σύλληψίν του, ἀναχωρεῖ τὴν 8 ὥραν καὶ 20 λ. πρωϊνὴν μὲ αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ διανύσῃ 192 χιλιόμετρα εἰς 5 ὥρας καὶ 20′. Ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ ἔχῃ ἕνα ἄλλο αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον ἀνεχώρησε μὲ ἀστυνομικοὺς 1 ὥραν 30 λ. βραδύτερον, διὰ νὰ φθάσουν τὸν κλέπτην εἰς ἀπόστασιν 378 χιλιομέτρων ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεώς του;

1527. (558). Ἐκ μιᾶς πόλεως Α ἀναχωρεῖ μία ἁμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα 30 χλμ. τὴν ὥραν. Μετὰ 2 ὥρας, ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῆς πρώτης ἁμαξοστοιχίας, ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, δευτέρα ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 40 χλμ. τὴν ὥραν. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσας ὥρας ἡ δευτέρα ἁμαξοστοιχία θὰ φθάσῃ τὴν πρώτην καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν Α; 2ον. Μετὰ πόσας ὥρας ἡ β′ θὰ προηγῆται τῆς α′ κατὰ 75 χιλιόμετρα;

1528. (559). Ἕνα αὐτοκίνητον πρέπει νὰ μεταβῇ ἐκ μιᾶς πόλεως Α εἰς ἄλλην Β μὲ ταχύτητα 64 χλμ. τὴν ὥραν. Ἐπὶ 3 ὥρας τὸ αὐτοκίνητον κινεῖται μὲ αὐτὴν τὴν ταχύτητα. Ἔπειτα, λόγῳ βλάβης τῆς μηχανῆς του, σταματᾷ ἐπὶ 50 λεπτὰ τῆς ὥρας· μετὰ τὴν διόρθωσιν τῆς βλάβης συνεχίζει τὴν διαδρομήν του, ἡ ὁποία αὐξάνεται κατὰ 31 χλμ., μὲ ταχύτητα μεγαλυτέραν τῆς πρώτης κατὰ 6 χλμ. καθ' ὥραν. Λόγῳ τῆς βλάβης τοῦ αὐτοκινήτου καὶ τῆς αὐξήσεως τῆς διαδρομῆς, ἡ τελικὴ βραδύτης ἀνῆλθεν εἰς 1 ὥραν 5 λεπτά. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

1529. (560). Μία ἀλώπηξ, ἡ ὁποία κάμνει 2 πηδήματα κατὰ δευτερόλεπτον, ἔχει ἤδη κάμει 30 πηδήματα, ὅταν ἕνας σκύλος, ὁ ὁποῖος κάμνει 4 πηδήματα κατὰ δευτερόλεπτον, ἤρχισε νὰ τὴν καταδιώκῃ. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα ὁ σκύλος θὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα;

1530. (561). Ἕνας σκύλος καταδιώκει μίαν ἀλώπεκα, ἡ ὁποία ἀπέχει 60 πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὕτη κάμνῃ 9 πηδήματα, ὁ σκύλος κάμνει 6 πηδήματα. Ἀλλὰ 3 πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 ἐκείνης. Μετὰ πόσα πηδήματά του ὁ σκύλος θὰ φθάσῃ τὴν ἀλώπεκα;

1531. (562). Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου;

1532. (563). Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ αὐτοὶ δεῖκται τοῦ προηγουμένου προβλήματος συμπίπτουν διὰ δευτέραν, τρίτην κλπ. φοράν;

1533. (564). Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου εὑρίσκονται ὁ ἕνας εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ ἄλλου;

1534. (565). Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ αὐτοὶ δεῖκται (τοῦ προηγουμένου προβλήματος) σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν διὰ 1ην, 2αν, 3ην... φοράν;

1535. (566). Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, οἱ δεῖκται τοῦ προηγουμένου προβλήματος σχηματίζουν γωνίαν α^0 διὰ πρώτην, 2αν, 3ην... φοράν;

1536. (567). Πότε, μετὰ μεσημβρίαν, ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων δεικτῶν, ὡροδείκτου καὶ λεπτοδείκτου;

Προβλήματα μείξεως.

1537. (568). 40 ὀκάδες ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχουν 3,4 ὀκ. ἅλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ἵνα 40 ὀκάδες τοῦ νέου μείγματος περιέχουν 2 ὀκάδας ἅλατος;

1538. (569). Πόσας λίτρας θαλασσίου ὕδατος πρέπει νὰ ἔχωμεν, διὰ νὰ λάβωμεν 72 ὀκ. ἅλατος, ἐὰν μία λίτρα θαλασσίου ὕδατος ζυγίζῃ 1,026 χγρ. καὶ ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ θαλάσσιον ὕδωρ περιέχει ἅλας ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{40}$ τοῦ βάρους του.

1539. (570). Παντοπώλης θὰ ἀναμείξῃ δύο εἴδη ἐλαίου· τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 10,80 δραχμὰς καὶ τοῦ δευτέρου 14,40 δραχμάς. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ ἀναμείξῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 1 200 ὀκάδ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 12 δραχμάς.

1540. (571). Δύο δοχεῖα χωρητικότητος 30 ὀκ. καὶ 20 ὀκ. εἶναι πλήρη, τὸ μὲν πρῶτον οἴνου, τὸ δὲ δεύτερον ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τὸ ἕνα δοχεῖον εἰς τὸ ἄλλο, ἐναλλάξ, ἵνα προκύψουν ἴσα μείγματα.

1541. (572). Ἕνα βαρέλιον περιέχει 120 ὀκ. οἴνου καὶ 180 ὀκ. ὕδατος· ἕνα δεύτερον βαρέλιον περιέχει 90 ὀκ. οἴνου καὶ 30 ὀκ. ὕδατος. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου βαρελίου διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα μεῖγμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ 70 ὀκάδ. οἴνου καὶ 70 ὀκ. ὕδατος;

1542. (573). Ἔχομεν δύο διαλύσεις ἅλατος· ἡ μία ἐσχηματίσθη μὲ 120 ὀκ. ὕδατος καὶ μὲ 12 ὀκ. ἅλατος· ἡ δὲ ἄλλη μὲ 90 ὀκ. ὕδατος καὶ 3 ὀκ. ἅλατος. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα μεῖγμα 70 ὀκ. ὕδατος καὶ 7 ὀκάδων ἅλατος;

1543. (574). Ἠγόρασέ τις καφὲ πρὸς 60 δρχ. καὶ 100 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ ἀναμείξῃ ἀπὸ τὸν καφὲ τῆς κατωτέρας ποιότητος μὲ 1 ὀκᾶ τῆς ἀνωτέρας ποιότητος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα, τὸ ὁποῖον πωλῶν πρὸς 74,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν, νὰ κερδίζῃ 10 % ἐπὶ ἑκάστης πωλουμένης ὀκάδος τοῦ μείγματος;

1544. (575). Ἔμπορος ἔχει ἀναμείξει 125 ὀκ. καφὲ τῶν 120 δραχμῶν κατ' ὀκᾶν, μὲ 165 ὀκ. ἄλλου εἴδους τῶν 80 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας καφὲ πρέπει νὰ προσθέσῃ ἀπὸ τὴν πρώτην ποιότητα, ἵνα 84 ὀκάδες τοῦ νέου μείγματος περιέχουν 15 ὀκ. ἀπὸ τὴν δευτέραν ποιότητα. Νὰ προσδιορισθῇ καὶ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ νέου μείγματος.

Προβλήματα Φυσικῆς.

1545. (576). Εἰς τὸ ἄκρον Α ἑνὸς μοχλοῦ ΑΒ μήκους 3 μέτρων ἔχομεν ἐξαρτήσει ἕνα βάρος Δ=50 χιλιογράμμων. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον Β διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁ μοχλός, ὅταν τὸ ὑπομόχλιον Υ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ Α 1,20 μέτρα;

1546. (577). Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β ἑνὸς μοχλοῦ μήκους 2 μέτρων ἔχουν

ἐξαρτηθῇ βάρη 10 χιλιογράμμων καὶ 15 χιλιογράμμων. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ὑπομόχλιον διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁ μοχλός;

1547. (578). Τὸ βάρος σανίδος ἐκ ξύλου ἐλάτης εἶναι κατὰ 9,2 χιλιόγραμμα μικρότερον τοῦ βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑπ' αὐτῆς ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶναι τὸ βάρος τῆς σανίδος, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ἐλάτης εἶναι 0,54.

1548. (579). Φελλὸς ἔχει ὄγκον 15 κυβικ. παλ. καὶ βάρος 3,6 χιλιογράμμων. Ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ φελλοῦ;

1549. (580). Ἕνας ὄγκος πάγου ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 1,20 μ. Ἐὰν θέσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἕνα βάρος 75 χλγρ. καὶ τὸν θέσωμεν ἐντὸς ὕδατος, βυθίζονται τὰ $\frac{19}{20}$ τοῦ ὄγκου του. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πάγου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ πάγου εἶναι 0,92.

1550. (581). Διὰ νὰ μάθῃ τις νὰ κολυμβᾷ θέλει νὰ κατασκευάσῃ ζώνην ἐκ φελλοῦ τοιαύτην, ὥστε νὰ κρατῆται ὄρθιος ἐντὸς τοῦ ὕδατος, μὲ τὴν κεφαλὴν ἐκτὸς αὐτοῦ. Πόσον βάρος πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ζώνη, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οὗτος ζυγίζει 60 χιλιόγραμμα, ὅτι τὸ βάρος τῆς κεφαλῆς του εἶναι 3 χιλιόγραμμα καὶ ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος σώματος εἶναι 1,02 καὶ τοῦ φελλοῦ 0,24.

1551. (582). Ἕνας κύλινδρος 12 ἑκατοστομέτρων εἶναι ἀνηρτημένος εἰς τὸν ἕνα δίσκον ἑνὸς ὑδροστατικοῦ ζυγοῦ. Ὅταν 3 ἑκ. τοῦ κυλίνδρου αὐτοῦ βυθίζωνται εἰς τὸ ὕδωρ, ζυγίζει 25 γραμ. καὶ ὅταν 8 ἑκ. αὐτοῦ βυθίζωνται εἰς τὸ ὕδωρ, ζυγίζει 5 γραμ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ κυλίνδρου.

1552. (583). Ὑποπτευόμεθα, ὅτι ἕνα χάλκινον ἀγαλμάτιον εἶναι κοῖλον ἐσωτερικῶς. Τὸ βάρος του εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 523 γραμμάρια, εἰς δὲ τὸ ὕδωρ 447,5 γραμ. Ἐὰν ἡ πυκνότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 8,8 νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ἡ ὑποψία ἔχῃ βάσιν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος εἰς κυβ. ἑκατοστόμετρα τῆς ἐσωτερικῆς κοιλότητος τοῦ ἀγαλματίου.

1553. (584). Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19, τοῦ δὲ χαλκοῦ 9. Πόσον χρυσὸν καὶ πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συντήξωμεν, διὰ νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα 50 γραμ. εἰδικοῦ βάρους 15;

1554. (585). Κρᾶμα ἀργύρου καὶ κασσιτέρου ἔχει εἰδικὸν βάρος 8 καὶ ζυγίζει 5 χιλιόγραμμα. Πόσον ἄργυρον καὶ πόσον κασσίτερον περιέχει τὸ κρᾶμα αὐτό, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου εἶναι 10,53 τοῦ δὲ κασσιτέρου 7,28;

1555. (586). Κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ περιέχει 1 845 γραμ. ἀργύρου περισσότερον τοῦ χαλκοῦ. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ κρᾶμα αὐτὸ ἄργυρον, βάρους ἴσου πρὸς τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ καθαροῦ ἀργύρου, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ κρᾶμα, λαμβάνομεν ἕνα νέον κρᾶμα τίτλου 0,835. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος καὶ ὁ τίτλος τοῦ ἀρχικοῦ κράματος.

1556. (587). Ἔχει τις ἕνα μεῖγμα νίτρου καὶ θείου βάρους 80 χλγρ. Ἡ ἀναλογία τοῦ μείγματος εἶναι 7 μέρη νίτρου καὶ 3 μέρη θείου. Πόσον νίτρον

πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ μεῖγμα, ἵνα λάβωμεν ἕνα νέον μεῖγμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ 11 μέρη νίτρου καὶ 4 μέρη θείου;

1557. (588) Χρυσοχόος ἔχει ἕνα κρᾶμα ἀργύρου τίτλου 0,850. 'Εὰν προσθέσῃ εἰς αὐτό, διὰ συντήξεως 640 γραμ. καθαροῦ ἀργύρου, λαμβάνει ἕνα κρᾶμα τίτλου 0,946. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τοῦ πρώτου κράματος.

Προβλήματα Γεωμετρίας.

1558. (589). 'Ορθογωνίου τριγώνου ἡ διαφορὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι 20°. Πόση εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν;

1559. (590). 'Ισοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του· νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του.

1560. (591). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν καθεμία εἶναι κατὰ 20° μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης της.

1561. (592). Πόσας πλευρὰς ἔχει κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη γωνία εἶναι 144°.

1562. (593) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία τετραπλεύρου, ἐὰν εἶναι μεταξύ των καθὼς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4.

1563. (594). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον μία χορδή του 42 ἑκ. ἔχει ἕνα βέλος 7 ἑκ.

1564. (595). 'Ηγόρασέ τις ἕνα κῆπον σχήματος ὀρθογωνίου ἀντὶ 12 000 δρχ. Διὰ νὰ τὸν περιβάλλῃ μὲ συρματόπλεγμα ἐξώδευσε, πρὸς 10 δρχ. τὸ μέτρον, τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ κήπου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ κήπου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ μῆκος ἦτο μεγαλύτερον τοῦ πλάτους κατὰ 20 μ.

1565. (596). 'Η περίμετρος ὀρθογωνίου εἶναι 120 μέτρα. 'Εὰν τὸ μῆκος του ἦτο 2,5 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ πλάτους του, ἡ περίμετρος θὰ ἦτο κατὰ 20 μέτρα μεγαλυτέρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του.

1566. (597). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 10 μέτρ. καὶ 6 μέτρ. 'Εὰν αὐξήσωμεν τὴν βάσιν κατὰ 5 μέτρα, πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ τὸ ὕψος, ἵνα τὸ νέον ὀρθογώνιον ἔχῃ ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ πρώτου;

1567. (598). Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι τριπλάσιον τοῦ πλάτους του. 'Εὰν αὐξήσωμεν τὰς διαστάσεις του κατὰ 4 μέτρα, τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνει κατὰ 656 τετραγ. μέτρα. Νὰ ὑπολογιθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

1568. (599). Ἕνας ὀρθογώνιος κῆπος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι $\frac{4}{5}$ τοῦ μήκους του, ἔχει ἐμβαδὸν 2400 τετρ. μέτρα περισσότερον ἑνὸς ἄλλου κήπου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι κατὰ 40 μέτρα μεγαλύτερον τοῦ μήκους τοῦ πρώτου καὶ τὸ πλάτος εἶναι κατὰ 40 μέτρα μικρότερον τοῦ πλάτους τοῦ πρώτου κήπου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τῶν δύο κήπων.

1569. (600). 'Ο ἰδιοκτήτης ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι κατὰ 18 μέτρ. μεγαλύτερον τοῦ πλάτους, θέλει νὰ σχηματίσῃ, γύρω ἀπὸ τὸν κῆπον καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ, μίαν δενδροστοιχίαν

πλάτους 2,5 μέτρων. Πρὸς τοῦτο ἀναγκάζεται νὰ ἀγοράση ἀπὸ τοὺς γείτονάς του 695 τετρ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ οἰκοπέδου.

1570. (601). Δύο πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 20 μ. καὶ 36 μέτρα. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν πλευρῶν, διαιρεῖ τὴν τρίτην πλευρὰν εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα διαφέρουν κατὰ 12 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρά.

1571. (602). Δίδεται ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς ΑΒ=74 μέτρ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΒΕ=13 μέτρα. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ τὸ τετράγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τετράπλευρα.

1572. (603). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον γνωρίζομεν τὴν μεγάλην βάσιν 18 μ. καὶ τὴν διαγώνιον 15 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μικρὰ βάσις, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ τραπέζιον αὐτὸ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα ἡμικύκλιον ἀκτῖνος 9 μ.

1573. (604). Εἰς ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 63 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος 54 ἑκ. ἐγγράφομεν ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 116 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ.

1574. (605). Ἡ βάσις ΑΒ ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι 48 μ. καὶ τὸ ὕψος του ΑΔ=26 μ. Κατὰ πόσα μέτρα πρέπει νὰ προεκτείνωμεν τὴν ΑΒ μέχρι τοῦ Ε, ἵνα τὸ τρίγωνον ΕΒΗ, ὅπου Η εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΕΔ καὶ τῆς ΒΓ, νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μερῶν ΑΒΗΔ καὶ ΔΗΓ;

1575. (606). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ΑΒ=12 ἑκ., ΒΓ=20 ἑκ., ΓΑ=18 ἑκ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ζ καὶ φέρομεν τὰς ΖΜ καὶ ΜΕ παραλλήλους, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τέμνει τὴν διαγώνιον ΖΕ τοῦ τετραπλεύρου ΑΖΜΕ εἰς τὸ Θ. Νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τῆς ΑΒ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΕΘ=3ΘΖ.

1576. (607). Τραπεζίου ΑΒΓΔ ἡ μεγάλη βάσις εἶναι ΑΒ=105 μέτρα, ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ=60 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του ΔΗ=45 μέτρα. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ΑΒ πρέπει νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Μ, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ρ, τὴν ΒΔ εἰς τὸ Σ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ν καὶ τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι ΜΡ=ΡΣ=ΣΝ; Ἐὰν εἶναι ΜΣ=2ΜΡ ἢ ΜΡ=2ΜΣ, ὑπάρχουν δύο τοιαῦται παράλληλοι. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν παραλλήλων.

Προβλήματα πρὸς ἐπανάληψιν.

1577. (608). Δύο ἐργολάβοι ἠγόρασαν 500 κυβικὰ μέτρα ἄμμου πρὸς 17,50 δρχ. τὸ κυβικὸν μέτρον. Ὁ πρῶτος μετέφερε τὴν ἄμμον εἰς ἀπόστασιν 3 χιλιομέτρων, ὁ δὲ δεύτερος εἰς ἀπόστασιν 4 χιλιομέτρων. Τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς τῆς ἄμμου ἀνῆλθον εἰς 5 δρχ. κατὰ κυβικὸν μέτρον καὶ κατὰ χιλιόμετρον. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ δεύτερος ἐπλήρωσε 3 350 δρχ. περισσοτέρας τοῦ πρώτου διά τὴν ἀγορὰν καὶ μεταφορὰν τῆς ἄμμου, νὰ εὑρεθῇ πόσα κυβικὰ μέτρα ἄμμου ἠγόρασεν ἕκαστος καὶ πόσον ἐπλήρωσεν.

1578. (609). Γεωργὸς ἤρχισε νὰ καλλιεργῇ ἕνα ἀγρόν του· ὑπολογίζει δὲ ὅτι, ἐὰν καλλιεργῇ 90 τετραγ. μέτρα καθ' ὥραν, θὰ δύναται νὰ τελειώσῃ τὴν καλλιέργειαν τοῦ ἀγροῦ του τὴν 6 ὥραν μ. μ. Ὅταν ἐτελείωσε τὸ ἥμισυ τῆς ἐργασίας του καταλαμβάνεται ὑπὸ ἀδιαθεσίας, ἡ ὁποία δὲν τοῦ ἐπιτρέπει νὰ καλλιεργῇ περισσότερα ἀπὸ 50 τετρ. μέτρα καθ' ὥραν. Λόγῳ τῆς βραδύτητος αὐτῆς τελειώνει τὴν ἐργασίαν του τὴν 8 μ. μ. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγροῦ καὶ 2ον. ἡ ὥρα κατὰ τὴν ὁποίαν ἤρχισε τὴν ἐργασίαν του.

1579. (610). Ἕνα βαρέλιον περιέχει 500 ὀκάδας οἴνου Α ποιότητος καὶ ἕνα δεύτερον περιέχει 300 ὀκ. οἴνου Β ποιότητος. Θέλομεν νὰ ἐξαγάγωμεν ἐξ ἑκάστου βαρελίου τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὀκάδων καὶ νὰ θέσωμεν εἰς τὸ πρῶτον βαρέλιον τὸν οἶνον, ποὺ ἐξήχθη ἀπὸ τὸ δεύτερον καὶ εἰς τὸ δεύτερον βαρέλιον τὸν οἶνον, ποὺ ἐξήχθη ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τρόπον, ὥστε εἰς τὰ δύο βαρέλια ἡ ἀναλογία τοῦ οἴνου τῆς Α ποιότητος πρὸς τὸν οἶνον τῆς Β ποιότητος νὰ εἶναι ἡ αὐτή. Πόσας ὀκάδας οἴνου πρέπει νὰ ἐξαγάγωμεν ἐξ ἑκάστου βαρελίου;

1580. (611). Ἕνας ἐπιχειρηματίας ἀγοράζει ἕνα κῆπον ἀντὶ 6 000 δρχ. τὸ στρέμμα. Μετὰ τὴν ἀγορὰν διαπιστώνει, ὅτι ὁ κῆπος ἦτο κατὰ 100 τετρ. μέτρα ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅσα εἶχε πληρώσει. Ἐν τούτοις δὲν διαμαρτύρεται, διότι εὑρίσκει τὴν εὐκαιρίαν νὰ πωλήσῃ ἀμέσως τὸν κῆπον ἀντὶ 8 δρχ. τὸ τ. μέτρον. Ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῆς ἐκέρδισε 12 % ἐπὶ τῶν ὅσων εἶχε πληρώσει. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πραγματικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κήπου εἰς τετρ. μέτρα.

1581. (612). Ἠγόρασέ τις ἕνα κῆπον σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος ἦτο τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήκους. Περιβάλλει αὐτὸν μὲ συρματόπλεγμα, διὰ τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε, πρὸς 18 δρχ. τὸ μέτρον, τὰ $\frac{7}{80}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς τοῦ κήπου. Ἡ συνολικὴ δαπάνη τῆς ἀγορᾶς καὶ τοῦ συρματοπλέγματος ἦτο 31 320 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ κήπου.

1582. (613). Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ δύο ἀνίσων κρουνῶν Α καὶ Β. Ὁ Α γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς τετραπλάσιον χρόνον ἢ ὁ Β. Ἀνοίγεται ὁ Α ἐπὶ χρόνον ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ χρόνου, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ Β διὰ νὰ γεμίσῃ τὴν δεξαμενήν. Κλείομεν ἔπειτα τὸν Α καὶ ἀνοίγομεν τὸν Β καὶ γεμιζει ἡ δεξαμενὴ εἰς χρόνον κατὰ $2\frac{1}{4}$ ὥρας περισσότερον τοῦ χρόνου, τὸν ὁποῖον θὰ ἐχρειάζοντο καὶ οἱ δύο κρουνοὶ διὰ νὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενήν, ἐὰν ἠνοίγοντο συγχρόνως ἐξ ἀρχῆς. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον χρειάζεται ἕκαστος κρουνὸς διὰ νὰ γεμίσῃ μόνος του τὴν δεξαμενήν.

1583. (614). Ἐξοδεύει τις τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ 100 δραχμὰς ἀκόμη· τὴν δευτέραν φορὰν ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ 25 δραχμὰς καὶ τὴν τρίτην φορὰν τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου πλὴν 120 δραχμάς· τοῦ μένουν δὲ τελικῶς 8 000 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς;

1584. (615). Χρέος ἐξωφλήθη εἰς τρεῖς δόσεις. Ἡ πρώτη δόσις ἦτο ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ χρέους καὶ μὲ 500 δρχ. ἀκόμη. Ἡ δευτέρα ἦτο ἴση μὲ τὴν πρώτην καὶ μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου χρέους καὶ ἡ τρίτη δόσις ἦτο ἴση μὲ τὸ τέταρτον τοῦ ἀρχικοῦ χρέους καὶ μὲ 2 000 δρχ. ἀκόμη. Πόσον ἦτο τὸ χρέος ;

1585. (616). Ταξειδιώτης φθάνει εἰς μίαν πόλιν ἀφοῦ, ἐξώδευσε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα ἔφερε μαζί του. Εἰς τὴν πόλιν αὐτὴν λαμβάνει 5 000 δρχ. τὰς ὁποίας τοῦ ὤφειλαν καὶ ἐξοδεύει ἐκεῖ τὰ $\frac{3}{8}$ τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα οὕτω εἶχε. Διὰ τὴν ἐπιστροφήν του ἐξώδευσε τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ παρετήρησε, ὅτι τοῦ εἶχον μείνει 9 000 δρχ. Πόσα χρήματα ἔφερεν ἀρχικῶς μαζί του ;

1586. (617). Τέσσαρες μαθηταί, ἐμοίρασαν ὡρισμένον ἀριθμὸν μήλων κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον : Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ τῶν μήλων πλὴν 10 μῆλα, ὁ δεύτερος ἔλαβε τὰ τρία τέτρατα τοῦ ὑπολοίπου πλὴν 15 μῆλα· ὁ τρίτος ἔλαβε τὰ δύο πέμπτα τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ 2 μῆλα ἀκόμη, ὁ δὲ τέταρτος τὰ 13 μῆλα, ποὺ ἔμειναν. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μῆλα ἐμοίρασαν καὶ πόσα ἔλοβεν ἕκαστος ;

1587. (618). Πατὴρ τις διανέμει μῆλα εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του. Εἰς τὸν πρῶτον δίδει τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων ἔχει καὶ ἥμισυ μῆλον. Εἰς τὸν δεύτερον δίδει τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἥμισυ μῆλον, τέλος εἰς τὸν τρίτον δίδει τὸ ἥμισυ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ ἥμισυ μῆλον ἀκόμη. Οὕτω ὁ πατὴρ ἔμεινε χωρὶς μῆλα. Πόσα μῆλα διένειμεν ;

1588. (619). Χωρικὴ ἐπώλησε τὸ ἥμισυ τῶν αὐγῶν, τὰ ὁποῖα εἶχε καὶ ἥμισυ αὐγὸν χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησε πάλιν τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολοίπων καὶ ἥμισυ αὐγὸν χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν τῆς ἔμειναν 1 αὐγόν ;

1589. (620). Αὐξάνει τις τὴν περιουσίαν του κατὰ τὸ τρίτον τῆς ἀξίας της καὶ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους κρατεῖ 20 000 δρχ. διὰ τὰ ἔξοδά του. Εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους παρετήρησεν, ὅτι ἡ περιουσία του ἐδιπλασιάσθη. Νὰ εὑρεθῇ πόση ἦτο ἀρχικῶς ἡ περιουσία του.

1590. (621). Δύο παῖκται Α καὶ Β συνεφώνησαν τὰ ἑξῆς : ἐκεῖνος, ποὺ θὰ χάσῃ εἰς τὸ παιγνίδι, θὰ δώσῃ εἰς τὸν ἄλλον τὸ ἥμισυ τῶν χρημάτων του, ποὺ κατέχει ἐκείνην τὴν στιγμὴν καὶ 1 δραχμὴν ἀκόμη. Ἤρχισαν τὸ παιγνίδιον κατέχοντες τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων ἕκαστος. Εἰς τὴν πρώτην παρτίδα τοῦ παιγνιδίου ἔχασεν ὁ Β, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ἔχασεν ὁ Α. Ὅταν ἐτελείωσε τὸ παιγνίδι ὁ Β κατεῖχε διπλάσια χρήματα τοῦ Α. Πόσα χρήματα εἶχεν ἀρχικῶς ἕκαστος ;

1591. (622). Δύο πρόσωπα Α καὶ Β εὗρον ἕνα χρηματικὸν ποσόν. Ὁ Α λαμβάνει ἐκ τοῦ εὑρεθέντος ποσοῦ 20 δρχ. καὶ τὸ ἕκτον τοῦ ὑπολοίπου· ἔπειτα ὁ Β λαμβάνει 30 δρχ. καὶ τὸ ἕκτον τοῦ ὑπολοίπου καὶ παρετήρησαν, ὅτι καὶ οἱ δύο εἶχον λάβει τὸ αὐτὸ ποσόν. Πόσον ἦτο τὸ εὑρεθὲν ποσὸν καὶ πόσον ἔλαβε ἕκαστος ;

1592. (623). 'Εργάτης έξοικονομεῖ 3 600 δραχμὰς ἐκ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός του. Τὸ ἑπόμενον ἔτος τὰς μὲν δαπάνας του ἠλάττωσε κατὰ 10 %, τὸ δὲ εἰσόδημά του ηὐξήθη κατὰ 5 %, καὶ οὕτω κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος ἐξοικονόμησε 6 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν ἐτήσιον εἰσόδημά του.

1593. (624). Λόγῳ ναυαγίου ἔμπορός τις ἔχασεν ἕνα φορτίον ἐμπορευμάτων, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἀσφαλίσει. Ἡ ἀσφαλιστικὴ ἑταιρεία προσφέρει ἕνα χρηματικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον ὁ ἔμπορος δὲν ἀπεδέχθη, διότι ἦτο κατὰ 10 % κατώτερον τῆς ἀξίας τῶν ἀπολεσθέντων ἐμπορευμάτων. Ἐὰν ἡ ἑταιρεία ἔδιδε 620 000 δρχ. ἐπὶ πλέον, ἡ προσφορὰ αὕτη θὰ ἦτο κατὰ 5,5 % ἀνωτέρα τῆς ἀπωλείας. Νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶχον ἀσφαλισθῇ τὰ ἐμπορεύματα καὶ πόσον προσέφερεν ἡ ἑταιρεία;

1594. (625). Ἀτμόπλοιον ἀναχωρῆσαν ἔκ τινος λιμένος εἶχε προμηθείας τροφίμων δι' 60 ἡμέρας, ἐὰν ἔδιδεν εἰς ἕκαστον ἐπιβάτην 1 μερίδα τροφῆς ἡμερησίως. Μετὰ ταξείδιον 20 ἡμερῶν, τὸ ἀτμόπλοιον κατελήφθη ὑπὸ τρικυμίας, ἡ ὁποία παρέσυρε 5 ἐπιβάτας. Λόγῳ δὲ τῶν ἀβαριῶν, τὰς ὁποίας ὑπέστη τὸ ἀτμόπλοιον ἐκ τῆς τρικυμίας, ηὔξησεν ἡ διάρκεια τοῦ ταξειδίου κατὰ 24 ἡμέρας καὶ ὑπεχρεώθησαν οἱ ἐπιβάται νὰ λαμβάνουν τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἀρχικῆς μερίδος τροφῆς. Νὰ εὑρεθῇ πόσοι ἐπιβάται ἐπέβαινον ἀρχικῶς τοῦ ἀτμοπλοίου.

1595. (626). Δύο ἀνθρακωρυχεῖα Α καὶ Β συνδέονται διὰ σιδηροδρομικῆς γραμμῆς μήκους 60 χλμ. Ἡ ἐξαγωγὴ τοῦ ἄνθρακος κοστίζει 240 δρχ. κατὰ τόννον εἰς τὸ Α καὶ 280 δρχ. κατὰ τόννον εἰς τὸ Β, ἡ δὲ μεταφορὰ κοστίζει 2 δρχ. κατὰ τόννον καὶ κατὰ χιλιόμετρον. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ΑΒ ἕνα σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄνθραξ νὰ κοστίζῃ τὴν αὐτὴν τιμήν, εἴτε ἐκ τοῦ Α, εἴτε ἐκ τοῦ Β μεταφέρεται.

1596. (627) Ἕνας ἑξαψήφιος ἀριθμὸς ἀρχίζει ἐξ ἀριστερῶν μὲ τὸ ψηφίον 1. Ἐὰν μεταφέρωμεν τὸ ψηφίον αὐτὸ ἐκ τῆς πρώτης πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσεως εἰς τὴν τελευταίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, προκύπτει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι τριπλάσιος τοῦ ἀρχικοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἑξαψήφιος ἀριθμός.

1597. (628). Ἕνας στρατηγὸς θέλει νὰ σχηματίσῃ μὲ τοὺς στρατιώτας του ἕνα πλῆρες τετράγωνον (ὄχι περίμετρον). Δοκιμάζει τὴν πρώτην φορὰν καὶ παρατηρεῖ, ὅτι τοῦ μένουν 39 στρατιῶται. Ἔπειτα τοποθετεῖ ἕνα στρατιώτην ἐπὶ πλέον εἰς ἑκάστην πλευρὰν καὶ παρατηρεῖ, ὅτι τοῦ λείπουν 50 στρατιῶται διὰ νὰ σχηματισθῇ τὸ τετράγωνον. Πόσους στρατιώτας εἶχεν ὁ στρατηγός;

1598. (559/1). Αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ τὴν συγκοινωνίαν δύο πόλεων Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 105 χλμ., κινεῖται μὲ ταχύτητα 40 χλμ./ὡρ. ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου τμήματος τῆς ὁδοῦ, ἡ ὁποία συνδέει τὰς δύο πόλεις Α καὶ Β, μὲ ταχύτητα 25 χλμ./ὡρ. ἐπὶ τοῦ ἀνωφερικοῦ τμήματος αὐτῆς καὶ μὲ ταχύτητα 50 χλμ./ὡρ. ἐπὶ τοῦ κατωφερικοῦ τμήματος αὐτῆς· τὸ ἀνωφερικὸν τμῆμα τῆς ὁδοῦ ἀπὸ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν Β εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ κατωφερικοῦ τμήματος αὐτῆς. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ τὸ αὐτοκίνητον ἀπὸ τὴν πόλιν Β εἰς τὴν Α, χρειάζεται 6 λεπτὰ τῆς ὥρας περισσότερον τοῦ χρόνου τῆς μεταβάσεώς του ἀπὸ τὴν Α εἰς τὴν Β, νὰ εὑρεθῇ ὁ χρό-

νος, τὸν ὁποῖον χρειάζεται τὸ αὐτοκίνητον, διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν πόλιν Α εἰς τὴν Β, ὡς καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὁριζοντίου, τοῦ ἀνωφερικοῦ καὶ τοῦ κατωφερικοῦ τμήματος τῆς ὁδοῦ ἀπὸ Α εἰς Β.

Προβλήματα γενικά.

1599. (668). Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι γ. Τὸ ἄθροισμα τοῦ γινομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ μ καὶ τοῦ ἄλλου ἐπὶ ν εἶναι α. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

1600. (669). Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸ διπλάσιον τοῦ δοθέντος.

1601. (670). Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, ἵνα οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ συνιστοῦν ἀναλογίαν;

1602. (671). Νὰ εὑρεθῇ πόσον αὐξάνει ἕνα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του τὸν θετικὸν ἀριθμὸν γ;

1603. (672). Ἡ ἡλικία δύο προσώπων εἶναι τοῦ μὲν ἑνὸς α ἐτῶν, τοῦ δὲ ἄλλου β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι μ φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου;

1604. (673). Αἱ ἡλικίαι δύο προσώπων εἶναι ἀντιστοίχως 25 καὶ 40 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ λόγος τῶν ἡλικιῶν των θὰ εἶναι ἴσος μὲ λ.

1605. (674). Θέλει τις νὰ πληρώσῃ α δραχμὰς μὲ ν δίδραχμα καὶ πεντάδραχμα. Πόσα δίδραχμα καὶ πόσα πεντάδραχμα θὰ δώσῃ;

1606. (675). Νὰ μοιρασθοῦν α δραχμαὶ εἰς δύο πρόσωπα οὕτως, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ νιοστὸν μέρος τοῦ δευτέρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

1607. (676). Νὰ μοιρασθοῦν α δραχμαὶ μεταξὺ τριῶν προσώπων Α, Β, Γ, οὕτως, ὥστε ὁ Α νὰ λάβῃ διπλασίας τοῦ Β, ὁ Β νὰ λάβῃ β δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ Γ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε ἕκαστος;

1608. (677). Νὰ χωρισθῇ ποσόν τι εἰς τρία μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ δεύτερον κατὰ ρ καὶ τὸ τρίτον νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πρῶτον μεῖον λ.

1609. (678). Μία ὑφάντρια ὑφαίνει α μέτρα ὑφάσματος καθ' ἡμέραν, μία ἄλλη δὲ β μέτρα καθ' ἡμέραν. Ἡ πρώτη ὑφάντρια ἔχει ἤδη ὑφάνει μ μέτρα. Μετὰ πόσας ἡμέρας αἱ δύο ὑφάντριαι θὰ ἔχουν ὑφάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέτρων;

1610. (679). Ἕνα βαρέλιον περιέχει α ὀκάδας οἴνου. Ἐξάγομεν ἐξ αὐτοῦ μίαν ὀκᾶν οἴνου, τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶμεν μὲ μίαν ὀκᾶν ὕδατος. Ἐξάγομεν ἐκ δευτέρου μίαν ὀκᾶν τοῦ μείγματος καὶ τὴν ἀντικαθιστῶμεν πάλιν μὲ μίαν ὀκᾶν ὕδατος. Τὸ αὐτὸ πράττομεν ν φοράς. Πόση ποσότης καθαροῦ οἴνου θὰ μείνῃ εἰς τὸ βαρέλιον;

1611. (680). Μοιράζει τις ἕνα χρηματικον ποσὸν εἰς μερικὰ πρόσωπα κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Εἰς τὸ πρῶτον δίδει α δραχμὰς καὶ τὸ μιοστὸν τοῦ ὑπολοίπου. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου, δίδει εἰς τὸ δεύτερον 2α δρχ. καὶ τὸ μιοστὸν τοῦ ὑπολοίπου. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δύο αὐτῶν μερι-

δίων δίδει εἰς τὸν τρίτον 3α δρχ. καὶ τὸ μιοστὸν τοῦ ὑπολοίπου καὶ οὕτω καθεξῆς. Μετὰ τὴν διανομὴν τοῦ ποσοῦ, εὑρέθη, ὅτι τὰ μερίδια ὅλων ἦσαν ἴσα. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἦτο τὸ διανεμηθὲν ποσόν, εἰς πόσα πρόσωπα διενεμήθη τοῦτο καὶ τὸ μερίδιον ἑκάστου (ἐφαρμογή: α=1000, μ=4).

1612. (681). Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξάνει κατὰ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγουμένου ἔτους. Σήμερον ἡ πόλις ἔχει k κατοίκους. Πόσους κατοίκους εἶχε πρὸ μ ἐτῶν; (Ἐφααμογή: ν=20, k=194 481, μ=4).

Προβλήματα Γεωμετρίας.

1613. (682). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἂν αὐξηθῇ κατὰ α, τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνει κατὰ $\frac{\beta^2\sqrt{3}}{4}$;

1614. (683). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΑΓ=γ καὶ ΒΓ=α. Φέρομεν μίαν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΔ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ.

1615. (684) Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ=α καὶ ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ=β καὶ τὸ ὕψος του ΔΗ=υ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς ΑΒ πρέπει νὰ ἀχθῇ μία παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις, ἵνα ἡ παράλληλος αὐτὴ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ;

1616. (685). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἕνα τετράγωνον καὶ νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου ἀντιστοιχεῖ τὸ μεγαλύτερον τετράγωνον.

1617. (686) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα ὀρθογώνιον ΔΕΖΗ δοθείσης περιμέτρου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ αἱ κορυφαὶ Δ καὶ Η ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως.

1618. (687). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ δύο βάσεις ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β καὶ ἡ μία ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ=γ. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου Α θὰ συναντηθοῦν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του:

1619. (688). Δίδεται ἕνα κανονικὸν ἡμιεξάγωνον ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν διαδοχικῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΔ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Χωρίζομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμιεξαγώνου εἰς τρία μέρη διὰ δύο καθέτων ΕΖ καὶ ΗΘ πρὸς τὴν ΑΔ. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ κάθετοι αὗται, ὥστε νὰ συμβαίνῃ μία ἐκ τῶν κάτωθι ὑποθέσεων:

1ον. Τὰ τρία μέρη τοῦ ἡμιεξαγώνου νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον. Ἐὰν περιστραφῇ τὸ ἡμιεξάγωνον περὶ τὴν ΑΔ, τὰ τρία μέρη νὰ παράγουν στερεά, τῶν ὁποίων αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

3ον. Οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν τούτων νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

1620. (689) Δίδεται ἕνας κύκλος Ο ἀκτῖνος ΟΑ=R. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς ἕνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΒ τοῦ κύκλου Ο καὶ τὴν κάθετον ΒΓ ἐπὶ τὴν ΟΑ, νὰ εἶναι ΑΓ=λ. Ἐφαρμογὴ $\text{ΑΓ}=\frac{3R}{2}$.

1621. (690). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐξ ἑνὸς σημείου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, φέρομεν τὴν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, καὶ τὴν ΜΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Μ, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΜΔ=ΜΕ.

1622. (691). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐξ ἑνὸς σημείου Μ τῆς βάσεως ΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΜΕ καὶ ΜΔ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Β πρέπει νὰ ληφθῇ τὸ σημεῖον Μ εἰς τρόπον, ὥστε

ΜΔ+ΜΕ=λ.

1623. (692). Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται δύο πλευραὶ ΑΒ=γ καὶ ΒΓ=α. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, νὰ εἶναι ΔΕ=λ. Διερεύνησις.

1624. (693). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ Δ μίαν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἡ ὁποία παράλληλος συναντᾷ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, νὰ εἶναι

ΒΔ+ΓΕ=2ΔΕ

1625. (694). Νὰ ἀχθῇ μία παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν δοθέντος τριγώνου εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τραπέζιον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

1626. (695). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἴσαι πλευραὶ εἶναι ΑΒ=ΑΓ=α καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση μὲ 2β. Νὰ ἀχθῇ μία παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, κειμένη μεταξὺ τῶν Α καὶ ΒΓ, συναντῶσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τραπέζιον ΔΕΓΒ νὰ εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον.

1627. (696). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα τετράγωνον ΔΕΖΗ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΗΖ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ αἱ κορυφαὶ Δ, Ε ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

---

1. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες συστημάτων

310. Ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$5x+2y=12 \qquad (1)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν ἄγνωστον x τὴν τιμὴν 0, δηλ. ἐὰν θέσωμεν $x=0$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$0+2y=12 \quad \text{ἢ} \quad y=6.$$

Αἱ τιμαὶ $x=0$ καὶ $y=6$ εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ὁμοίως, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ x τιμὰς

$x=1$	εὑρίσκομεν	$y=\frac{7}{2}$
$x=2$	»	$y=1$
$x=3$	»	$y=-\frac{3}{2}$
$x=4$	»	$y=-4.$

Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y σχηματίζουν ἀνὰ δύο, ἕνα ζεῦγος λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἐπειδὴ εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x, ἀκεραίαν ἢ κλασματικήν, ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ y, συνάγομεν ὅτι:

Ἡ ἐξίσωσις $5x+2y=12$ καὶ γενικῶς κάθε ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους ἔχει ἄπειρα ζεύγη λύσεων.

Ἡ γενικὴ μορφὴ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι ἡ

$$\boxed{\alpha x+\beta y=\gamma} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) λέγεται ἀόριστος.

311. Σύστημα ἐξισώσεων. Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις :

$$3x+4y=26 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad 5x-2y=0 \quad (2)$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀληθεύουν διὰ $x=2$ καὶ $y=5$ καὶ λέγομεν, ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Γενικῶς : Σύστημα ἐξισώσεων λέγεται τὸ σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ποὺ περιέχουν.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, ποὺ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος, λέγονται ρίζαι τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἢ λύσεις αὐτοῦ.

Π. χ. αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἶναι

$$x=2, \quad y=5.$$

Λύσις ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν κοινῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος.

312. Συστήματα ἰσοδύναμα. *Δύο ἢ περισσότερα συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις· δηλ. ὅταν κάθε λύσις τοῦ ἑνὸς συστήματος εἶναι λύσις καὶ τοῦ ἄλλου συστήματος καὶ ἀντιστρόφως.*

Ὅταν δύο συστήματα εἶναι ἰσοδύναμα, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου.

313. Ἰδιότητες συστημάτων. Ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ δοθέντος συστήματος εἰς μίαν σειρὰν ἄλλων ἰσοδυνάμων συστημάτων εἰς τρόπον, ὥστε ἡ λύσις τοῦ τελικοῦ συστήματος νὰ εἶναι προφανής.

Οἱ μετασχηματισμοὶ αὐτοὶ στηρίζονται ἐπὶ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων.

314. Ἰδιότης Ι. ***Εἰς ἕνα σύστημα ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ἢ νὰ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη δύο ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις του καὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἀπὸ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις μὲ τὴν προκύπτουσαν καὶ νὰ λάβωμεν οὕτω ἕνα σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\text{I} \quad \begin{cases} A=A' & (1) \\ B=B' & (2) \\ \Gamma=\Gamma' & (3) \end{cases}$$

ὅπου $A, B, \Gamma, A', B', \Gamma'$ εἶναι παραστάσεις, ποὺ περιέχουν τοὺς ἀγνώστους $x, y, \omega \ldots$

'Εὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'.$$

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σύστημα

$$\text{II}\ \left\{\begin{array}{lr} A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma' & (4)\\ B=B' & (5)\\ \Gamma=\Gamma' & (6)\end{array}\right.$$

εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα (I).

'Απόδειξις : Κάθε λύσις τοῦ συστήματος I δίδει ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεών του (1), (2), (3)· ἄρα θὰ δίδῃ ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως

$$A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'.$$

Συνεπῶς κάθε λύσις τοῦ συστήματος I εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος II.

'Αντιστρόφως : Κάθε λύσις τοῦ συστήματος II δίδει ἴσας ἀριθμητικὰς τιμὰς καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεών του (4), (5), (6). Ἄρα καὶ τὰ ἀθροίσματα $B+\Gamma$ καὶ $B'+\Gamma'$ θὰ ἔχουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς. Ἂν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῶν ἴσων ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς ἰσότητος $A+B+\Gamma=A'+B'+\Gamma'$ τὰ ἴσα ἀθροίσματα $B+\Gamma$ καὶ $B'+\Gamma'$, θὰ προκύψουν αἱ ἴσαι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ $A=A'$· ὥστε κάθε λύσις τοῦ συστήματος II εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος I.

Παρατήρησις. 'Η προηγουμένη ἀπόδειξις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προστιθεμένων κατὰ μέλη ἐξισώσεων. 'Εξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ προσθέτωμεν κατὰ μέλη ὅλας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ἀλλὰ μερικὰς ἐξ αὐτῶν. Πάντως ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις πρέπει νὰ *ἀντικαταστήσῃ μίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ νὰ τὴν σχηματίσωμεν.*

Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $B+\Gamma=B'+\Gamma'$ δὲν δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν ἐξίσωσιν $A=A'$.

315. Πόρισμα. ***Δυνάμεθα, πρὶν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος, νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἀνεξάρτητον τῶν ἀγνώστων.***

Οὕτω τὰ συστήματα

$$\left.\begin{array}{l} A=A'\\ B=B'\\ \Gamma=\Gamma'\end{array}\right\}\ \text{I}\qquad \left.\begin{array}{c} A\lambda+B\mu+\Gamma\nu=A'\lambda+B'\mu+\Gamma'\nu\\ B=B'\\ \Gamma=\Gamma'\end{array}\right\}\ \text{II}$$

εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενός, δὲν μεταβάλλει τοὺς ὅρους εἰς τοὺς ὁποίους ὑπόκεινται οἱ ἄγνωστοι.

316. Ἰδιότης ΙΙ. ***Εἰς ἕνα σύστημα ἐξισώσεων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσίν του ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἔστω πρὸς x συναρτήσει τῶν ἄλλων. Ἐὰν συνδυάσωμεν τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν μὲ τὰς ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εἰς τὰς ὁποίας ἀντικαθιστῶμεν, προηγουμένως, τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του, θὰ λάβωμεν ἕνα σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω τὸ σύστημα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους

$$\text{I}\quad \begin{cases} 3x-4y=2 & (1)\\ 5x+2y=12 & (2)\end{cases}$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$3x=2+4y \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{2+4y}{3} \qquad (3)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του, ποὺ δίδει ἡ (3), εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5\cdot\frac{2+4y}{3}+2y=12.$$

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σύστημα

$$\text{II}\quad \begin{cases} x=\dfrac{2+4y}{3} & (3)\\ 5\cdot\dfrac{2+4y}{3}+2y=12 & (4)\end{cases}$$

εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ Ι.

Ἀπόδειξις : Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος Ι εἶναι x=α, y=β. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Ι τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των α καὶ β, θὰ λάβωμεν τὰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας

$$\begin{cases} 3\alpha-4\beta=2 & (1')\\ 5\alpha+2\beta=12 & (2')\end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν (1′) λαμβάνομεν

$$\alpha=\frac{2+4\beta}{3} \qquad (3')$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2′) τὸ α μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν

$$5\cdot\frac{2+4\beta}{3}+2\beta=12 \qquad (4')$$

Ἀλλὰ αἱ ἰσότητες (3′) καὶ (4′) παριστάνουν τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, ποὺ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος II, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὰς τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των α καὶ β.

Ὥστε ἡ λύσις x=α, y=β τοῦ συστήματος I εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος II.

Ἀντιστρόφως: Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε λύσις τοῦ συστήματος II εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος I.

Πράγματι· ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ σύστημα II ἔχει τὴν λύσιν x=α, y=β.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος II τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των α καὶ β, θὰ λάβωμεν τὰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha=\dfrac{2+4\beta}{3} & (3'') \\ 5\cdot\dfrac{2+4\beta}{3}+2\beta=12 & (4'') \end{array}\right.$$

Ἀπὸ τὴν (3″), ἂν ἐξαλείψωμεν τὸν παρονομαστὴν καὶ μεταφέρωμεν τὸ 4β εἰς τὸ πρῶτον μέλος, λαμβάνομεν $3\alpha-4\beta=2$ (1″)

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (4″) τὸ $\dfrac{2+4\beta}{3}$ μὲ τὴν τιμήν του α, θὰ λάβωμεν $5\alpha+2\beta=12$ (2″)

Ἀλλ' αἱ ἰσότητες (1″) καὶ (2″) παριστάνουν τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς, ποὺ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος I, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὰς τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς αὐτὰς τιμάς των α καὶ β.

Ὥστε ἡ λύσις x=α, y=β τοῦ συστήματος II εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος I. Τὰ συστήματα λοιπὸν I καὶ II εἶναι ἰσοδύναμα.

317. Ἀπαλοιφή. Ὅταν εἰς τὰς ἐξισώσεις ἑνὸς συστήματος ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ἄγνωστον μὲ τὴν τιμήν του, ὁ ἄγνωστος αὐτὸς ἐξαλείφεται. Λέγομεν τότε, ὅτι ἔχομεν κάμει ἀπαλοιφὴν τοῦ ἀγνώστου.

Γενικῶς: *Ἀπαλοιφὴ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῶν μ ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος λέγεται ἡ ἀντικατάστασις τοῦ δοθέντος συστήματος*

δι' ἑνὸς ἰσοδυνάμου συστήματος, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μ—1 ἐξισώσεις δὲν περιέχουν τὸν ἄγνωστον αὐτόν.

2. Λύσις ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους

318. Γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους. Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι :

$$\begin{array}{|c|}\hline \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \\ \hline\end{array}$$

ὅπου α, β, γ, α', β', γ' εἶναι ποσότητες ἀριθμητικαὶ ἢ ἐγγράμματοι, θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ ἢ μηδέν, ἀλλὰ ἀνεξάρτητοι τῶν ἀγνώστων **x** καὶ **y**.

319. Λύσις ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους πρέπει :

1ον. Νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον· δηλ. νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ δοθὲν σύστημα μὲ ἕνα ἰσοδύναμον σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ μία ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις του νὰ ἔχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον.

2ον. Νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν μὲ τὸν ἕνα ἄγνωστον.

3ον. Νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς μίαν ἀπὸ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις τὸν ἄγνωστον αὐτὸν μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμήν του καὶ νὰ λύσωμεν ἔπειτα τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.

Ἡ ἀπαλοιφὴ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους καὶ ἑπομένως καὶ ἡ λύσις τοῦ συστήματος δύναται νὰ γίνῃ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι μεθόδους:

1ον. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως. (Συνέπεια τῆς ἰδιότητος I).

2ον. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως. (Συνέπεια τῆς ἰδιότητος II).

3ον. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως.

320. I. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως ***Παράδειγμα 1ον.*** Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 3x+7y=28 & (1) \\ 2x+4y=18 & (2) \end{cases}$$

Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον, π. χ. τὸν **x**, μὲ τὴν μέθοδον αὐ-

τήν, προσπαθοῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ δοθὲν σύστημα μὲ ἕνα ἄλλο ἰσοδύναμον σύστημα εἰς τὸ ὁποῖον οἱ συντελεσταὶ τοῦ x νὰ εἶναι συμμετρικοὶ (§ 17).

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ δοθέντος συστήματος ἐπὶ 2 (δηλ. ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ x, ποὺ ἔχει εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν) καὶ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ —3 (δηλ. ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ x, ποὺ ἔχει εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖον του) καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} 6x+14y=56 \\ -6x-12y=-54. \end{cases}$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$2y=2, \quad \text{ἄρα} \quad y=1.$$

Ἀντικαθιστῶμεν μίαν ἀπὸ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος I, ἔστω τὴν δευτέραν, μὲ τὴν ἐξίσωσιν $y=1$ καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\text{II} \quad \begin{cases} 3x+7y=28 & (3) \\ y=1 & (4) \end{cases}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 1, ποὺ δίδει ἡ ἐξίσωσις (4) καὶ ἔχομεν $3x+7\cdot1=28$.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $x=7$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=7, \quad y=1$.

Σημ. **Ἡ διάταξις τῶν πράξεων διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ ἀγνώστου x γίνεται ὡς κατωτέρω:**

Ἀπαλοιφὴ τοῦ x

$$\begin{array}{r|rcl} 2 & 3x+7y & = & 28 \\ -3 & 2x+4y & = & 18 \\ \hline & 6x+14y & = & 56 \\ & -6x-12y & = & -54 \\ \hline & +2y & = & 2 \\ \text{ἄρα} & y & = & 1. \end{array}$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν, μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, π. χ. $y=1$, δὲν γράφομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα II, ἀλλ' ἀντικαθιστῶμεν ἀμέσως εἰς μίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος τὸν y μὲ τὴν τιμήν του 1 καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.

Παρατήρησις. **Διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα ἄγνωστον μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους, δὲν εἶναι ἀνάγκη πάντοτε νὰ πολλαπλασιάζωμεν καὶ τὰ δύο μέλη ἑκάστης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου, ποὺ ἔχει ἡ ἄλλη ἐξίσωσις. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, κοινὸν συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου, ποὺ θέλομεν νὰ ἀπαλείψωμεν, τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν του. Διαιροῦμεν ἔπειτα αὐτὸ τὸ ἐ.κ.π. δι' ἑκά-**

στου τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀγνώστου καὶ πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη ἑκάστης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον.

Ἔστω, π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 15x-12y=36 & (1) \\ 7x+9y=46 & (2) \end{cases}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν y. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν του 12 καὶ 9 εἶναι τὸ 36. Τὰ πηλίκα τοῦ 36 διὰ 12 καὶ διὰ 9 εἶναι ἀντιστοίχως 3 καὶ 4. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 3 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 4 καὶ ἔχομεν κατὰ σειράν:

Ἀπαλοιφὴ τοῦ y

$$\begin{array}{c|r} 3 & 15x-12y=36 \\ 4 & 7x+9y=46 \\ \hline & 45x-36y=108 \\ & 28x+36y=184 \\ \hline & 73x \quad =292 \end{array}$$

$$\text{ἄρα} \quad x=\frac{292}{73}=4.$$

Ἔπειτα ἐργαζόμενοι, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, εὑρίσκομεν, ὅτι $y=2$.

Ἀσκήσεις: *1628, 1629, 1630, 1634, 1635, 1636, 1637*.

321. II. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\text{I} \begin{cases} 3x+2y=18 & (1) \\ 5x-4y=8 & (2) \end{cases}$$

Λύομεν μίαν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος, ἔστω τὴν πρώτην, πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἔστω πρὸς **x**, θεωροῦντες ὡς γνωστὸν τὸν ἄγνωστον y καὶ ἔχομεν

$$3x=18-2y \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{18-2y}{3} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ **x** μὲ τὴν τιμήν του, ποὺ δίδει ἡ ἐξίσωσις (3) καὶ ἔχομεν

$$5\cdot\left(\frac{18-2y}{3}\right)-4y=8 \qquad (4)$$

Ἡ ἐξίσωσις (4) καὶ ἡ ἐξίσωσις (3), ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1), ἀποτελοῦν τὸ σύστημα:

$$\text{II} \begin{cases} x=\dfrac{18-2y}{3} & (2) \\ 5\cdot\left(\dfrac{18-2y}{3}\right)-4y=8 & (4) \end{cases}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα I.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (4), ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν y, καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$5(18-2y)-12y=24 \quad ἢ \quad 90-10y-12y=24 \quad ἢ \quad -10y-12y=-90+24$$
$$ἢ \quad -22y=-66 \quad ἢ \quad 22y=66 \quad ἄρα \quad y=3.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 3 καὶ ἔχομεν :

$$x=\frac{18-2\cdot 3}{3} \quad ἢ \quad x=4.$$

Τὸ σύστημα II, ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμον δοθὲν σύστημα, ἔχει τὴν λύσιν

$$x=4, \quad y=3.$$

Ἀσκήσεις : 1638, 1639, 1640, 1641, 1642.

322 Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x-3y=1 & (1) \\ 5x+4y=37 & (2) \end{cases}$$

Λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος πρὸς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, ἔστω πρὸς **x**, θεωροῦντες ὡς γνωστὸν τὸν ἄλλον ἄγνωστον y.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $2x=1+3y$ ἢ $x=\dfrac{1+3y}{2}$ (3)

Ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει $5x=37-4y$ ἢ $x=\dfrac{37-4y}{5}$ (4)

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ **x**, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4), πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{1+3y}{2}=\frac{37-4y}{5}.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$5(1+3y)=2(37-4y) \quad ἢ \quad 5+15y=74-8y \quad ἢ \quad 15y+8y=74-5$$
$$ἢ \quad 23y=69, \quad ἄρα \quad y=3.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 3 καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{1+3\cdot 3}{2} \quad ἢ \quad x=5.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=5$, $y=3$.

Ἀσκήσεις : 1644, 1645, 1646, 1647.

323. Παρατήρησις. Τὰ συστήματα, τὰ ὁποῖα ἐλύσαμεν καὶ μὲ τὰς τρεῖς μεθόδους, εἶχον τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'. \end{cases}$$

Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ μᾶς δείξῃ, πῶς λύομεν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει τὴν γενικὴν μορφήν.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\text{I}\ \begin{cases} 2(3x-y)-3(y-x)=21 & (1)\\ \dfrac{2x+4y}{5}+\dfrac{3x-y}{3}=2y+1 & (2)\end{cases}$$

Ἐν πρώτοις δίδομεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα τὴν γενικὴν μορφήν του (§ 318).

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$6x-2y-3y+3x=21 \quad \text{ἢ} \quad 9x-5y=21 \qquad (1')$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$3(2x+4y)+5(3x-y)=30y+15 \quad \text{ἢ} \quad 6x+12y+15x-5y=30y+15$$
$$\text{ἢ} \quad 6x+12y+15x-5y-30y=15 \quad \text{ἢ} \quad 21x-23y=15 \qquad (2')$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος μὲ τὰς ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις των (1′) καὶ (2′) καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\text{II}\ \begin{cases} 9x-5y=21 & (1')\\ 21x-23y=15 & (2')\end{cases}$$

Λύομεν ἔπειτα τὸ σύστημα II μὲ μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $x=4, \quad y=3$.

Ἀσκήσεις: *1650, 1651, 1652, 1653, 1657, 1658, 1660, 1662, 1663.*

3. Διερεύνησις ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους

324 Διερεύνησις ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Εἴδομεν, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\text{I}\ \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha x'+\beta' y=\gamma'.\end{cases}$$

Ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Ἀλλὰ μία ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ μίαν ρίζαν ἢ νὰ εἶναι ἀδύνατος ἢ νὰ εἶναι ἀόριστος. Ἑπομένως καὶ τὸ σύστημα δύναται νὰ ἔχῃ μίαν λύσιν ἢ νὰ εἶναι ἀδύνατον ἢ νὰ εἶναι ἀόριστον.

Διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ διερευνήσωμεν τὸ σύστημα (I).

Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ διερευνήσωμεν τὸ σύστημα I, σημαίνει, ὅτι θὰ ἐξετάσωμεν νὰ εὕρωμεν διὰ ποίας ἰδιαιτέρας τιμὰς τῶν γραμμάτων α, β, γ, α′, β′, γ′ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν, εἶναι ἀδύνατον ἢ εἶναι ἀόριστον.

325. Πρόβλημα. *Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα*

$$(A) \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma & (1) \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' & (2) \end{cases}$$

Ἔστω, ὅτι οἱ α, β, γ, α′, β′, γ′ εἶναι δεδομένοι ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενός.

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$x = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν:

$$\alpha' \cdot \frac{\gamma - \beta y}{\alpha} + \beta' y = \gamma' \quad ἢ \quad \alpha'\gamma - \alpha'\beta y + \alpha\beta' y = \alpha\gamma'$$

$$ἢ \quad (\alpha\beta' - \beta\alpha')y = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Α μὲ τὰς (3) καὶ (4) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$B \begin{cases} x = \dfrac{\gamma - \beta y}{\alpha} & (3) \\ (\alpha\beta' - \beta\alpha')y = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma & (4) \end{cases}$$

1. Ἔστω $(\alpha\beta' - \beta\alpha') \neq 0$. Ἐὰν $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$, δηλ. ἐὰν $\alpha\beta' \neq \beta\alpha'$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$, ἡ (4) δίδει $y = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν

$$x = \frac{\gamma - \beta \cdot \dfrac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}}{\alpha} = \frac{\gamma(\alpha\beta' - \beta\alpha') - \beta(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)}{\alpha(\alpha\beta' - \beta\alpha')} =$$

$$= \frac{\gamma\alpha\beta' - \gamma\beta\alpha' - \beta\alpha\gamma' + \beta\alpha'\gamma}{\alpha(\alpha\beta' - \beta\alpha')} = \frac{\alpha(\beta'\gamma - \beta\gamma')}{\alpha(\alpha\beta' - \beta\alpha')} = \frac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα Α ἔχει τὴν λύσιν:

$$\boxed{x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \quad \bigg| \quad y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}} \qquad (5)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Α τοὺς ἀγνώστους x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των (5), παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπαληθεύονται.

Ἡ λύσις (5) εἶναι μηδέν, δηλ. $x=0$, $y=0$, ἐὰν $\gamma=\gamma'=0$.

Ὥστε: *Ἐὰν* $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$, *τὸ σύστημα Ι ἔχει μίαν λύσιν.*

ΙΙ. Ἔστω $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$. Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, δὲν δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (4) διὰ τοῦ μηδενός.

Ἐδῶ δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν δύο περιπτώσεις, διότι, ὅταν τὸ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, τὸ $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$ δύναται νὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς ἢ ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

1ον. Ἐὰν $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'\neq 0$, δηλ. ἐὰν εἶναι $\alpha\gamma'\neq\gamma\alpha'$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$0\cdot y=\alpha\gamma'-\gamma\alpha' \quad \text{ἢ} \quad 0=\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος καὶ ἑπομένως καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν.

Ὥστε: *Ἐὰν* $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$ *καὶ* $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$, *δηλ. ἐὰν* $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$ *τὸ σύστημα Α εἶναι ἀδύνατον*

2ον. Ἐὰν $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$0\cdot y=0 \quad \text{ἢ} \quad 0=0.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν $\alpha\gamma'-\gamma\alpha'=0$, ἡ ἐξίσωσις (4) ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν τοῦ y. Εἰς κάθε αὐθαίρετον τιμὴν τοῦ y ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ x, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (3). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα Α ἔχει ἀπειρίαν λύσεων, εἶναι ἀ ό ρ ι σ τ ο ν.

Ὥστε: *Ἐὰν* $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$ *καὶ* $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, *δηλ. ἐὰν* $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$ *τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.*

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις: *Ι. Ἐὰν* $\alpha'=\beta'=0$, *οἱ δύο ἄγνωστοι μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως ἐξαφανίζονται.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα Α λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \qquad 0=\gamma'. \end{cases}$$

Ἐὰν $\gamma'=0$, τότε τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους καὶ ἑπομένως εἶναι ἀ ό ρ ι σ τ ο ν (§ 310).

Ἐὰν $\gamma'\neq 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν.

Τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἐφαρμόζομεν, ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta=0$.

II Ἐὰν $\alpha=\alpha'=0$, ὁ ἕνας ἐκ τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος ἐξαφανίζεται·

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} \beta y=\gamma \\ \beta' y=\gamma' \end{cases} \quad \text{ἀπὸ τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν} \quad \begin{cases} y=\dfrac{\gamma}{\beta} \\ y=\dfrac{\gamma'}{\beta'}. \end{cases}$$

Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\gamma'}{\beta'}$ ἢ $\dfrac{\gamma}{\gamma'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$, τὸ σύστημα εἶναι ἀ ό ρ ι σ τ ο ν, διότι ἔχει τὰς λύσεις :

$$\begin{cases} x=\text{οἱοσδήποτε} \\ y=\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\gamma'}{\beta'}. \end{cases}$$

Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\beta}\neq\dfrac{\gamma'}{\beta'}$ ἢ $\dfrac{\gamma}{\gamma'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$ τὸ σύστημα εἶναι προφανῶς ἀ δ ύ ν α τ ο ν.

Οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ ἐφαρμόζονται, ἐὰν εἶναι $\beta=\beta'=0$.

III. Ἐὰν $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=0$, ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδέν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα I γίνεται

$$\begin{cases} 0x+0y=\gamma \\ 0x+0y=\gamma' \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} 0=\gamma \\ 0=\gamma'. \end{cases}$$

Ἐὰν $\gamma=\gamma'=0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀ ό ρ ι σ τ ο ν, διότι καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις του λαμβάνουν τὴν μορφὴν

$$0x+0y=0.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ σύστημα ἔχει μίαν δ ι π λ ῆ ν ἀ ο ρ ι σ τ ί α ν, διότι καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις του ἐπαληθεύονται δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν **x** καὶ **y**.

Ἐὰν γ ἢ $\gamma'\neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν.

Πίναξ διερευνήσεως τοῦ συστήματος :

$$\text{I}\quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'. \end{cases}$$

Α'. Γενικὴ περίπτωσις :

Ἐὰν I. $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$

1ον. $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$: μοναδικὴ λύσις

$$\begin{cases} x=\dfrac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'} \\ y=\dfrac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\gamma\alpha'} \end{cases}$$

2ον. $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}\neq\dfrac{\gamma}{\gamma'}, & \text{ἀδύνατον} \\ \dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\gamma'}=\dfrac{\gamma}{\gamma'}, & \text{ἀόριστον} \end{cases}$$

Β'. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις :

I. $\alpha'=\beta'=0$ { Ἐὰν $\gamma'=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον
Ἐὰν $\gamma'\neq 0$ » » » ἀδύνατον

II. $\alpha=\alpha'=0$ { Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\gamma'}=\dfrac{\beta}{\beta'}$ θὰ εἶναι x=τυχὼν ἀριθ., $y=\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\gamma'}{\beta'}$
Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\gamma'}\neq\dfrac{\beta}{\beta'}$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον

III. $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=0$ { Ἐὰν $\gamma=\gamma'=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον
Ἐὰν γ ἢ $\gamma'\neq 0$ » » » ἀδύνατον.

Ἀπὸ τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ ἀνωτέρω πίνακος συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ γενικὸν σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους μίαν μοναδικὴν λύσιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\boxed{\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0}$$

326. Ἐφαρμογαὶ τῆς διερευνήσεως. ***Πρόβλημα.*** *Χωρὶς νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα, νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἔχει μίαν λύσιν, ποῖον εἶναι ἀδύνατον καὶ ποῖον εἶναι ἀόριστον.*

$$\text{A}\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 9x+15y=20 \end{cases}\quad \text{B}\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=11 \end{cases}\quad \Gamma\begin{cases} x-2y=-1 \\ -3x+6y=3. \end{cases}$$

Ἐξετάζομεν τοὺς λόγους τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων.

1ον. Εἰς τὸ σύστημα Α ἔχομεν $\dfrac{3}{9}=\dfrac{5}{15}\neq\dfrac{8}{20}$· ἄρα τὸ σύστημα Α εἶναι ἀδύνατον.

2ον. Εἰς τὸ σύστημα Β εἶναι $\dfrac{2}{3}\neq-\dfrac{1}{2}$, δηλ. οἱ λόγοι τῶν συν-

τελεστῶν τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἶναι διάφοροι· ἄρα τὸ σύστημα Β ἔχει μίαν λύσιν.

3ον. Εἰς τὸ σύστημα Γ εἶναι $\frac{1}{-3}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$, δηλ. οἱ λόγοι τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων εἶναι ἴσοι· ἄρα τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι ἀόριστον.

Ἀσκήσεις : 1664, 1665, 1666, 1667, 1668.

327. Παραδείγματα διερευνήσεως ἐγγραμμάτων συστημάτων. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος ἐξαρτῶνται ἀπὸ π α ρ α μ έ τ ρ ο υ ς, εἶναι καλὸν νὰ ὁρίζωμεν τὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων αὐτῶν, διὰ τὰς ὁποίας τὸ σύστημα εἶναι δυνατόν, ἀδύνατον ἢ ἀόριστον. Δυνάμεθα πρὸς τοῦτο νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ συμπεράσματα τοῦ πίνακος διερευνήσεως (§ 325) ἢ νὰ ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τὰ ἀριθμητικὰ συστήματα.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 3\alpha x+2\beta y=\gamma & (1)\\ \alpha x-3\beta y=4\gamma & (2)\end{cases}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν ἄγνωστον x μὲ τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ —1 καὶ τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$\begin{array}{r|r} -1 & 3\alpha x+2\beta y=\gamma\\ 3 & \alpha x-3\beta y=4\gamma\\ \hline & -3\alpha x-2\beta y=-\gamma\\ & 3\alpha x-9\beta y=12\gamma\\ \hline & -11\beta y=11\gamma. \end{array}$$

Ἐὰν $\beta\neq0$, θὰ εἶναι $y=-\frac{11\gamma}{11\beta}$ ἢ $y=-\frac{\gamma}{\beta}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν $\alpha x-3\beta\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right)=4\gamma$ ἢ $\alpha x+3\gamma=4\gamma$ ἢ $\alpha x=\gamma$.

Ἐὰν $\alpha\neq0$, εὑρίσκομεν $x=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $\left(x=\frac{\gamma}{\alpha},\ y=-\frac{\gamma}{\beta}\right)$, ἐὰν $\alpha\neq0$ καὶ $\beta\neq0$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=2\alpha & (1)\\[2mm] \dfrac{x-y}{2\alpha\beta}=\dfrac{x+y}{\alpha^2+\beta^2} & (2)\end{cases}$$

Δίδομεν εἰς τὸ σύστημα τὴν γενικὴν μορφήν του.

Ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ παρονομασταὶ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Ἐξαλείφομεν παρονομαστὰς κλπ. καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)y=2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \qquad (1')$$

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$(\alpha^2+\beta^2)(x-y)=2\alpha\beta(x+y) \quad ἤ \quad (\alpha^2+\beta^2)x-(\alpha^2+\beta^2)y=2\alpha\beta x+2\alpha\beta y \quad ἤ$$

$$(\alpha^2+\beta^2)x-(\alpha^2+\beta^2)y-2\alpha\beta x-2\alpha\beta y=0 \quad ἤ \quad (\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)x-(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)y=0$$

$$ἤ \quad (\alpha-\beta)^2x-(\alpha+\beta)^2y=0 \qquad (2')$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1′) καὶ (2′) μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως.

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (2′) πρὸς x καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{(\alpha+\beta)^2y}{(\alpha-\beta)^2} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1′) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν

$$(\alpha-\beta)\cdot\frac{(\alpha+\beta)^2y}{(\alpha-\beta)^2}+(\alpha+\beta)y=2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

$$ἤ \quad (\alpha+\beta)^2y+(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)y=2\alpha(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2$$

ἁπλοποιοῦμεν διὰ $\alpha+\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)y+(\alpha-\beta)y=2\alpha(\alpha-\beta)^2 \quad ἤ \quad (\alpha+\beta+\alpha-\beta)y=2\alpha(\alpha-\beta)^2$$

$$ἤ \quad 2\alpha y=2\alpha(\alpha-\beta)^2, \quad ἤ \; ἐπειδὴ \; \alpha\neq0, \quad y=(\alpha-\beta)^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} \quad ἤ \quad x=(\alpha+\beta)^2.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν: $x=(\alpha+\beta)^2$, $y=(\alpha-\beta)^2$.

328. Πρόβλημα 1ον. *Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ σύστημα*

$$\begin{cases} (\lambda-3)x+(\lambda+7)y=8 \\ 4x+5y \quad =1+\lambda. \end{cases}$$

εἶναι ἀδύνατον ;

Διὰ νὰ εἶναι τὸ δοθὲν σύστημα ἀδύνατον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\underbrace{\frac{\lambda-3}{4}=\frac{\lambda+7}{5}}_{(1)}\neq\frac{8}{1+\lambda}\cdot$$

Ἡ ἰσότης (1) δίδει $5(\lambda-3)=4(\lambda+7)$

$$ἤ \quad 5\lambda-15=4\lambda+28 \quad ἤ \quad 5\lambda-4\lambda=15+28 \quad ἤ \quad \lambda=43.$$

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ λ πρέπει νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν σχέσιν $\frac{\lambda-3}{4}\neq\frac{8}{1+\lambda}$.

Πράγματι διὰ $\lambda=43$ ἔχομεν, $\frac{40}{4}\neq\frac{8}{44}$.

Ὥστε, ἐὰν $\lambda=43$, τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

329. Πρόβλημα 2ον. *Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ τὸ σύστημα*

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)x+(2\lambda-3)y=\lambda\mu \\ (\lambda-\mu)x+(\mu-5)y=2\lambda\mu \end{cases}$$

εἶναι ἀόριστον ;

Διὰ νὰ εἶναι τὸ δοθὲν σύστημα ἀόριστον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι, ἐὰν $\lambda\neq 0$ καὶ $\mu\neq 0$

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}=\frac{2\lambda-3}{\mu-5}=\frac{\lambda\mu}{2\lambda\mu}=\frac{1}{2}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν τὰς ἰσότητας

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}=\frac{1}{2} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{2\lambda-3}{\mu-5}=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν

$$2(\lambda+\mu)=\lambda-\mu \quad \text{ἢ} \quad 2\lambda+2\mu-\lambda+\mu=0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda+3\mu=0 \qquad (1')$$

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν

$$2(2\lambda-3)=\mu-5 \quad \text{ἢ} \quad 4\lambda-6=\mu-5 \quad \text{ἢ} \quad 4\lambda-\mu=6-5 \quad \text{ἢ} \quad 4\lambda-\mu=1 \quad (2')$$

Αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τῶν λ καὶ μ δίδονται ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1′) καὶ (2′)· δηλ. ἀπὸ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \lambda+3\mu=0 \\ 4\lambda-\mu=1. \end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\lambda=\frac{3}{13}, \quad \mu=-\frac{1}{13}.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα θὰ εἶναι ἀόριστον, ἐὰν

$$\lambda=\frac{3}{13} \quad \text{καὶ} \quad \mu=-\frac{1}{13}.$$

Ἐὰν ὑποτεθῇ λ=0, μ=ο, τὸ δοθὲν σύστημα γίνεται $-3y=0$, $-5y=0$ καὶ ἔχει ὡς λύσιν : x=τυχὼν ἀριθμός, y=0.

Ἀσκήσεις : 1669, 1671, 1673, 1675, 1676, 1680, 1684, 1685, 1688, 1690, 1692, 1696, 1697, 1700, 1702.

330. Ἄλλη μέθοδος λύσεως συστημάτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. ***Κανὼν τοῦ*** *Gramer*. Εἴδομεν, ὅτι ἡ λύσις τοῦ γενικοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}, \quad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀμέσως τοὺς τύπους (1) παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν $\alpha\beta'-\beta\alpha'$.

Ἡ διαφορὰ αὐτὴ $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ λέγεται ὁ ρ ί ζ ο υ σ α *τῶν συντελεστῶν $\alpha, \beta, \alpha'\ \beta'$ καὶ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

Ἐξ ὁρισμοῦ λοιπὸν εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta'-\beta\alpha'$$

οἱοιδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι οἱ συντελεσταὶ $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Π. χ. θὰ εἶναι $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6-5\cdot 4=18-20=-2$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4)-3(-1)=8+3=11.$$

Οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τύπων (1) εἶναι ἐπίσης ὁρίζουσαι, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ γραφοῦν μὲ τὸ σύμβολον τῆς ὁριζούσης.

Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ x, $A_x=\gamma\beta'-\beta\gamma'$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς α καὶ α' τοῦ x διὰ τῶν γνωστῶν ὅρων γ καὶ γ'· δηλ. εἶναι

$$A_x=\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}=\gamma\beta'-\beta\gamma'.$$

Ὁμοίως ὁ ἀριθμητὴς τοῦ y, $A_y=\alpha\gamma'-\gamma\alpha'$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοὺς συντελεστὰς β καὶ β' τοῦ y διὰ τῶν γνωστῶν ὅρων γ καὶ γ', δηλ. εἶναι

$$A_y=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}=\alpha\gamma'-\gamma\alpha'.$$

Οἱ τύποι (1) δύνανται λοιπὸν νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι εἶναι γνωστοὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα τ ύ π ο ι τ ο ῦ G r a m e r.

***Κανὼν τοῦ** Gramer. Οἱ τύποι, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὴν λύσιν ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ y εἶναι κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμητὴς προκύπτει ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἐξεταζομένου ἀγνώστου μὲ τοὺς γνωστοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ εἶναι γραμμένοι πάντοτε εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἑκάστης ἐξισώσεως.*

Π. χ. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Gramer τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x-3y=34 \\ -5x+y=-33 \end{cases}$$

ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 34 & -3 \\ -33 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{34\cdot 1-(-3)(-33)}{2\cdot 1-(-3)(-5)}=\frac{34-99}{2-15}=\frac{-65}{-13}=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 34 \\ -5 & -33 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2(-33)-34(-5)}{-13}=\frac{-66+170}{-13}=\frac{104}{-13}=-8.$$

Ἀσκήσεις : 1705, 1707, 1708, 1709, 1710.

331. Ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνος Gramer εἰς τὴν διερεύνησιν συστημάτων. ***Πρόβλημα.*** *Νὰ λυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα :*

$$\text{I}\quad \begin{cases} x+\mu y=2 \\ \mu x-4\mu y=(3\mu+4). \end{cases}$$

Ἡ ὁρίζουσα τῶν ἀγνώστων εἶναι

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -4\mu \end{vmatrix}=-4\mu-\mu^2=-\mu(\mu+4).$$

Περίπτωσις 1η. Ὑποθέτομεν, ὅτι $-\mu(\mu+4)\neq 0$, δηλ. ὅτι $\mu\neq 0$ καὶ $\mu\neq -4$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα I ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & \mu \\ 3\mu+4 & -4\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -4\mu \end{vmatrix}}=\frac{-8\mu-\mu(3\mu+4)}{-\mu(\mu+4)}=\frac{-8\mu-3\mu^2-4\mu}{-\mu(\mu+4)}=\frac{-3\mu(\mu+4)}{-\mu(\mu+4)}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \mu & 3\mu+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ \mu & -4\mu \end{vmatrix}}=\frac{3\mu+4-2\mu}{-\mu(\mu+4)}=\frac{\mu+4}{-\mu(\mu+4)}=-\frac{1}{\mu}.$$

Περίπτωσις 2α. Ὑποθέτομεν, ὅτι $-\mu(\mu+4)=0$, δηλ., ὅτι εἶναι εἴτε $\mu=0$, εἴτε $\mu=-4$.

Ἐὰν $\mu=0$, τὸ δοθὲν σύστημα I λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\begin{cases} x+0y=2 \\ 0x-0y=4 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} x=2 \\ 0=4 \end{cases}$$

καὶ ἑπομένως εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν $\mu=-4$, τὸ δοθὲν σύστημα I λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\begin{cases} x-4y=2 \\ -4x+16y=-12+4 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} x-4y=2 \\ -4x+16y=-8. \end{cases}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $-\frac{1}{4}=-\frac{4}{16}=-\frac{2}{8}$, δηλ. ἐπειδὴ οἱ λόγοι τῶν

συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων εἶναι ἴσοι, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

Ἀσκήσεις : 1711, 1712, 1713, 1715, 1716.

4. Συστήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους καί, γενικῶς, μὲ ν ἐξισώσεις καὶ ν ἀγνώστους

332. Λύσις ἑνὸς συστήματος τριῶν ἐξισώσεων, μὲ τρεῖς ἀγνώστους Ἕνα σύστημα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους δύναται πάντοτε νὰ λάβῃ τὴν γενικὴν μορφήν:

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} \alpha\, x+\beta\, y+\gamma\, \omega=\delta \\ \alpha'\, x+\beta'\, y+\gamma'\, \omega=\delta' \\ \alpha''x+\beta''y+\gamma''\omega=\delta'' \end{cases}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα τῆς μορφῆς I χρησιμοποιοῦμεν τὰς αὐτὰς μεθόδους, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν καὶ εἰς τὰ συστήματα μὲ δύο ἀγνώστους.

333. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{array}{r|r|l} 2x+3y-\omega=12 & 1 & 3 \\ x-5y+3\omega=-13 & -2 & \\ -3x+7y+2\omega=29 & & 2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x, μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 1 καὶ τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ −2 καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις:

$$2x+3y-\omega=12$$
$$-2x+10y-6\omega=26.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$13y-7\omega=38 \tag{4}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 3 καὶ τῆς (3) ἐπὶ 2 καὶ λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$6x+9y-3\omega=36$$
$$-6x+14y+4\omega=58.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$23y+\omega=94 \tag{5}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα τὴν ἐξίσωσιν (2) διὰ τῆς (4) καὶ τὴν ἐξίσωσιν (3) διὰ τῆς (5) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} 2x+3y-\omega=12 & (1) \\ 13y-7\omega=38 & (4) \\ 23y+\omega=94 & (5) \end{cases}$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν $y=4$, $\omega=2$.

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν

$$2x+3\cdot 4-2=12, \quad \text{ἄρα} \quad x=1.$$

Ὥστε τό δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=1,\ y=4,\ \omega=2)$.

334. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα :

$$(\text{A}) \begin{cases} 5x+2y-2\omega=15 & (1)\\ x-4y+3\omega=24 & (2)\\ 3x+5y+\omega=-4 & (3) \end{cases}$$

Ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x, μεταξὺ τῶν τριῶν ἐξισώσεων. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (2) πρὸς x (διότι εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν συντελεστὴς τοῦ x εἶναι ὁ 1) καὶ ἔχομεν

$$x=24+4y-3\omega \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις (1) καὶ (3) τοῦ συστήματος (A) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του αὐτήν.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του $24+4y-3\omega$, λαμβάνομεν

$$5(24+4y-3\omega)+2y-2\omega=15 \quad \text{ἢ} \quad 120+20y-15\omega+2y-2\omega=15$$

$$\text{ἢ} \quad 20y-15\omega+2y-2\omega=-120+15 \quad \text{ἢ} \quad 22y-17\omega=-105 \qquad (5)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του $24+4y-3\omega$, λαμβάνομεν

$$3(24+4y-3\omega)+5y+\omega=-4 \quad \text{ἢ} \quad 72+12y-9\omega+5y+\omega=-4$$

$$\text{ἢ} \quad 12y-9\omega+5y+\omega=-72-4 \quad \text{ἢ} \quad 17y-8\omega=-76 \qquad (6)$$

Αἱ ἐξισώσεις (4), (5), (6) ἀποτελοῦν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(\text{B}) \begin{cases} x=24+4y-3\omega & (4)\\ 22y-17\omega=-105 & (5)\\ 17y-8\omega=-76 & (6) \end{cases}$$

Αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν

$$y=-4, \quad \omega=1.$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) καὶ εὑρίσκομεν

$$x=24+4\cdot(-4)-3\cdot 1 \quad \text{ἢ} \quad x=5.$$

Ὥστε τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=5,\ y=-4,\ \omega=1)$.

335. Γενικὸς κανών. **Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως καὶ ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως ἐφαρμόζονται γενικῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ σύστημα ἔχει ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους.**

Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους μὲ

τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως ἢ δι' ἀντικαταστάσεως, ἀκολουθοῦμεν γενικῶς τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών. *Ἀπαλείφομεν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον μεταξὺ τῶν ν ἐξισώσεων καὶ λαμβάνομεν ἕνα νέον σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους καὶ (ν—1) ἐξισώσεις μὲ (ν—1) ἀγνώστους.*

Ἀπαλείφομεν ἔπειτα ἕνα δεύτερον ἄγνωστον μεταξὺ τῶν (ν—1) ἐξισώσεων καὶ λαμβάνομεν ἕνα νέον σύστημα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ἐξίσωσιν μὲ ν ἀγνώστους, μίαν ἄλλην ἐξίσωσιν μὲ (ν—1) ἀγνώστους καὶ (ν—2) ἐξισώσεις μὲ (ν—2) ἀγνώστους.

Συνεχίζομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μέχρις ὅτου λάβωμεν ἕνα σύστημα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ :

1	*ἐξίσωσιν*	*μὲ*	*ν*	*ἀγνώστους*
1	»	»	*ν - 1*	»
1	»	»	*ν—2*	»
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
2	*ἐξισώσεις*	*μὲ*	*2*	*ἀγνώστους.*

Λύομεν ἔπειτα τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν θέτομεν εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν μὲ τοὺς 3 ἀγνώστους, ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ τρίτου ἀγνώστου. Ἔπειτα προχωροῦμεν ὁμοίως εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὅλας τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

336. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$(A)\begin{cases} 3x+2y-5\omega=64 & (1)\\ 4x-3y+2\omega=-18 & (2)\\ 5x+4y+3\omega=20 & (3)\end{cases}$$

Λύομεν καὶ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις πρὸς ἕναν ἄγνωστον, ἔστω πρὸς x, θεωροῦντες τοὺς ἄλλους ἀγνώστους ὡς γνωστοὺς καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{64-2y+5\omega}{3}\quad(1'),\qquad x=\frac{-18+3y-2\omega}{4}\quad(2'),\qquad x=\frac{20-4y-3\omega}{5}\quad(3')$$

Ἐξισώνομεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1'), (2'), (3') καὶ ἔχομεν :

$$\frac{64-2y+5\omega}{3}=\frac{-18+3y-2\omega}{4}=\frac{20-4y-3\omega}{5}.$$

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{64-2y+5\omega}{3}=\frac{-18+3y-2\omega}{4}$ δίδει

$$4(64-2y+5\omega)=3(-18+3y-2\omega)\quad ἢ\quad 256-8y+20\omega=-54+9y-6\omega$$

$$ἢ\quad -8y+20\omega-9y+6\omega=-256-54\quad ἢ\quad -17y+26\omega=-310\qquad(4)$$

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{64-2y+5\omega}{3}=\frac{20-4y-3\omega}{5}$ δίδει

$5(64-2y+5\omega)=3(20-4y-3\omega)$ ἢ $320-10y+25\omega=60-12y-9\omega$

ἢ $-10y+25\omega+12y+9\omega=-320+60$ ἢ $2y+34\omega=-260$ (5)

Αἱ ἐξισώσεις (1′), (4) καὶ (5) ἀποτελοῦν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$B\left|\begin{array}{ll} x=\dfrac{64-2y+5\omega}{3} & (1')\\ -17y+26\omega=-310 & (4)\\ 2y+34\omega=-260 & (5)\end{array}\right.$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $y=6,\quad \omega=-8.$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1′) καὶ εὑρίσκομεν $x=\frac{64-2\cdot 6+5(-8)}{3}=4.$

Ὥστε τὸ σύστημα Α ἔχει τὴν λύσιν : $x=4,\quad y=6,\quad \omega=-8.$

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἐφαρμόζεται γενικῶς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ σύστημα ἔχει ν ἀγνώστους.

Ἀσκήσεις : 1730, 1731, 1732, 1733, 1734, 1735, 1736.

337. Συστήματα ἀδύνατα ἢ ἀόριστα. Ὅπως τὰ συστήματα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, οὕτω καὶ ἕνα σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους, δύναται νὰ ἔχῃ μίαν λύσιν, ἢ νὰ εἶναι ἀδύνατον ἢ νὰ εἶναι ἀόριστον.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$(A)\left\{\begin{array}{l|c|c|l} 3x+6y-3\omega=8 & 1 & 4 & (1)\\ -x+5y+2\omega=10 & 3 & & (2)\\ 4x+y-5\omega=6 & & -3 & (3)\end{array}\right.$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 1 καὶ τῆς (2) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν

$$3x+6y-3\omega=8$$
$$-3x+15y+6\omega=30.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$21y+3\omega=38. \qquad (4)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 4 καὶ τῆς (3) ἐπὶ −3 καὶ ἔχομεν

$$12x+24y-12\omega=32$$
$$-12x-3y+15\omega=-18.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$21y+3\omega=14 \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) μὲ τὰς (4) καὶ (5) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(\text{B}) \begin{cases} 3x+6y-3\omega=8 & (1) \\ 21y+3\omega=38 & (4) \\ 21y+3\omega=14 & (5) \end{cases}$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις (4) καὶ (5) εἶναι ἀσυμβίβαστοι, διότι ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα καὶ διάφορα τὰ δεύτερα μέλη των· ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Σημ. Τὸ ἀδύνατον τοῦ συστήματος φαίνεται ἀμέσως, ἂν παρατηρήσωμεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξιώσεως (1) εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει καὶ μὲ τὰ δεύτερα μέλη των.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$(\text{A}) \begin{cases} 3x-y+7\omega=11 & \quad 2 & \quad -1 & (1) \\ -2x+4y-5\omega=5 & \quad 3 & & (2) \\ x+3y+2\omega=16 & & \quad 3 & (3) \end{cases}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ 2, τῆς δὲ ἐξισώσεως (2) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν

$$6x-2y+14\omega=22$$
$$-6x+12y-15\omega=15.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$10y-\omega=37 \qquad (4)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον x μεταξὺ τῶν (1) καὶ (3).

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ −1 καὶ τῆς (3) ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν

$$-3x+y-7\omega=-11$$
$$3x+9y+6\omega=48.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$10y-\omega=37 \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) τοῦ δοθέντος συστήματος μὲ τὰς (4) καὶ (5) καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(\text{B}) \begin{cases} 3x-y+7\omega=11 & (2) \\ 10y-\omega=37 & (4) \\ 10y-\omega=37 & (5) \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (4) καὶ (5) τοῦ συστήματος (B) εἶναι αἱ αὐταί· ἄρα τὸ σύστημα ἔχει δύο μόνον ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους καὶ ἐπομένως εἶναι ἀόριστον.

Σημ. **Ἡ ἀοριστία τοῦ συστήματος φαίνεται ἀμέσως, ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι ἴσα μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῶν δύο ἄλλων ἐξισώσεων.**

Ἀσκήσεις : 1737, 1738, 1739, 1740.

5. Συστήματα ἐπιδεχόμενα εἰδικὸν τρόπον λύσεως

338. Λύσις συστημάτων διὰ τεχνασμάτων. Ὅλα τὰ συστήματα δύνανται νὰ λυθοῦν μὲ μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς γενικὰς μεθόδους, ποὺ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν § 319. Μερικὰ ὅμως ἰδιαίτερα συστήματα δύνανται νὰ λυθοῦν ἁπλούστερον καὶ ταχύτερον, ἂν χρησιμοποιήσωμεν εἰδικοὺς τρόπους λύσεως (τεχνάσματα), οἱ ὁποῖοι συνίστανται, εἴτε εἰς κατάλληλον ἐκλογὴν τῶν ἀγνώστων, ποὺ πρόκειται νὰ ἀπαλείψωμεν, εἴτε εἰς τὸν συνδυασμὸν μεταξὺ τῶν πολλῶν ἐξισώσεων, εἴτε εἰς ἄλλα μέσα, τὰ ὁποῖα ἡ μακρὰ πεῖρα δύναται νὰ εὕρη.

339. I. Χρῆσις βοηθητικοῦ ἀγνώστου *Παράδειγμα 1ον.* *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{\omega}{2} & (1)\\ 2x+3y-\omega=48 & (2)\end{cases}$$

Παριστάνομεν τὰ ἴσα κλάσματα τῆς σχέσεως (1) μὲ ἕνα βοηθητικὸν ἄγνωστον· πρὸς τοῦτο θέτομεν $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{\omega}{2}=\lambda$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν $x=3\lambda$, $y=4\lambda$, $\omega=2\lambda$. (3)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰ x, y, ω μὲ τὰς τιμάς των αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$2\cdot 3\lambda+3\cdot 4\lambda-2\lambda=48$ ἢ $6\lambda+12\lambda-2\lambda=48$ ἢ $16\lambda=48$, ἄρα $\lambda=3$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ λ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ εὑρίσκομεν

$$x=9,\quad y=12,\quad \omega=6,$$

Ἀσκήσεις: 1741, 1742, 1743, 1744, 1745, 1746.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$(A)\begin{cases} 3x+2(y+\omega+\varphi)=42\\ 3y+2(\omega+\varphi+x)=44\\ 3\omega+2(\varphi+x+y)=46\\ 3\varphi+2(x+y+\omega)=48.\end{cases}$$

Θέτομεν $x+y+\omega+\varphi=\tau$ (1), ὁπότε θὰ εἶναι

$y+\omega+\varphi=\tau-x$, $\omega+\varphi+x=\tau-y$, $\varphi+x+y=\tau-\omega$, $x+y+\omega=\tau-\varphi$

καὶ τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται

$$(B)\begin{cases} 3x+2(\tau-x)=42 & (2)\\ 3y+2(\tau-y)=44 & (3)\\ 3\omega+2(\tau-\omega)=46 & (4)\\ 3\varphi+2(\tau-\varphi)=48 & (5)\end{cases}$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (B) λαμβάνομεν

$$x=42-2\tau,\quad y=44-2\tau,\quad \omega=46-2\tau,\quad \varphi=48-2\tau \qquad (6)$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x, y, ω, φ θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$$(42-2\tau)+(44-2\tau)+(46-2\tau)+(48-2\tau)=\tau.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $\tau=20$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ τ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ εὑρίσκομεν

$$x=2, \quad y=4, \quad \omega=6, \quad \varphi=8.$$

Ἀσκήσεις : 1749, 1750, 1751.

340. II. Ἀλλαγὴ τῶν ἀγνώστων. ***Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ὁ σύστημα***

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{\omega}=0 \\ \dfrac{3}{\omega}-\dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Θέτομεν $\dfrac{1}{x}=x', \quad \dfrac{1}{y}=y', \quad \dfrac{1}{\omega}=\omega'$ (1)

καὶ τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x'+y'-3\omega'=0 & (2) \\ 3\omega'-2y'=2 & (3) \\ 3x'+3\omega'=4 & (4) \end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν $y'=\dfrac{3\omega'-2}{2}$ (3')

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) λαμβάνομεν $x'=\dfrac{4-3\omega'}{3}$ (4')

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰ y' καὶ x' μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (3') καὶ (4') καὶ ἔχομεν

$$2\cdot\frac{4-3\omega'}{3}+\frac{3\omega'-2}{2}-3\omega'=0.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς ω' καὶ εὑρίσκομεν $\omega'=\dfrac{10}{21}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3') καὶ (4') τὸ ω' μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν

$$y'=\frac{3\cdot\frac{10}{21}-2}{2}=-\frac{2}{7}, \qquad x'=\frac{4-3\cdot\frac{10}{21}}{3}=\frac{6}{7}.$$

Τὰς τιμὰς τῶν x', y', ω' θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{7}{6}, \quad y=-\frac{7}{2}, \quad \omega=\frac{21}{10}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{y\omega}{3y+2\omega}=6, \quad \frac{\omega x}{2\omega+3x}=8, \quad \frac{xy}{5x+4y}=6.$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωσις γράφεται

$$\frac{3y+2\omega}{y\omega}=\frac{1}{6} \quad ἢ \quad \frac{3y}{y\omega}+\frac{2\omega}{y\omega}=\frac{1}{6} \quad ἢ \quad \frac{3}{\omega}+\frac{2}{y}=\frac{1}{6} \qquad (1)$$

Ὁμοίως αἱ δύο ἄλλαι ἐξισώσεις γράφονται

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{\omega}=\frac{1}{8} \quad (2), \qquad \frac{5}{y}+\frac{4}{x}=\frac{1}{6} \qquad (3)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3).

Θέτομεν $\frac{1}{x}=x', \quad \frac{1}{y}=y', \quad \frac{1}{\omega}=\omega'$ (4)

καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} 3\omega'+2y'=\frac{1}{6} \\ 2x'+3\omega'=\frac{1}{8} \\ 5y'+4x'=\frac{1}{6} \end{array}\right. \quad ἢ \quad \left\{\begin{array}{ll} 18\omega'+12y'=1 & (1') \\ 16x'+24\omega'=1 & (2') \\ 30y'+24x'=1 & (3') \end{array}\right.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2΄) ἔχομεν $\omega'=\frac{1-16x'}{24}$ (5)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3΄) ἔχομεν $y'=\frac{1-24x'}{30}$ (6)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1΄) τὰ ω΄ καὶ y΄ μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) καὶ ἔχομεν

$$18\cdot\frac{1-16x'}{24}+12\cdot\frac{1-24x'}{30}=1 \quad ἢ \quad \frac{3(1-16x')}{4}+\frac{2(1-24x')}{5}=1$$

$$ἢ \quad 15(1-16x')+8(1-24x')=20 \quad ἢ \quad 15-240x'+8-192x'=20$$

$$ἢ \quad -240x'-192x'=-15-8+20 \quad ἢ \quad -432x'=-3 \quad ἢ \quad x'=\frac{3}{432}=\frac{1}{144}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6) τὸ x΄ μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν

$$\omega'=\frac{1-16\cdot\frac{1}{144}}{24}=\frac{144-16}{24\cdot144}=\frac{1}{27}, \quad y'=\frac{1-24\cdot\frac{1}{144}}{30}=\frac{144-24}{30\cdot144}=\frac{1}{36}.$$

Τὰς τιμὰς τῶν x΄, y΄, ω΄ θέτομεν εἰς τὰς ἰσότητας (4) καὶ εὑρίσκομεν $x=144, \quad y=36, \quad \omega=27$.

Ἀσκήσεις: 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757.

341. III Αἱ ν ἐξισώσεις δὲν περιέχουν ὅλους τοὺς ἀγνώστους. ***Παράδειγμα 1ον.*** *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\left\{\begin{array}{r|c|c} x+2y=10 & -3 & \\ 4y+2\omega-\varphi=9 & & 3 \\ 3x+4\omega=16 & 1 & \\ y-5\omega+3\varphi=13 & & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ -3 καὶ τῆς (3) ἐπὶ 1 καὶ ἔχομεν

$$-3x-6y=-30$$
$$3x+4\omega=16.$$

Προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$-6y+4\omega=-14 \quad \text{ἢ} \quad -3y+2\omega=-7 \qquad (5)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν φ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (4). Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 3 καὶ τῆς (4) ἐπὶ 1 καὶ ἔχομεν

$$12y+6\omega-3\varphi=27$$
$$y-5\omega+3\varphi=13.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$13y+\omega=40 \qquad (6)$$

Λύομεν τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) καὶ εὑρίσκομεν

$$y=3, \quad \omega=1.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὸ ω μὲ τὴν τιμήν του 1 καὶ ἔχομεν

$$3x+4\cdot 1=16, \quad \text{ἄρα} \quad x=4.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰ y καὶ ω μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν $\quad 4\cdot 3+2\cdot 1-\varphi=9 \quad$ ἢ $\quad \varphi=5$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $(x=4, \; y=3, \; \omega=1, \; \varphi=5)$.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{array}{rl} 3x+y=43 & (1)\\ 2y+\omega=25 & (2)\\ -\omega+3\varphi=55 & (3)\\ x+2y+5\omega-4\varphi=-24 & (4)\end{array}\right.$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν $\quad x=\dfrac{43-y}{3} \qquad (1')$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔχομεν $\quad \omega=25-2y \qquad (2')$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) ἔχομεν $\quad \varphi=\dfrac{55+\omega}{3}=\dfrac{55+(25-2y)}{3}=\dfrac{80-2y}{3} \qquad (3')$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (4) τοὺς ἀγνώστους x, ω καὶ φ μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν αἱ ἐξισώσεις (1'), (2'), (3') καὶ ἔχομεν

$$\frac{43-y}{3}+2y+5(25-2y)-4\cdot\frac{80-2y}{3}=-24.$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς y καὶ εὑρίσκομεν $y=10$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1'), (2'), (3') τὸ y μὲ τὴν τιμήν του 10 καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{43-10}{3}=11, \qquad \omega=25-2\cdot 10=5, \qquad \varphi=\frac{80-2\cdot 10}{3}=20.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν

$$(x=11, \; y=10, \; \omega=5, \; \varphi=20).$$

Ἀσκήσεις: 1758, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763.

6. Λύσις συστημάτων δι' ἄλλων μεθόδων

★ 342. Μέθοδος τοῦ Bézout ἢ τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν. Κατὰ τὴν μέθοδον τῆς ἀπαλοιφῆς διὰ προσθέσεως, ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον, π. χ. τὸν x, μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας ἐξισώσεως ἑνὸς συστήματος, ἔπειτα μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης ἐξισώσεως καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λ βωμεν τὴν πρώτην καὶ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος.

Ἡ μέθοδος τοῦ Bézout, ἡ ὁποία γενικεύει τὴν μέθοδον αὐτήν, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν ταυτοχρόνως (ν—1) ἀγνώστους, ἂν ὑπολογίσωμεν καταλλήλως τοὺς παράγοντας ἐπὶ τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἑκάστη ἐξίσωσις.

Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ μᾶς δείξῃ τὸν τρόπον τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τὴν μέθοδον τοῦ Bézout.

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha\, x+\beta\, y+\gamma\, \omega=\delta & \lambda \\ \alpha'\, x+\beta'\, y+\gamma'\, \omega=\delta' & \mu \\ \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' \omega=\delta'' & 1 \end{array}\right. \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ λ, τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ μ καὶ τῆς ἐξισώσεως (3) ἐπὶ 1 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις, ποὺ θὰ προκύψουν, λαμβάνομεν

$$(\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha'')x+(\beta\lambda+\beta'\mu+\beta'')y+(\gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma'')\omega=\delta\lambda+\delta'\mu+\delta'' \qquad (4)$$

Ἐὰν προσδιορίσωμεν τὰ λ καὶ μ εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ δύο ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως (4) π. χ. οἱ τῶν y καὶ ω, νὰ μηδενίζωνται, τότε ἡ ἐξίσωσις (4) θὰ ἔχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον καὶ ἑπομένως δύναται νὰ λυθῇ εὐκόλως.

Διὰ νὰ μηδενίζωνται οἱ συντελεσταὶ τῶν y καὶ ω πρέπει νὰ εἶναι

$$\left|\begin{array}{l} \beta\lambda+\beta'\mu+\beta''=0 \\ \gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''=0. \end{array}\right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων, μὲ ἀγνώστους τοὺς λ καὶ μ καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\lambda=\frac{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}{\beta\gamma'-\beta'\gamma} \quad (5), \qquad \mu=\frac{\beta''\gamma-\beta\gamma''}{\beta\gamma'-\beta'\gamma} \quad (6)$$

Ὅταν οἱ λ καὶ μ ἔχουν τὰς τιμάς, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (5) καὶ (6), οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων y καὶ ω εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται $(\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha'')x=\delta\lambda+\delta'\mu+\delta''$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἂν $\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\neq 0$

$$x=\frac{\delta\lambda+\delta'\mu+\delta''}{\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''} \qquad (7)$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (7) τὰ λ καὶ μ μὲ τὰς τιμάς

των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (5) καὶ (6), εὑρίσκομεν, μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις κλπ.

$$x = \frac{\delta\beta'\gamma''-\delta\beta''\gamma'+\delta'\beta''\gamma-\delta'\beta\gamma''+\delta''\beta\gamma'-\delta''\beta'\gamma}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma} \quad (8)$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπολογίζομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων y καὶ ω, ἂν μηδενίσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x καὶ ω ἢ τῶν x καὶ y.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως, ὅταν ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀντικαθιστῶμεν τὸ x μὲ τὴν τιμήν του εἰς τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καὶ ἔχομεν οὕτω νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἐφαρμογή. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{r|l} 2x+3y-\omega=17 & \lambda \\ 3x-4y+2\omega=-5 & \mu \\ x+y+3\omega=10 & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{r}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπὶ λ, τῆς ἐξισώσεως (2) ἐπὶ μ καὶ τῆς ἐξισώσεως (3) ἐπὶ 1 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις, ποὺ θὰ προκύψουν, ἔχομεν

$$(2\lambda+3\mu+1)x+(3\lambda-4\mu+1)y+(-\lambda+2\mu+3)\omega=17\lambda-5\mu+10 \quad (4)$$

Προσδιορίζομεν τὰ λ καὶ μ εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τῶν y καὶ ω νὰ εἶναι μηδέν, δηλ. θέτομεν

$$\left|\begin{array}{l} 3\lambda-4\mu+1=0 \\ -\lambda+2\mu+3=0. \end{array}\right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν λ=—7, μ=—5. Ἐὰν λ=—7 καὶ μ=—5 οἱ συντελεσταὶ τῶν y καὶ ω εἶναι μηδὲν καὶ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται

$$(-14-15+1)x=17(-7)-5(-5)+10 \quad ἢ \quad -28x=-84, \quad ἄρα \quad x=3.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του 3 καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\left|\begin{array}{l} 3y-\omega=11 \\ -4y+2\omega=-14. \end{array}\right.$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ καὶ εὑρίσκομεν y=4, ω=1.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν λύσιν (x=3, y=4, ω=1),

Ἀσκήσεις : 1764, 1765.

343. Μέθοδος τῶν ὁριζουσῶν. Τὴν διαφορὰν αβ'—βα' παρεστήσαμεν συμβολικῶς διὰ τοῦ $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ καὶ ἐκαλέσαμεν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν α, β, α', β' (§ 330).

Γενικῶς ἡ συμβολικὴ παράστασις

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

λέγεται ὁρίζουσα δευτέρας τάξεως ἢ ὁρίζουσα τῶν τεσσάρων στοιχείων α, β, α', β'.

Αἱ διαγώνιοι αβ΄ καὶ βα΄ λέγονται, ἀντιστοίχως, ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα διαγώνιος τῆς ὁριζούσης Δ.

Ἡ συμβολικὴ παράστασις

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

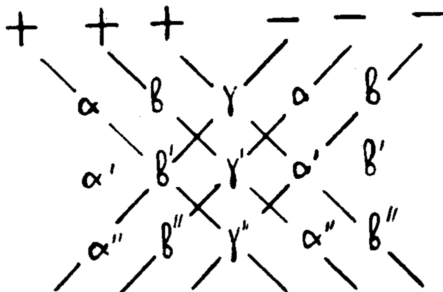
λέγεται ὁρίζουσα τρίτης τάξεως ἢ ὁρίζουσα τῶν ἐννέα στοιχείων $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ *καὶ παριστάνει τὴν παράστασιν*

$$\alpha\beta'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''+\gamma\alpha'\beta''-\gamma\beta'\alpha''-\alpha\gamma'\beta''-\beta\alpha'\gamma'' \qquad (1)$$

Ἡ πρώτη διαγώνιος τῆς ὁριζούσης τρίτης τάξεως εἶναι ἡ $\alpha\beta'\gamma''$ καὶ ἡ δευτέρα εἶναι ἡ $\gamma\beta'\alpha''$.

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης τρίτης τάξεως, δηλ. τὴν παράστασιν (1), χρησιμοποιοῦμεν τὸν κάτωθι κανόνα, ὁ ὁποῖος λέγεται κανὼν τοῦ Sarrus

Γράφομεν τὴν πρώτην καὶ δευτέραν στήλην τῶν γραμμάτων παραπλεύρως τῶν τριῶν στηλῶν (Σχ. 11).



Σχ. 11

Σχηματίζομεν ἔπειτα τὰ ἕξη γινόμενα τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων γραμμῶν πρὸς τὰς διαγωνίους, προτάσσοντες τὸ σημεῖον + εἰς τὰ τρία γινόμενα τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν πρώτην διαγώνιον καὶ τὸ σημεῖον — εἰς τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν δευτέραν διαγώνιον.

Π. χ. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

σχηματίζομεν ἐν πρώτοις τὸν κάτωθι πίνακα

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \end{matrix}$$

καὶ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Sarrus θὰ ἔχωμεν

$$\Delta = 3\cdot3\cdot6+4\cdot3\cdot5+7\cdot2\cdot2-7\cdot3\cdot5-3\cdot3\cdot2-4\cdot2\cdot6$$
$$= 54 + 60 + 28 - 105 - 18 - 48 = -29.$$

344. Λύσις ἑνὸς συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὁριζουσῶν. Διὰ νὰ λύσωμεν ἕνα σύστημα τριῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους, μὲ τὴν μέθοδον τῶν ὁριζουσῶν, ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦ Gramer (§ 330).

Παράδειγμα. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 3x+2y+4\omega=17 \\ 2x+5y+3\omega=19 \\ 3x-y+\omega=8. \end{cases}$$

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Gramer θὰ εἶναι

$$x=\frac{\begin{vmatrix}17 & 2 & 4\\ 19 & 5 & 3\\ 8 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 17 & 4\\ 2 & 19 & 3\\ 3 & 8 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}},\quad \omega=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 17\\ 2 & 5 & 19\\ 3 & -1 & 8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}}$$

Ὑπολογίζομεν τὰς ὁριζούσας τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστῶν τῶν ἀγνώστων x, y, ω μὲ τὸν κανόνα τοῦ Sarrus καὶ ἔχομεν

$$x=\frac{17\cdot5\cdot1+2\cdot3\cdot8+4\cdot19\cdot(-1)-4\cdot5\cdot8-17\cdot3\cdot(-1)-2\cdot19\cdot1}{3\cdot5\cdot1+2\cdot3\cdot3+4\cdot2(-1)-4\cdot5\cdot3-3\cdot3\cdot(-1)-2\cdot2\cdot1}=$$

$$=\frac{85+48-76-160+51-38}{15+18-8-60+9-4}=\frac{-90}{-30}=3.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $y=2$, $\omega=1$.

Ἀσκήσεις : *1766, 1767, 1768, 1769.*

7. Συμμετρικὰ συστήματα

345. Συμμετρικαὶ παραστάσεις. Κυκλικὴ ἐναλλαγή. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν $\alpha^2-\beta\gamma$ τῶν τριῶν γραμμάτων α, β, γ.

Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας σημειώνομεν τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν α, β, γ καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι ἕνα κινητὸν ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἕνα σημεῖον, ἔστω τὸ α, καὶ διανύει τὴν περιφέρειαν κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους. Τὸ κινητὸν αὐτό, κατὰ τὴν κίνησίν του ἐπὶ τῆς περιφερείας, θὰ συναντᾷ τὰ διάφορα σημεῖα α, β, γ καὶ πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν (Σχ. 12).

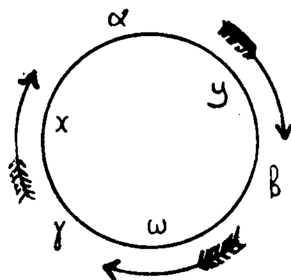
Ἐὰν εἰς τὴν παράστασιν $\alpha^2-\beta\gamma$ (1) ἀντικαταστήσωμεν

κάθε γράμμα της διὰ τοῦ ἑπομένου γράμματος, ποὺ συναντᾷ τὸ κινητὸν κατὰ τὴν κίνησίν του, δηλ. τὸ α διὰ τοῦ β, τὸ β διὰ τοῦ γ, τὸ γ διὰ τοῦ α, θὰ λάβωμεν τὴν παράστασιν

$$\beta^2 - \gamma\alpha \qquad (2)$$

ἡ ὁποία θὰ λέγωμεν, ὅτι προέκυψεν ἀπὸ τὴν παράστασιν (1) διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων της.

Ἡ νέα παράστασις (2) διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων της γίνεται $\gamma^2 - \alpha\beta$ καὶ αὐτὴ πάλιν διὰ νέας κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων της γίνεται $\alpha^2 - \beta\gamma$, δηλ. προκύπτει ἡ δοθεῖσα παράστασις (1).



Σχ. 12

Δυνάμεθα νὰ κάμωμεν κυκλικὴν ἐναλλαγὴν καὶ εἰς δύο ὁμάδας γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς μίαν παράστασιν ἢ εἰς ἕνα τύπον·

Π. χ. Ἐὰν ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 \omega$ καὶ κάμωμεν χωριστὰ τὴν κυκλικὴν ἐναλλαγὴν τῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ x, y, ω λαμβάνομεν τὴν παράστασιν $\beta^2 y + \gamma^2 \omega + \alpha^2 x$.

Λέγομεν, ὅτι μία παράστασις εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ποὺ περιέχει, ἐὰν ἡ παράστασις δὲν ἀλλάσσει τιμήν, ὅταν ἀλλάξωμεν μεταξύ των τὰ γράμματά της διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς.

Π. χ. Ἡ παράστασις

$$\alpha(\beta+\gamma)^2 + \beta(\gamma+\alpha)^2 + \gamma(\alpha+\beta)^2 \qquad (2)$$

εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ· διότι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ α διὰ τοῦ β, τὸ β διὰ τοῦ γ καὶ τὸ γ διὰ τοῦ α, λαμβάνομεν τὴν παράστασιν $\beta(\gamma+\alpha)^2 + \gamma(\alpha+\beta)^2 + \alpha(\beta+\gamma)^2$,
ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν παράστασιν (2).

Ὁμοίως ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}$$

εἶναι συμμετρικὴ παράστασις πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ.

Μία ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται συμμετρικὴ πρὸς δύο ἢ περισσοτέρας ὁμάδας γραμμάτων, ἐὰν δὲν ἀλλάσσῃ τιμήν, ὅταν ἀλλάξωμεν εἰς αὐτήν, διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς, τὰ γράμματα δύο οἱωνδήποτε ὁμάδων·

Οὕτω ἡ παράστασις

$$\alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 \omega + \delta^2 \varphi \qquad (3)$$

εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς ὁμάδας τῶν γραμμάτων (α, x), (β, y), (γ, ω), (δ, φ). Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν τὰς ὁμάδας (α, x) καὶ (γ, ω) καὶ

ἀλλάξωμεν τὸ α διὰ τοῦ γ, καὶ τὸ γ διὰ τοῦ α, ὅπως ἐπίσης τὸ x διὰ τοῦ ω καὶ τὸ ω διὰ τοῦ x λαμβάνομεν τὴν παράστασιν

$$\gamma^2\omega+\beta^2y+\alpha^2x+\delta^2\varphi$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν (3).

346. Συμμετρικὰ συστήματα. *Ἕνα σύστημα ἐξισώσεων λέγεται* ***συμμετρικόν,*** *ὅταν κάθε μία ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις του εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς αὐτὰς ὁμάδας γραμμάτων.*

Π. χ. Τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x+y+\omega=\alpha & (1)\\ y+\omega+\varphi=\beta & (2)\\ \omega+\varphi+x=\gamma & (3)\\ \varphi+x+y=\delta & (4) \end{cases}$$

εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τοὺς ἀγνώστους x, y, ω, φ καὶ πρὸς τὰ γράμματα α, β, γ, δ.

347. Λύσις συμμετρικῶν συστημάτων. ***Πρόβλημα 1ον.*** *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\begin{cases} x+y+\omega=\alpha & (1)\\ y+\omega+\varphi=\beta & (2)\\ \omega+\varphi+x=\gamma & (3)\\ \varphi+x+y=\delta & (4) \end{cases}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτὸ προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις του καὶ ἔχομεν

$$3x+3y+3\omega+3\varphi=\alpha+\beta+\gamma+\delta \quad \text{ἢ} \quad x+y+\omega+\varphi=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3} \qquad (5)$$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (5) τὴν (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\varphi=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3}-\alpha \quad \text{ἢ} \quad \varphi=\frac{\beta+\gamma+\delta-2\alpha}{3} \qquad (6)$$

Αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων ἀγνώστων εὑρίσκονται ὁμοίως· δηλ. ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν (5) διαδοχικῶς κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2), (3), (4).

Δυνάμεθα ὅμως, λόγῳ τῆς συμμετρίας τοῦ συστήματος, νὰ εὕρωμεν ἀμέσως ἐκ τοῦ τύπου (6) τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων x, y, ω διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν ἀγνώστων x, y, ω, φ καὶ τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ.

Πράγματι εἶναι

$$x=\frac{\gamma+\delta+\alpha-2\beta}{3}, \quad y=\frac{\delta+\alpha+\beta-2\gamma}{3}, \quad \omega=\frac{\alpha+\beta+\gamma-2\delta}{3}.$$

Πρόβλημα 2ον. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\varphi}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\delta} \end{cases}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{\omega}=\omega'$, $\frac{1}{\varphi}=\varphi'$, $\frac{1}{\alpha}=\alpha'$, $\frac{1}{\beta}=\beta'$, $\frac{1}{\gamma}=\gamma'$, $\frac{1}{\delta}=\delta'$, λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ σύστημα μὲ τὸ προηγούμενον καὶ ἑπομένως ἡ λύσις του εἶναι εὔκολος.

Ἀσκήσεις : 1770, 1771, 1772, 1773, 1774, 1775, 1776, 1777, 1778.

8. Συστήματα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων δὲν εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων

348. Συστήματα μὲ μ ἐξισώσεις καὶ μ+ν ἀγνώστους. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα

$$(A) \quad \begin{cases} 2x+3y-5\omega=10 \\ 4x-\ y+\ \omega=\ 1. \end{cases}$$

Ὑποθέτομεν, ὅτι ὁ ω εἶναι γνωστός. Μεταφέρομεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ω καὶ ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} 2x+3y=10+5\omega & (1) \\ 4x-\ y=\ 1-\ \omega & (2) \end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα αὐτὸ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους ἀπαλοιφῆς καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$x=\frac{13+2\omega}{14}, \quad y=\frac{19+11\omega}{7} \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἄγνωστοι x καὶ y ἐκφράζονται συναρτήσει τοῦ ἀγνώστου ω. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ δώσωμεν εἰς τὸν ω τυχοῦσαν αὐθαίρετον τιμὴν καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν x καὶ y ἀπὸ τοὺς τύπους (3).

Π. χ. Ἂν δώσωμεν εἰς τὸν ω τὴν τιμὴν 0, οἱ τύποι (3) δίδουν $x=\frac{13}{14}$, $y=\frac{19}{7}$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν

$$\left(x=\frac{13}{14},\quad y=\frac{19}{7},\quad \omega=0\right).$$

Ἐὰν θέσωμεν ω=1, οἱ τύποι (3) δίδουν $x=\frac{15}{14}$ καὶ $y=\frac{30}{7}$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν

$$\left(x=\frac{15}{14},\quad y=\frac{30}{7},\quad \omega=1\right).$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις, δηλ. εἶναι ἀόριστον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ ἀοριστία εἶναι ἁπλῆ ἢ πρώτης τάξεως.

Γενικῶς, ἐὰν ἕνα σύστημα ἔχῃ μ ἐξισώσεις μὲ μ+ν ἀγνώστους δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τοὺς ν ἀγνώστους αὐθαιρέτους τιμὰς καὶ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν ἄλλων μ ἀγνώστων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον μὲ ν βοηθητικοὺς ἀγνώστους. Ἡ ἀοριστία αὐτὴ λέγεται ν τάξεως.

Σημ. Ἕνα τοιοῦτον σύστημα δύναται ἐν τούτοις νὰ εἶναι ἀδύνατον. Π. χ. τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x-5y+3\omega=8 & (1)\\ -6x+15y-9\omega=18 & (2)\end{cases}$$

εἶναι ἀδύνατον, διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ −3 εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $-6x+15y-9\omega=-24$, ἡ ὁποία μαζὶ μὲ τὴν ἐξίσωσιν (2) σχηματίζουν ἕνα σύστημα ἀδύνατον.

Ἀσκήσεις: 1779, 1780.

349. Συστήματα μ+ν ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων, π. χ. ὅταν ἔχωμεν μ+ν ἐξισώσεις μὲ μ ἀγνώστους, ἐκλέγομεν μ ἐξισώσεις, τὰς ἁπλουστέρας, καὶ λύομεν τὸ σύστημα τῶν μ αὐτῶν ἐξισώσεων μὲ τοὺς μ ἀγνώστους καὶ προσδιορίζομεν οὕτω τὰς τιμὰς τῶν μ αὐτῶν ἀγνώστων. Αἱ τιμαὶ τῶν μ αὐτῶν ἀγνώστων πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ἄλλας ν ἐξισώσεις, ἄλλως τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι αἱ μ+ν ἐξισώσεις εἶναι ἀσυμβίβαστοι.

350. Πρόβλημα. *Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις*

$$3x+4y=17 \quad (1),\qquad -2x+7y=8 \quad (2),\qquad 4x-5y=2 \quad (3)$$

ἀποτελοῦν σύστημα ἐξισώσεων.

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $x=3$, $y=2$.

Ἐξετάζομεν τώρα, ἐὰν αἱ τιμαὶ $x=3$, $y=2$ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (3).

Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) $x=3$, $y=2$ εὑρίσκομεν

$$4\cdot3-5\cdot2=2 \quad ἢ \quad 12-10=2 \quad ἢ \quad 2=2.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x=3$, $y=2$ ἐπαληθεύουν καὶ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν καὶ ἑπομένως αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα ἐξισώσεων (ε ἶ ν α ι σ υ μ β ι β α σ τ α ί).

Σημ. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (3) ἦτο $4x-5y=8$, αἱ τιμαὶ $x=3$, $y=2$ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ν ἢ λέγομεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις του εἶναι ἀ σ υ μ β ί β α σ τ ο ι.

351. Ἀπαλείφουσα. Ἐὰν αἱ $\mu+\nu$ ἐξισώσεις μὲ τοὺς μ ἀγνώστους εἶναι ἐγγράμματοι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι συμβιβασταί. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐκλέγομεν μ ἐξισώσεις, τὰς ἁπλουστέρας, καὶ λύομεν τὸ σύστημα τῶν μ αὐτῶν ἐξισώσεων μὲ τοὺς μ ἀγνώστους. Ἀντικαθιστῶμεν ἔπειτα τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν εἰς τὰς ὑπολοίπους ἐξισώσεις καὶ σχηματίζομεν ν ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ δοθὲν σύστημα θὰ εἶναι συμβιβαστόν.

Αἱ ἰσότητες αὐταὶ λέγονται σ υ ν α ρ μ ό ζ ο υ σ α ι ἢ ἀ π α λ ε ί φ ο υ σ α ι τ ο ῦ σ υ σ τ ή μ α τ ο ς.

352. Πρόβλημα 1ον. *Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις* $x+\mu y=1$, $x+y=\mu$, $x-y=2$ *νὰ εἶναι συμβιβασταί.*

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$x=\frac{\mu+2}{2}, \qquad y=\frac{\mu-2}{2} \tag{1}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τὰ x καὶ y μὲ τὰς τιμάς των αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$$\frac{\mu+2}{2}+\mu\cdot\frac{\mu-2}{2}=1 \quad ἢ \quad \mu+2+\mu(\mu-2)=2 \quad ἢ \quad \mu+2+\mu^2-2\mu-2=0$$

$$ἢ \quad \mu^2-\mu=0 \quad ἢ \quad \mu(\mu-1)=0 \tag{2}$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις συμβιβασταὶ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (2) (ἀ π α λ ε ί φ ο υ σ α).

Ἡ σχέσις (2) ἀληθεύει διὰ $\mu=0$ καὶ διὰ $\mu=1$.

Ἐὰν λάβωμεν $\mu=0$, αἱ ἰσότητες (1) δίδουν $x=1$ καὶ $y=-1$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν $(x=1,\ y=-1)$ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων, ποὺ ἐδόθησαν.

Ἐὰν λάβωμεν $\mu=1$, αἱ ἰσότητες (1) δίδουν $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$ καὶ ἔχομεν τὴν λύσιν

$$\left(x=\frac{3}{2},\quad y=-\frac{1}{2}\right).$$

353. Πρόβλημα 2ον. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων*

$$(A)\quad \begin{cases} x+y=2\alpha & (1)\\ x-y=2\beta & (2)\\ 2x+3y=\alpha+2\beta & (3)\\ 3x+4y=2\alpha+3\beta-1 & (4)\end{cases}$$

εἶναι συμβιβαστόν.

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\alpha+\beta,\qquad y=\alpha-\beta \qquad (5)$$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x καὶ y θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) καὶ εὑρίσκομεν

$$\begin{cases} 2(\alpha+\beta)+3(\alpha-\beta)=\alpha+2\beta\\ 3(\alpha+\beta)+4(\alpha-\beta)=2\alpha+3\beta-1\end{cases} \quad \text{ἢ} \quad (B)\ \begin{cases} 4\alpha-3\beta=0\\ 5\alpha-4\beta=-1.\end{cases}$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ σύστημα (Α) συμβιβαστὸν πρέπει νὰ ἀληθεύουν αἱ σχέσεις (Β) (ἀ π α λ ε ί φ ο υ σ α).

Αἱ σχέσεις (Β) ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους α καὶ β, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ λύσωμεν. Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν $\alpha=3,\ \beta=4$.

Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν α καὶ β καθιστοῦν τὸ σύστημα (Α) δυνατὸν καὶ ἡ λύσις του δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων (5) καὶ εἶναι $x=7,\ y=-1$.

Ἀσκήσεις: 1781, 1782, 1783, 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1789, 1790, 1791, 1792, 1793, 1794, 1795.

* 9. Ὁμογενῆ συστήματα

354. Ὁμογενὴς ἐξίσωσις. Ὁμογενῆ συστήματα. *Μία ἀκεραία ἐξίσωσις λέγεται ὁ μ ο γ ε ν ή ς, ὅταν δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $A=0$, ὅπου A εἶναι ἕνα πολυώνυμον ὁμογενὲς (§ 128) ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους.*

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις $\alpha x+\beta y=0$, $\alpha x+\beta y+\gamma\omega=0$ εἶναι ὁμογενεῖς.

Μία ὁμογενὴς ἐξίσωσις δὲν εἶναι ποτὲ ἀδύνατος. Ἔχει π ά ν τ ο τ ε τὸ ὀλιγώτερον τὴν λύσιν $x=y=\omega=\ldots\ldots=0$.

Ἕνα σύστημα λέγεται ὁ μ ο γ ε ν έ ς, ὅταν αἱ ἐξισώσεις του εἶναι ὁμογενεῖς.

355. Σύστημα δύο ὁμογενῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Ἔστω τὸ γενικὸν σύστημα

$$(A)\quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=0\\ \alpha' x+\beta' y=0.\end{cases}$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ δὲν εἶναι ποτὲ ἀδύνατον, διότι ἔχει πάντοτε τὴν λύσιν $x=0, \quad y=0$.

'Υποθέτομεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α, β, α΄, β΄ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Γνωρίζομεν (§ 325) ὅτι :

1ον. 'Εὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}$ τὸ σύστημα (Α) ἔχει μίαν λύσιν, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\frac{\gamma\beta'-\beta\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}, \quad y=\frac{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

'Επειδὴ ἐδῶ εἶναι $\gamma=\gamma'=0$, οἱ ἀριθμηταὶ τῶν κλασμάτων αὐτῶν εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ συστήματος (Α) εἶναι

$$x=0, \quad y=0.$$

2ον. 'Εὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$, τὸ σύστημα (Α) εἶναι ἀ ό ρ ι σ τ ο ν.

Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{1}{\lambda}$, λαμβάνομεν $\alpha'=\alpha\lambda$ καὶ $\beta'=\beta\lambda$, ὁπότε τὸ σύστημα (Α) γίνεται

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=0 \\ \lambda(\alpha x+\beta y)=0 \end{cases} \quad \text{ἢ} \quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=0 \\ \alpha x+\beta y=0. \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἀόριστος (§ 310).

'Η ἀοριστία τοῦ συστήματος (Α) εἶναι ἁπλῆ.

356. Σύστημα δύο ὁμογενῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους. "Εστω τὸ γενικὸν σύστημα

$$(\text{A}) \quad \begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma \omega=0 \\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' \omega=0. \end{cases}$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ δὲν εἶναι ποτὲ ἀδύνατον, διότι ἔχει πάντοτε τὴν λύσιν $x=0, \quad y=0, \quad \omega=0$.

'Επίσης τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον, διότι ἔχει περισσοτέρους ἀγνώστους ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (§ 348).

Θὰ ἀναζητήσωμεν ἤδη τὸν γενικὸν κανόνα τοῦ σχηματισμοῦ τῆς λύσεως.

'Εὰν δώσωμεν εἰς τὸ ω μίαν αὐθαίρετον τιμήν, τότε τὸ σύστημα (Α) γίνεται

$$(\text{B}) \quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=-\gamma \omega \\ \alpha' x+\beta' y=-\gamma' \omega. \end{cases}$$

Ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$, τὸ σύστημα (Β) ἔχει τὴν λύσιν

$$x=\frac{\beta\gamma'\omega-\beta'\gamma\omega}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\omega\cdot\frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\qquad (1)$$

$$y=\frac{\alpha'\gamma\omega-\alpha\gamma'\omega}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\omega\cdot\frac{\alpha'\gamma-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ ω.

Ἐὰν θέσωμεν $\omega=\alpha\beta'-\beta\alpha'$, οἱ τύποι (1) δίδουν τὴν λύσιν

$$x=\beta\gamma'-\beta'\gamma,\quad y=\alpha'\gamma-\alpha\gamma',\quad \omega=\alpha\beta'-\beta\alpha'.$$

Ἐὰν θέσωμεν $\omega=\lambda(\alpha\beta'-\beta\alpha')$, αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y θὰ γίνουν λ φορὰς μεγαλύτεραι τῶν προηγουμένων, δηλ. θὰ εἶναι:

$$\boxed{x=\lambda(\beta\gamma'-\beta'\gamma),\quad y=\lambda(\alpha'\gamma-\alpha\gamma'),\quad \omega=\lambda(\alpha\beta'-\beta\alpha')}\qquad (2)$$

Γενικῶς, τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν ἀπειρίαν λύσεων, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (2).

Ὥστε, ἐὰν $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$ ἡ ἀοριστία εἶναι ἁπλῆ.

Ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ἀοριστία εἶναι διπλῆ, διότι αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἀνάγονται εἰς μίαν.

Παρατήρησις. Ἡ λύσις (2) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x}{\beta\gamma'-\beta'\gamma}=\frac{y}{\alpha'\gamma-\alpha\gamma'}=\frac{\omega}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}=\lambda\qquad (3)$$

ἢ

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ \gamma' & \alpha'\end{vmatrix}}=\frac{\omega}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}}=\lambda\qquad (4)$$

ὅπου λ τυχὼν ἀριθμός.

357. **Ἐφαρμογή.** ***Πρόβλημα.*** *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\left|\begin{array}{l} 5x+4y-2\omega=0 \\ 4x-y-\omega=0 \\ x+3y+2\omega=19 \end{array}\right.\qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ὁμογενεῖς καὶ ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων x, y, ω δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=\lambda(\beta\gamma'-\beta'\gamma),\quad y=\lambda(\alpha'\gamma-\alpha\gamma'),\quad \omega=\lambda(\alpha\beta'-\beta\alpha')\qquad (4)$$

Ἐπειδὴ $\beta\gamma'-\beta'\gamma=4(-1)-(-1)\cdot(-2)=-6$,

$\alpha'\gamma-\alpha\gamma'=4\cdot(-2)-5\cdot(-1)=-3$, $\alpha\beta'-\beta\alpha'=5(-1)-4\cdot 4=-21$,

οἱ τύποι (4) γίνονται

$$x=-6\lambda,\quad y=-3\lambda,\quad \omega=-21\lambda\qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) τὰ x, y, ω μὲ τὰς τιμάς των, ποὺ δίδουν οἱ τύποι (5) καὶ ἔχομεν

$$-6\lambda+3\cdot(-3\lambda)+2(-21\lambda)=19$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν $\lambda=-\frac{1}{3}$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ λ θέτομεν εἰς τὰς ἰσότητας (5) καὶ εὑρίσκομεν $x=2$, $y=1$, $\omega=7$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ἀσκήσεις : 1797, 1798, 1799, 1800, 1801.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν τρία ζεύγη λύσεων τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

1628. 1. $3x+y=5$ 2. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2$

1629. 1. $7x-8y+1=0$ 2. $\frac{y}{2}+19=2-x$.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα : (702).

1630. $\begin{cases} 3x+4y=33 \\ 5x+2y=41 \end{cases}$ **1631.** $\begin{cases} 12x-y=14 \\ 6x+3y=0 \end{cases}$

1632. $\begin{cases} 7x+8y=-61 \\ -3x+4y=-11 \end{cases}$ **1633.** $\begin{cases} 3x-5y=14 \\ 12x+10y=-8 \end{cases}$

1634. $\begin{cases} x-12y=-2 \\ 3y+5x=53 \end{cases}$ **1635.** $\begin{cases} 3\varphi-4\omega=-7 \\ 9\varphi+\omega=109. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα : (703).

1636. $\begin{cases} 3x+4y=23 \\ 2x-7y=-4 \end{cases}$ **1637.** $\begin{cases} x+7y=42 \\ y-3x=6 \end{cases}$

1638. $\begin{cases} x+3\varphi=1 \\ 2x+\varphi-26=0 \end{cases}$ **1639.** $\begin{cases} 4\omega=5\varphi+3 \\ 4\varphi=5\omega-6 \end{cases}$

1640. $\begin{cases} 4y+3\omega=44 \\ 2y-\omega=12 \end{cases}$ **1641.** $\begin{cases} 7x+5\varphi=65 \\ 14x-3\varphi=52. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα : (704)

1642. $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x-7y=15 \end{cases}$ **1643.** $\begin{cases} x+3y=13 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$

1644. $\begin{cases} 8x+2y=7 \\ x+y=1{,}25 \end{cases}$ **1645.** $\begin{cases} 3x+y=15 \\ 5x-4y=8 \end{cases}$

1646. $\begin{cases} 2x-5y=25 \\ 3x+y=12 \end{cases}$ **1647.** $\begin{cases} 7x-y=-19 \\ x+7y=33. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα : (705).

1648. $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 \end{cases}$

1649. $\begin{cases} (x+1)(y+2)=(x-1)(y+3)+5 \\ (2x+1)(y-1)=(x+3)(2y-3)+2 \end{cases}$

1650. $\begin{cases} 2(2x-y)-4(y-2x)=48 \\ 3(5x+y)-5(y+x)=40 \end{cases}$

1651. $\begin{cases} 7(5x+7y)=13(3x+11) \\ 11(11x+27)=19(7x+5y) \end{cases}$

1652. $\begin{cases} 3(x+y)+2(y-x)=7 \\ 5(x-y)+3(x+y)=14 \end{cases}$

1653. $\begin{cases} 3(2x-4)+4(3y-1)=26 \\ 2x+y-3(x+2y)=-16. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (706).

1654. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=3 \end{cases}$

1655. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{y+2}{2} \end{cases}$

1656. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}+\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{5x-y}{4} \\ \dfrac{2y-x}{4}+\dfrac{x+y}{6}=x+1 \end{cases}$

1657. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{5(x-4)}{8} \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{6y+3}{12} \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (707).

1658. $\begin{cases} \dfrac{3x+2y}{2}=\dfrac{x+4y}{6}+y+2 \\ 2x-\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{x+5}{2} \end{cases}$

1659. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{7}+\dfrac{2x+y}{17}=7 \\ \dfrac{4x+y}{5}+\dfrac{y-7}{10}=15 \end{cases}$

1660. $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{2}+\dfrac{x+y}{5}=x+\dfrac{y+2}{3}+1 \\ x-\dfrac{x+y}{2}-1=y-\dfrac{x+6}{3} \end{cases}$

1661. $\begin{cases} \dfrac{(x+3)^2+(y-8)^2}{x^2+y^2+39}=1 \\ \dfrac{2x+3y+8}{5x+4y-1}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

1662. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7}+\dfrac{y-x}{4}=2x-8 \\ \dfrac{2y-3x}{3}+2y=3x+4 \end{cases}$

1663. $\begin{cases} \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{5x-4y}{6}=0 \\ \dfrac{x+2y-1}{6}=\dfrac{5x-9y+4}{10}. \end{cases}$

Χωρὶς νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα, νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἔχει μίαν λύσιν, ποῖον εἶναι ἀδύνατον καὶ ποῖον εἶναι ἀόριστον. (719).

1664. 1. $\begin{cases} 5x+y=7 \\ 10x+2y=13 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 8x-16y+3=0 \\ 2x-4y+1=0 \end{cases}$

1665. 1. $\begin{cases} 2x-3y=15 \\ -6x+9y=-45 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 4x-6y+10=0 \end{cases}$

1666. 1. $\begin{cases} 7x-6y=1 \\ -21x+18y=-3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x+2y=-11 \\ 35x+10y=-20. \end{cases}$

1667. (720). Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $5x-4y=7$. Νὰ εὑρεθῇ μία ἄλλη ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ αὐτήν: 1ον. ἕνα σύστημα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν λύσιν, 2ον. ἕνα σύστημα ἀδύνατον, 3ον. ἕνα σύστημα ἀόριστον.

1668. (721). Ἡ αὐτὴ ἄσκησις μὲ τὴν ἐξίσωσιν $x+\frac{y}{3}=\frac{5}{4}$.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (709).

1669. $\begin{cases} (\alpha+2)x+\alpha y=1 \\ -3x+(\alpha-2)y=-1 \end{cases}$ **1670.** $\begin{cases} (\mu-\nu)x+(\mu+\nu)y=\alpha \\ (\mu^2-\nu^2)(x+y)=\alpha\mu \end{cases}$

1671. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x-(\alpha-\beta)y=4\alpha\beta \\ (\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)y=2\alpha^2-2\beta^2 \end{cases}$

1672. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=2\alpha\beta \\ (\alpha+\gamma)x+(\alpha-\gamma)y=2\alpha\gamma \end{cases}$ **1673.** $\begin{cases} (\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2-\beta^2)y=\alpha^2 \\ (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=\alpha \end{cases}$

1674. $\begin{cases} (\alpha+2\beta)x-(\alpha-2\beta)y=6\alpha\gamma \\ (\alpha+3\gamma)x-(\alpha-3\gamma)y=4\alpha\beta. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (710).

1675. $\begin{cases} (\alpha^2+1)x+(\alpha^2-1)y=\alpha \\ (\alpha+1)x+(\alpha-1)y=\alpha^2 \end{cases}$

1676. $\begin{cases} (2\alpha-\beta)x+(\alpha-\beta)y=3\alpha+2\beta \\ (2\gamma-\delta)x+(\gamma-\delta)y=3\gamma+2\delta \end{cases}$

1677. $\begin{cases} (\beta^2-\alpha^2)x+\alpha(\alpha+\beta)y=\beta+2\alpha \\ (\beta^2-\alpha^2)(3x+5y)=8\beta-2\alpha \end{cases}$ **1678.** $\begin{cases} \alpha x+1=\alpha y+\beta x \\ \beta y+1=\alpha x+\beta y. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (711).

1679. $\begin{cases} \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \\ \frac{x}{\beta}-\frac{y}{\alpha}=1 \end{cases}$ **1680.** $\begin{cases} \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\alpha^2\beta \\ \frac{x}{\alpha^2}+\frac{y}{\beta^2}=-\beta^2 \end{cases}$

1681. $\begin{cases} x=5\alpha-y \\ \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=\alpha \end{cases}$ **1682.** $\begin{cases} \frac{x}{\alpha+\beta}+\frac{y}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta} \\ \frac{x}{\alpha+\beta}-\frac{y}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta}. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (712).

1683. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x-(\alpha-\beta)y=4\alpha\beta \\ \frac{x}{\alpha+\beta}+\frac{y}{\alpha-\beta}=2 \end{cases}$ **1684.** $\begin{cases} x-y=4\alpha\beta \\ \frac{x}{\alpha+\beta}+\frac{y}{\alpha-\beta}=2\alpha \end{cases}$

1685. $\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta-y}{\alpha} \\ \dfrac{x+\alpha}{\beta}=\dfrac{y+\beta}{\alpha}. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (713).

1686. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{\alpha+\beta}-\dfrac{x-y}{\alpha-\beta}=\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2} \\ \dfrac{x}{\alpha+\beta}-\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{4\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2} \end{cases}$

1687. $\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\beta}+\dfrac{y-\beta}{\alpha}=0 \\ \dfrac{x+y-\beta}{\alpha}+\dfrac{x-y-\alpha}{\beta}=0. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (714).

1688. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=\mu \\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\nu \end{cases}$ **1689.** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma} \\ \dfrac{x+\gamma}{y+\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (715).

1690. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y-\dfrac{\alpha}{x}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{y-\dfrac{\beta}{x}}} \\ \dfrac{1}{y}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1 \end{cases}$

1691. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{\alpha+\beta-\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{\alpha-\beta+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}} \\ x+y=2\alpha^2. \end{cases}$

1692. (716). Διὰ ποίας τιμὰς τῶν μ καὶ ν ἡ ἐξίσωσις

$$x^2-(3\mu-4)x-2\nu=0$$

ἀληθεύει διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=-5$.

1693. (717). Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ παράμετροι μ καὶ ν, ἵνα ἡ ἐξίσωσις

$$\mu x^2+(\mu+4)x+3\nu-2=0$$

ἀληθεύῃ διὰ $x=2$ καὶ διὰ $x=-5$.

1694. (718). Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ μ καὶ ν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(x)=\mu x^3+(\mu-2)x^2-(3\nu+5)x-4\nu$$

νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x+1$ καὶ διὰ $x-3$. Νὰ τεθῇ ἔπειτα τὸ $\varphi(x)$ ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς γινομένου παραγόντων.

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι ἀδύνατα; (725).

1695. $\begin{cases} \mu x+y=1 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$ **1696.** $\begin{cases} (\mu+2)x+(\mu-7)y=7 \\ 4x-5y=8+\mu. \end{cases}$

Διὰ ποίας τιμὰς τῶν μ καὶ ν τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι ἀόριστα; (726).

1697. $\begin{cases} (\mu-\nu)x+(3\mu-5)y=2\mu\nu \\ (\mu+\nu)x+(\nu-7)y=6\mu\nu \end{cases}$

1698. $\begin{cases} (2\mu+\nu)x+(\mu+2\nu+3)y=1 \\ (5\mu+\nu-1)x+(4\mu+\nu+2)y=2 \end{cases}$

1699. $\begin{cases} (2\mu-4\nu+\beta)x+(7\mu-2\nu-\alpha)y=1 \\ (3\mu-2\nu+\beta)x+(5\mu-2\nu)y=3 \end{cases}$

1700. $\begin{cases} (3\mu-5\nu+\beta)x+(8\mu-3\nu-\alpha)=1 \\ (2\mu-3\nu+\beta)x+(4\mu-\nu)y=2. \end{cases}$

1701. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τοῦ μ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \mu x+(\mu+1)y=3\mu+2 \\ 2x+(2\mu-1)y=8. \end{cases}$$

1702. Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+y=2 \\ x+4y=3\beta. \end{cases}$$

Νὰ λυθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τύπων τοῦ Gramer τὰ κάτωθι συστήματα: (722).

1703. $\begin{cases} 8x+4y=29 \\ 9x+2y=17 \end{cases}$ **1704.** $\begin{cases} 3x+5y=-9 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

1705. $\begin{cases} 7x-3y-8=0 \\ 4x+9y=-24 \end{cases}$ **1706.** $\begin{cases} 2x-5y-9=0 \\ 7x+4y-10=0 \end{cases}$

1707. $\begin{cases} x-3y=2 \\ 5x+y=26 \end{cases}$ **1708.** $\begin{cases} 3x+y=23 \\ -x+2y=-3. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (723).

1709. $\begin{cases} \lambda x+y=2 \\ x+y=2\lambda \end{cases}$ **1710.** $\begin{cases} \lambda x-2y=\lambda \\ (\lambda-1)x-y=1 \end{cases}$

1711. $\begin{cases} x+(3\lambda-1)y=0 \\ x+2y=\lambda-4 \end{cases}$ **1712.** $\begin{cases} (\lambda^2-1)x-y=\lambda \\ 2x-y=\lambda-1. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (724).

1713. $\begin{cases} x+y=\lambda \\ \lambda x+y=1 \end{cases}$ **1714.** $\begin{cases} y=\lambda+2x \\ 3y-\lambda=x+3 \end{cases}$

1715. $\begin{cases} x+\mu y=1 \\ \mu x-3\mu y=2\mu+3 \end{cases}$ **1716.** $\begin{cases} 4x+\lambda y=9 \\ 2\lambda x+18y=-27. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (727).

1717. $\begin{cases} (2-\lambda)x+y=\lambda+4 \\ (\lambda+4)x+(3\lambda+2)=8-7\lambda \end{cases}$ 1718. $\begin{cases} (\mu-1)x+2\mu y=2 \\ 2\mu x+(\mu-1)y=\mu-1 \end{cases}$

1719. $\begin{cases} (\mu+2)x+(2\mu+3)y=3\mu+1 \\ (3\mu+4)x+(\mu+6)y=\mu+2 \end{cases}$ 1720. $\begin{cases} (\mu-2)x+3\mu y=-3 \\ 3\mu x+(\mu-2)y=\mu-2. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (728).

1721. $\begin{cases} (\mu-1)^2x+(\mu^2-1)y=(\mu+1)^2 \\ (2\mu-1)x+(\mu+1)y=\mu^2-1 \end{cases}$

1722. $\begin{cases} (\mu-1)x+2(\mu-2)y=2 \\ 2(\mu-1)x+5(\mu-3)y=4 \end{cases}$

1723. $\begin{cases} (2\mu-3)x-\mu y=3\mu-2 \\ 5x+(2\mu+3)y=-5 \end{cases}$

1724. $\begin{cases} \mu(x+2y)=x-2 \\ 2\mu x-y+1=\mu(1-y). \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (729).

1725. $\begin{cases} (\mu^2-1)x+(\mu-1)^2y=(\mu+1)^2 \\ (\mu+1)x+(2\mu-1)y=\mu^2-1 \end{cases}$

1726. $\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda+1)y=2(\lambda^2-1) \\ (\lambda^2-1)x+(\lambda^2+1)y=2(\lambda^2-1) \end{cases}$

1727. $\begin{cases} (\mu^2+1)x+(\mu^2-1)y=\mu \\ (\mu+1)x+(\mu-1)y=\mu^2 \end{cases}$

1728. $\begin{cases} (\mu+5)x+(2\mu+3)y=3\mu+2 \\ (3\mu+10)x+(5\mu+6)y=2\mu+4 \end{cases}$

1729. $\begin{cases} \mu(x+y)+\mu^2(2x-3y-2)=\mu+3 \\ \mu(1-\mu)x+\mu(y-1)=2\mu^2(x-y)-3\mu^2-2. \end{cases}$

Συστήματα ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (730).

1730. $\begin{cases} 2x+3y-\omega=4 \\ x-5y+3\omega=3 \\ 5x+y+\omega=41 \end{cases}$ 1731. $\begin{cases} 5x+2y-3\omega=0 \\ 3x-4y+5\omega=10 \\ 7x-3y+6\omega=10 \end{cases}$

1732. $\begin{cases} x-2y-10\omega=-1 \\ 2x+y+5\omega=13 \\ 3x+3y+\omega=38. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστηματα: (731).

1733. $\begin{cases} 2x-\frac{y}{3}+\frac{3\omega}{2}=10 \\ x+y-\omega=5 \\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{6}+\frac{\omega}{2}=3 \end{cases}$ 1734. $\begin{cases} \frac{2x-y+\omega}{3x-y+\omega}=\frac{5}{3} \\ \frac{x-3y+\omega}{y-2\omega+1}=-1 \\ \frac{x+y+\omega}{2x-y+\omega}=1 \end{cases}$

1735. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{3\omega}{4}=\dfrac{19}{4} \\ y-15x+6\omega=-33 \\ \dfrac{\omega}{2}+\dfrac{5x}{6}+y=9 \end{cases}$ **1736.** $\begin{cases} \dfrac{5x+7y}{x+y}=6 \\ \dfrac{3(\omega-x)}{x-y+\omega}=1 \\ \dfrac{2x+3y-\omega}{x+6}=2. \end{cases}$

1737. (732). Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $3x+y-\omega=5$, $2x-4y+3\omega=8$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ μία τρίτη ἐξίσωσις, ἡ ὁποία νὰ ἀποτελῇ μὲ τὰς δύο δοθείσας: 1ον. ἕνα σύστημα ἀδύνατον· 2ον. ἕνα σύστημα ἀόριστον.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (733).

1738. $\begin{cases} 2x+y-8\omega=10 \\ 3x-2y+5\omega=14 \\ 8x-3y+2\omega=38 \end{cases}$ **1739.** $\begin{cases} x+2y+3\omega=14 \\ 3x+8y+4\omega=20 \\ 2x+6y+\omega=18 \end{cases}$

1740. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{5}+\omega=6,\quad x+\dfrac{6y}{5}+3\omega=18,\quad \dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{10}+\dfrac{\omega}{4}=\dfrac{3}{2}.$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (738).

1741. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{\omega}{2} \\ 2x+3y+4\omega=52 \end{cases}$ **1742.** $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{\omega-1}{5} \\ 5x+3y-2\omega=51 \end{cases}$

1743. $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{\omega}{\gamma}=\dfrac{\varphi}{\delta} \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi=\mu \end{cases}$ **1744.** $\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\alpha}=\dfrac{y-\beta}{\beta}=\dfrac{\omega-\gamma}{\gamma} \\ x+y+\omega=1. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (739).

1745. $\begin{cases} \mu x=\nu y=\varrho\omega \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\delta \end{cases}$ **1746.** $\begin{cases} \alpha x=\beta y=\gamma\omega=\delta\varphi \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{1}{\mu}. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (740).

1747. $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+1}-\dfrac{2}{2x-3y+5}=\dfrac{7}{20} \\ \dfrac{4}{x+y+1}+\dfrac{1}{2x-3y+5}=\dfrac{37}{40} \end{cases}$

1748. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-2y+1}+\dfrac{1}{x+2y-3}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{x+2y-3}-\dfrac{1}{3x-2y+1}=\dfrac{1}{12}. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (742).

1749. $\begin{cases} x+3(y+\omega+\varphi)=28 \\ y+3(\omega+\varphi+x)=26 \\ \omega+3(\varphi+x+y)=24 \\ \varphi+3(x+y+\omega)=22 \end{cases}$

1750. $\begin{cases} 2x+3(y+\omega+\varphi)=20 \\ 2y+3(\omega+\varphi+x)=14 \\ 2\omega+2(\varphi+x+y)=24 \\ 2\varphi+3(x+y+\omega)=32 \end{cases}$

1751. $\begin{cases} x+\alpha(y+\omega)=k \\ y+\beta(\omega+x)=\lambda \\ \omega+\gamma(x+y)=\mu. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (741).

1752. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{\omega}=3 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{\omega}=4 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{y}+\dfrac{5}{\omega}=3 \end{cases}$

1753. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}=9 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{4}{\omega}=11 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{\omega}=1 \end{cases}$

1754. $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{y}-\dfrac{\gamma}{\omega}=1 \\ \dfrac{\alpha}{x}-\dfrac{\beta}{y}+\dfrac{\gamma}{\omega}=\mu \\ -\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{y}+\dfrac{\gamma}{\omega}=\nu. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (743).

1755. $\begin{cases} \dfrac{xy}{5x+4y}=3 \\ \dfrac{y\omega}{3y+5\omega}=7 \\ \dfrac{\omega x}{2\omega+3x}=6 \end{cases}$

1756. $\begin{cases} \dfrac{y\omega}{y+\omega}=\dfrac{18}{5} \\ \dfrac{\omega x}{\omega+x}=\dfrac{36}{13} \\ \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{12}{5} \end{cases}$

1757. $\begin{cases} \dfrac{xy}{\alpha y+\beta x}=\gamma \\ \dfrac{x\omega}{\alpha\omega+\gamma x}=\beta \\ \dfrac{y\omega}{\beta\omega+\gamma y}=\alpha. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (736).

1758. $\begin{cases} x+2y=14 \\ y+3\omega=10 \\ \omega+4x=26 \end{cases}$

1759. $\begin{cases} 2x+3y-\omega=18 \\ 5x+2\omega=41 \\ y+4\omega=36 \end{cases}$

1760. $\begin{cases} x-2y+3\omega=21 \\ 2x+3y=13 \\ 4x-2\omega=8. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (737).

1761. $\begin{cases} 4x-3\omega+\varphi=10 \\ 5y+\omega-4\varphi=1 \\ 3y+\varphi=17 \\ x+2y+3\varphi=25 \end{cases}$

1762. $\begin{cases} 4x-3\omega+\varphi=24 \\ 5y+\omega-4\varphi=18 \\ 3y+\omega=14 \\ x+2y+3\omega=38 \end{cases}$

1763. $\begin{cases} x+y+2\omega+\varphi=-4 \\ 2y+3\omega=-1 \\ 5\omega-7\varphi=12 \\ 4x-5y=-2. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα μὲ τὴν μέθοδον Bezout: (734).

1764. $\begin{cases} 4x-3y+2\omega=9 \\ 2x+5y-3\omega=4 \\ 5x+2y-\omega=11 \end{cases}$

1765. $\begin{cases} 3x+2y+4\omega=17 \\ 2x+5y+3\omega=19 \\ 3x-y+\omega=8. \end{cases}$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι ὁρίζουσαι: (735).

1766. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

1767. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

1768. $\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}$

1769. $\begin{vmatrix} 1 & \gamma & \beta \\ \gamma & 1 & \alpha \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}$

Συμμετρικὰ συστήματα:

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (744).

1770. $\begin{cases} x+y=9 \\ y+\omega=15 \\ \omega+x=12 \end{cases}$

1771. $\begin{cases} x+y-\omega=\alpha \\ y+\omega-x=\beta \\ \omega+x-y=\gamma \end{cases}$

1772. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ y+\omega=\beta \\ \omega+x=\gamma. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (745).

1773. $\begin{cases} x+y+\omega=15 \\ y+\omega+\tau=20 \\ \omega+\tau+x=18 \\ \tau+x+y=16 \end{cases}$

1774. $\begin{cases} y+\omega+\varphi-x=\alpha \\ \omega+\varphi+x-y=\beta \\ \varphi+x+y-\omega=\gamma \\ x+y+\omega-\varphi=\delta \end{cases}$

1775.
$$\begin{cases} 2x+y+\omega+\varphi=\alpha \\ x+2y+\omega+\varphi=\beta \\ x+y+2\omega+\varphi=\gamma \\ x+y+\omega+2\varphi=\delta. \end{cases}$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (746).

1776.
$$\begin{cases} x+y=5 \\ y+\omega=8 \\ \omega+\varphi=9 \\ \varphi+\tau=11 \\ \tau+x=9 \end{cases}$$

1777.
$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15} \end{cases}$$

1778.
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=\mu \\ \frac{1}{y+\omega}=\varrho \\ \frac{1}{\omega+x}=\nu. \end{cases}$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (747).

1779.
$$\begin{cases} 2x+4y-\omega=6 \\ 2x+3y+5\omega=8 \end{cases}$$

1780.
$$\begin{cases} 2x-y+3\omega+2\varphi-\tau=20 \\ 3x+2y-\omega+\varphi+3\tau=-9 \\ x+4y+2\omega-5\varphi+2\tau=-9. \end{cases}$$

Ποῖον ἀπὸ τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι συμβιβαστὸν ἢ ἀδύνατον; (748).

1781.
$$\begin{cases} 2x+5y=15 \\ x-2y=3 \\ 3x+y=16 \end{cases}$$

1782.
$$\begin{cases} 7x-y=6 \\ 5x+2y=7 \\ x-y=2 \end{cases}$$

1783.
$$\begin{cases} x+y-8=0 \\ 2x-y-7=0 \\ 2x+5y=12. \end{cases}$$

1784. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$\mu x+y=1, \quad x-2y=\mu+2, \quad x+y=-1$$

νὰ εἶναι συμβιβασταί.

1785. (750). Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha x+\beta y=\gamma \ (1), \quad \alpha' x+\beta' y=\gamma' \ (2), \quad \alpha'' x+\beta'' y=\gamma'' \ (3)$$

ἵνα αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι συμβιβασταί, δηλ. νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα αὐτῶν.

1786. (751). Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$x+2y=\alpha \ (1), \quad x-2y=\beta \ (2), \quad x-3y=0 \ (3)$$

εἶναι συμβιβασταί.

1787. (752). Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$x+y=\mu \quad (1), \qquad \alpha x+\beta y=\mu^2 \quad (2), \qquad \alpha^2x+\beta^2y=\mu^3 \quad (3)$$

νὰ εἶναι συμβιβασταί.

1788. (753). Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ἐξισώσεις

$$(2\mu+5)x+(3\mu+1)y+3=0 \quad (1), \quad (\mu+5)x+(2\mu+3)y-18=0 \quad (2), \quad y-2x=0 \quad (3)$$

νὰ εἶναι συμβιβασταί.

1789. (754). Νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $x+y$ τῶν ἀγνώστων, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα

$$(5\mu+1)x+(3\mu+2)y=15 \quad (1), \qquad (13\mu-14)x-(2\mu-5)y=9 \quad (2)$$

νὰ εἶναι ἴσον μὲ 3.

1790. (755). Δίδεται τὸ σύστημα

$$4x-3y=30 \quad (1), \qquad 5x-\alpha y=13\alpha+2 \quad (2)$$

καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ὁ α εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $x+y=4$.

1791. (756). Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ τὸ σύστημα

$$2x-5y=3 \quad (1), \qquad (\mu+2)x+(4-\mu)y=1+\mu \quad (2)$$

ἔχει μίαν λύσιν, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν $y=3x$;

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι συμβιβαστά; (757).

1792. $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x-4y=1 \\ \mu x+(\mu+1)y=12 \end{cases}$ **1793.** $\begin{cases} 3x-5y=2\mu-1 \\ x+3y=\mu-7 \\ 5x-2y=2\mu. \end{cases}$

Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι συμβιβαστά; (758).

1794. $\begin{cases} 2x-y=\alpha \\ 2y-x=\beta \\ 3(\alpha x-\beta y)=2\gamma^2 \end{cases}$ **1795.** $\begin{cases} x-\alpha y=2 \\ x+\beta y=3 \\ (\alpha+\beta)(x-y)=2\gamma+\alpha-1. \end{cases}$

1796. (759). Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα τὸ σύστημα

$$\begin{cases} A=x+y+\omega-(\alpha+\beta+\gamma)=0 \\ B=\alpha x+\beta y+\gamma\omega-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0 \\ \Gamma=\beta x+\gamma y+\alpha\omega-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0 \\ \Delta=\gamma x+\alpha y+\beta\omega-4\alpha\beta=0 \end{cases}$$

εἶναι συμβιβαστόν. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς σχέσεως αὐτῆς, νὰ λυθῇ τὸ δοθὲν σύστημα.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (760).

1797. $\begin{cases} 3x+4y-2\omega=0 \\ 6x-y-\omega=0 \\ x-2y+3\omega=23 \end{cases}$ **1798.** $\begin{cases} x+y+\omega=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 \\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=1 \end{cases}$

1799. $\begin{cases} x+y+\omega=0 \\ (\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)\omega=0 \\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=1 \end{cases}$

1800. $\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma \omega=0 \\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=0 \\ \alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3\omega=\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta) \end{cases}$

1801. $\begin{cases} x+y+\omega=0 \\ \dfrac{\alpha^2x}{\alpha-\delta}+\dfrac{\beta^2y}{\beta-\delta}+\dfrac{\gamma^2\omega}{\gamma-\delta}=0 \\ \dfrac{\alpha x}{\alpha-\delta}+\dfrac{\beta y}{\beta-\delta}+\dfrac{\gamma\omega}{\gamma-\delta}=\delta(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta). \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (761).

1802. $\begin{cases} x+3y+5\omega+3\varphi-28=0 \\ x+y+2\omega+\varphi-13=0 \\ x+2y+5\omega+4\varphi-26=0 \\ x+3y+8\omega+5\varphi-35=0 \end{cases}$

1803. $\begin{cases} 2x+3y-67=0 \\ x-y+2\omega-36=0 \\ 2y-3\omega+\varphi=0 \\ \omega-\varphi+10=0. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (762).

1804. $\begin{cases} x+y+\omega+\varphi+\tau-9=0 \\ 8x-5\omega+10=0 \\ x+\varphi+2\tau-10=0 \\ x+2\omega-5\varphi+16=0 \\ x+2y+3\omega+4\varphi+5\tau-37=0 \end{cases}$

1805. $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 4\omega-3\varphi=18 \\ 5y-3\omega=18 \\ 20\varphi-3x=-4 \end{cases}$

1806. $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ x+y-2\omega=-5 \\ 3y-5\omega+\varphi=-10 \\ \omega-\varphi=-2. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (763).

1807. $\begin{cases} y\omega+x\omega+xy=12xy\omega \\ 3y\omega-4x\omega+5xy=18xy\omega \\ 5y\omega-3x\omega+2xy=13xy\omega \end{cases}$

1808. $\begin{cases} 3y\omega+2x\omega-xy=xy\omega \\ 30y\omega+12xy-18x\omega=13xy\omega \\ 18xy+24y\omega-42x\omega=5xy\omega. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (764).

1809. $\dfrac{x}{y+\omega+1}=\dfrac{y}{\omega+x}=\dfrac{\omega}{x+y-1}=x+y+\omega$

1810. $\dfrac{2x+3y-4\omega}{x+5}=\dfrac{3x+4y-2\omega}{5x}=\dfrac{4x+2y-3\omega}{4x-1}=\dfrac{x+y-\omega}{6}.$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (765).

1811. $\begin{cases} x+y-\omega=3\alpha-\beta-\gamma \\ x-y+\omega=3\beta-\alpha-\gamma \\ y+\omega-x=3\gamma-\beta-\alpha \end{cases}$

1812. $\begin{cases} x+y+\omega=\alpha+\beta \\ x+y-\omega=3\alpha-\beta \\ x-y+\omega=3\beta-\alpha \end{cases}$

1813. $\begin{cases} \gamma x+\alpha y=\beta \\ \alpha y+\beta x=\gamma \\ \beta\omega+\gamma y=\alpha. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (766).

1814. $\begin{cases} 2x+y+\omega+\varphi=\alpha \\ x+2y+\omega+\varphi=\beta \\ x+y+2\omega+\varphi=\gamma \\ x+y+\omega+2\varphi=\delta \end{cases}$

1815. $\begin{cases} x+\alpha y=\lambda \\ y+\beta\omega=\mu \\ \omega+\gamma\varphi=\nu \\ \varphi+\delta x=\varrho \end{cases}$

1816. $\begin{cases} x(y+\omega)=\alpha \\ y(\omega+x)=\beta \\ \omega(x+y)=\gamma. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (767).

1817. $\begin{cases} x+y-\omega=\alpha \\ y+\omega-\varphi=\beta \\ \omega+\varphi-\tau=\gamma \\ \varphi+\tau-x=\delta \\ \tau+x-y=\varepsilon \end{cases}$

1818. $\begin{cases} x+y-\omega=\alpha-1 \\ y+\omega-\varphi=2\alpha-8 \\ \omega+\varphi-\tau=\alpha+4 \\ \varphi+\tau-x=6\alpha+2 \\ \tau+x-y=5\alpha+3. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (768).

1819. $\begin{cases} (\varrho+\mu)x-(\varrho-\mu)y=2\nu\varrho \\ (\mu+\nu)y-(\mu-\nu)\omega=2\mu\varrho \\ (\nu+\varrho)\omega-(\nu-\varrho)x=2\mu\nu \end{cases}$

1820. $\begin{cases} (\omega+x)\mu-(\omega-x)\nu=2y\omega \\ (x+y)\nu-(x-y)\varrho=2x\omega \\ (y+\omega)\varrho-(y-\omega)\mu=2xy. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (769).

1821. $\begin{cases} k(x+y+\omega)=\alpha-\mu x \\ k(y+\omega+\varphi)=\beta-\nu y \\ k(\omega+\varphi+x)=\gamma-\lambda\omega \\ k(\varphi+x+y)=\delta-\varrho\varphi \end{cases}$

1822. $\begin{cases} xyz=\alpha(xy-yz+zx) \\ xyz=\beta(xy+yz-zx) \\ xyz=\gamma(-xy+yz+zx). \end{cases}$

1823. (770). Δίδεται τὸ πολυώνυμον $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, δ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον αὐτὸ μηδενίζεται διὰ $x=0$ καὶ διὰ $x=1$, ὅτι διὰ $x=\frac{2}{3}$ λαμβάνει τὴν τιμὴν -4 καὶ διὰ $x=\frac{4}{5}$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $-\frac{16}{5}$. Μετὰ ταῦτα νὰ ἀναλυθῇ τὸ πολυώνυμον εἰς γινόμενον παραγόντ:

1824. (771). Δίδεται τὸ σύστημα:

$$\alpha x-6y=5\alpha-3, \qquad 2x+(\alpha-7)y=-7\alpha+29$$

καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α: 1ον) τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον; 2ον) τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον; 3ον) τὸ σύστημα ἔχει τὴν λύσιν $x=y$.

1825. (772). Νὰ ὁρισθῇ ὁ α, ἵνα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος

$$(\alpha-1)x-3y=12 \quad (1), \qquad 4x+(3\alpha+2)y=5 \quad (2)$$

εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 8.

1826. (773) Νὰ ὁρισθῇ ὁ α εἰς τρόπον, ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα

$$(\alpha+2)x+(1+5\alpha)y=15 \quad (1), \qquad (5-2\alpha)x+(1-10\alpha)y=9 \quad (2)$$

νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $x+y=-6$.

1827. (774). Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β τὸ σύστημα

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=15 \quad (1), \qquad (2\alpha-3\beta)x+(2\alpha-5\beta)y=\alpha+2\beta \quad (2)$$

ἔχει τὴν λύσιν $x=3$, $y=-7$;

1828. (775). Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ σύστημα

$$(\lambda-1)x-y=0 \quad (1), \qquad 2\lambda x+3y-7\omega=0 \quad (2), \qquad (\lambda+2)x+2y-6\omega=0 \quad (3)$$

εἶναι ἀόριστον;

1829. (776). Ἐὰν μεταξὺ τῶν x, y, ω ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\frac{2(x+3y)}{x-y}=\frac{-6(y+\omega)}{4(y-\omega)}=\frac{2(3\omega-x)}{5(\omega+x)}$$

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $6x+3y+\omega=0$.

1830. (777). Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{x}{\alpha-1}+\frac{y}{\alpha-3}+\frac{\omega}{\alpha-5}=0, \quad \frac{x}{\alpha-3}+\frac{y}{\alpha-5}+\frac{\omega}{\alpha-7}=0, \quad x+y+\omega=8.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων δύνανται νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὰς μορφάς: $x=(\alpha-1)(\alpha-3)$, $y=-2(\alpha-3)(\alpha-5)$, $\omega=(\alpha-5)(\alpha-7)$. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α, ἵνα αἱ τιμαὶ αὐταὶ εἶναι ἀκέραιαι καὶ θετικαί.

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (778).

1831. $\begin{cases} x+2y+(\mu+1)\omega=4 \\ 2x+3y+(\mu+2)\omega=6 \\ 3x+(3\mu+4)y+3\omega=8 \end{cases}$ **1832.** $\begin{cases} x+y+\omega=6 \\ \mu x+4y+\omega=5 \\ 6x+(\mu+2)y+2\omega=13. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (779).

1833. $\begin{cases} (\mu+1)x+y+\omega=\mu-1 \\ x+(\mu+1)y+\omega=4-\mu \\ x+y+(\mu+1)\omega=-3 \end{cases}$ **1834.** $\begin{cases} \mu x+y+\omega=1 \\ x+\mu y+\omega=\mu \\ x+y+\mu\omega=\mu^2. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (780)

1835. $\begin{cases} \mu x+y+\omega=\mu^2 \\ x+\mu y+\omega=3\mu \\ x+y+\mu\omega=2 \end{cases}$ **1836.** $\begin{cases} 3x+5y+\mu\omega=2 \\ 5x+3y+\mu\omega=2 \\ \mu x+5y+3\omega=2. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (781).

1837. $\left\{\begin{array}{l} \mu x+y+\omega+\varphi=1 \\ x+\mu y+\omega+\varphi=\mu \\ x+y+\mu\omega+\varphi=\mu^2 \\ x+y+\omega+\mu\varphi=\mu^3 \end{array}\right.$ **1838.** $\left\{\begin{array}{l} \mu x+y+\omega-\mu=0 \\ \mu x+\mu y+\omega-1=0 \\ x+\mu y+\mu\omega-1=0 \\ x+y+\mu\omega-\mu=0. \end{array}\right.$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (782).

1839. $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-4\omega=5 \\ 2\alpha x+3\beta y+(\beta-5\alpha)\omega=2\alpha+3\beta \\ \beta x+3\alpha y+(\alpha-\beta)\omega=\alpha+4\beta \end{array}\right.$ **1840.** $\left\{\begin{array}{l} \mu x+y-\omega=1 \\ x+\mu y-\omega=1 \\ -x+y+\mu\omega=1. \end{array}\right.$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (783).

1841. $\left\{\begin{array}{l} x+y+\omega=\alpha+\beta \\ x-y=2\beta \\ 2x(\alpha-\beta)-(y-\omega)(\alpha+\beta)=0 \end{array}\right.$ **1842.** $\left\{\begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\omega=1 \\ x+\alpha\beta y+\omega=\beta \\ x+\beta y+\alpha\omega=1. \end{array}\right.$

Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (784).

1843. $\left\{\begin{array}{l} \alpha x+\beta y-\gamma\omega=\alpha\beta \\ 3\alpha x-\beta y+2\gamma\omega=\alpha(5\gamma-\beta) \\ 3y+2\omega=5\alpha \end{array}\right.$

1844. $\left\{\begin{array}{l} x+y+(2\alpha+1)\omega=-(7\alpha^2-6\alpha-16) \\ (\alpha+2)x-(3\alpha+4)y-\omega=7\alpha^2-6\alpha-16 \\ (3\alpha+4)x-(\alpha+2)y+\omega=16+6\alpha-7\alpha^2. \end{array}\right.$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (785).

1845. $\left\{\begin{array}{l} -x+y+\omega-1=0 \\ x-y+\omega+1=0 \\ \mu^2 x+\mu y+\omega=\mu^5 \end{array}\right.$ **1846.** $\left\{\begin{array}{l} \gamma y-\beta\omega=\lambda \\ \alpha\omega-\gamma x=\mu \\ \beta x-\alpha y=\nu \end{array}\right.$

1847. $\left\{\begin{array}{l} x+y+\omega=\alpha \\ \dfrac{x-\mu}{\nu-\varrho}=\dfrac{y-\nu}{\varrho-\mu}=\dfrac{\omega-\varrho}{\mu-\nu}. \end{array}\right.$

1848. (786). Ἐὰν τὰ λ, μ, $\lambda+\mu$ εἶναι διάφορα τοῦ μηδενός, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σύστημα:

$$A=\frac{y}{\beta}+\frac{\omega}{\gamma}-\lambda\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)=0, \qquad B=\frac{y}{\beta}+\frac{\omega}{\gamma}-\mu\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)=0$$

$$\Gamma=\frac{y}{\beta}-\frac{\omega}{\gamma}-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)=0, \qquad \Delta=\frac{y}{\beta}-\frac{\omega}{\gamma}-\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)=0$$

ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

1849. (787). Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$x=\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi \quad (1), \qquad y=\alpha x+\gamma\omega+\delta\varphi \quad (2),$$
$$\omega=\alpha x+\beta y+\delta\varphi \quad (3), \qquad \varphi=\alpha x+\beta y+\gamma\omega \quad (4)$$

νὰ ἐξαχθῇ ἡ σχέσις:

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{\beta}{\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma+1}+\frac{\delta}{\delta+1}=1.$$

1850. (788). Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x+\beta\,(y+\omega+\varphi)=\gamma \\ \alpha y+\beta_1(\omega+\varphi+x)=\gamma_1 \\ \alpha\omega+\beta_2(\varphi+x+y)=\gamma_2 \\ \alpha\varphi+\beta_3(x+y+\omega)=\gamma_3 \end{array}\right.$$

(Σχολὴ Ἀεροπορίας 1933)

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (789).

1851.
$$\left\{\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3=0 \end{array}\right.$$

1852.
$$\left\{\begin{array}{l} x+y+\omega+\alpha(y+\omega)+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \\ x+y+\omega+\beta(y+\omega)+\beta^2\omega+\beta^3=0 \\ x+y+\omega+\gamma(y+\omega)+\gamma^2\omega+\gamma^3=0. \end{array}\right.$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (790)

1853.
$$\left\{\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^4=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^4=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^4=0 \end{array}\right.$$

1854.
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^3x+\alpha^2y+\alpha\omega+1=0 \\ \beta^3x+\beta^2y+\beta\omega+1=0 \\ \gamma^3x+\gamma^2y+\gamma\omega+1=0. \end{array}\right.$$

1855. (791). Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3\varphi+\alpha^4=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3\varphi+\beta^4=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3\varphi+\gamma^4=0 \\ x+\delta y+\delta^2\omega+\delta^3\varphi+\delta^4=0. \end{array}\right.$$

1856. (792). Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{\omega}{\gamma}=\frac{x}{\beta}+\frac{y}{\gamma}+\frac{\omega}{\alpha}=\frac{x}{\gamma}+\frac{y}{\alpha}+\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

1857. (793). Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=1 \\ \alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha^4x+\beta^4y+\gamma^4\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta. \end{array}\right.$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα: (794).

1858.
$$\left\{\begin{array}{l} x+y+\omega=1 \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\delta \\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=\delta^2 \end{array}\right.$$

1859.
$$\left\{\begin{array}{l} x+y+\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2. \end{array}\right.$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα : (795).

1860. $\begin{cases} x-\alpha y+\alpha^2\omega=\alpha^3 \\ x-\beta y+\beta^2\omega=\beta^3 \\ x-\gamma y+\gamma^2\omega=\gamma^3 \end{cases}$ **1861.** $\begin{cases} x+y+\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta \\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα : (796).

1862. $$\begin{cases} \dfrac{x}{\upsilon-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon-\gamma}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon'-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon'-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon'-\gamma}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon''-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon''-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon''-\gamma}=1 \end{cases}$$

1863. $$\begin{cases} \dfrac{x}{\upsilon_1-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_1-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_1-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_1-\delta}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon_2-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_2-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_2-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_2-\delta}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon_3-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_3-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_3-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_3-\delta}=1 \\ \dfrac{x}{\upsilon_4-\alpha}+\dfrac{y}{\upsilon_4-\beta}+\dfrac{\omega}{\upsilon_4-\gamma}+\dfrac{\varphi}{\upsilon_4-\delta}=1. \end{cases}$$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1864. $$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha-\lambda}+\dfrac{y}{\alpha-\mu}+\dfrac{\omega}{\alpha-\nu}=1 \\ \dfrac{x}{\beta-\lambda}+\dfrac{y}{\beta-\mu}+\dfrac{\omega}{\beta-\nu}=1 \\ \dfrac{x}{\gamma-\lambda}+\dfrac{y}{\gamma-\mu}+\dfrac{\omega}{\gamma-\nu}=1 \end{cases}$$

1865. $$\begin{cases} x+y+\varphi+\omega=1 \\ \alpha x+\beta y+\gamma\varphi+\delta\omega=\mu \\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\varphi+\delta^2\omega=\mu^2 \\ \alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3\varphi+\delta^3\omega=\mu^3. \end{cases}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

---

1. Προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους

358. Τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ποὺ ἐλύθησαν τὰ προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον (§ 287). Πρέπει μόνον νὰ προσέχωμεν νὰ εὑρίσκωμεν τόσας ἐξισώσεις, ὅσοι εἶναι οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος, ἄλλως τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων τοῦ προβλήματος θὰ ἦτο ἀόριστον.

359. Πρόβλημα 1ον. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ* $\frac{2}{3}$, *ὅταν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του τὸν ἀριθμὸν 4 καὶ γίνεται ἴσον μὲ* $\frac{1}{2}$, *ὅταν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του τὸν ἀριθμὸν 1.*

Λύσις: Ἔστω x ὁ ἀριθμητὴς καὶ y ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{3} \quad (1) \qquad \frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται, ἐὰν $y+4\neq 0$,

$$3(x+4)=2(y+4) \quad ἢ \quad 3x+12=2y+8 \quad ἢ \quad 3x-2y=-4 \quad (1')$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται, ἐὰν $y-1\neq 0$,

$$2(x-1)=y-1 \quad ἢ \quad 2x-2=y-1 \quad ἢ \quad 2x-y=1 \quad (2')$$

Λύομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1′) καὶ (2′) μὲ

μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $x=6$ καὶ $y=11$. Ὥστε τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{6}{11}$.

360. Πρόβλημα 2ον. *Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων του εἶναι ἴσον μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅτι, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ.*

Λύσις : Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ἐν πρώτοις ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=\frac{3}{4}y \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει x δεκάδας καὶ y μονάδας, γράφεται $10x+y$. Ἂν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του, ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ ἑπομένως θὰ γράφεται $10y+x$. Ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, ὁ νέος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ κατὰ 18, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(10y+x)=(10x+y)+18 \qquad (2$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται

$$10y+x-10x-y=18 \quad ἤ \quad 9y-9x=18 \quad ἤ \quad y-x=2 \qquad (2')$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν τὸ x μὲ τὴν τιμήν του, ποὺ δίδει ἡ (1) καὶ ἔχομεν

$$y-\frac{3y}{4}=2 \quad ἤ \quad 4y-3y=8, \quad ἄρα \quad y=8.$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ y θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ εὑρίσκομεν $x=\frac{3}{4}\cdot 8=6$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει 6 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, δηλ. εἶναι ὁ 68.

361. Πρόβλημα 3ον. *Ὁ Πέτρος ἀπαντᾷ εἰς τὸν Γεώργιον, ὁ ὁποῖος τὸν ἠρώτησε περὶ τῆς ἡλικίας του: «Ἔχω τριπλασίαν ἡλικίαν ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἴχετε, ὅταν εἶχον τὴν ἡλικίαν, ποὺ ἔχετε τώρα καὶ ὅταν θὰ ἔχετε τὴν ἡλικίαν ποὺ ἔχω, θὰ ἔχωμεν καὶ οἱ δύο ἡλικίαν 98 ἐτῶν». Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου.*

Λύσις : Ἔστω x ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου καὶ y ἡ ἡλικία τοῦ Γεωργίου. Ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν των εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $x-y$. Ὥστε, ὅταν ὁ Πέτρος εἶχε τὴν ἡλικίαν y, ὁ Γεώργιος εἶχε ἡλικίαν $y-(x-y)$ ἤ $2y-x$ καὶ ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, τὸ τριπλάσιον τῆς

ἡλικίας αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ τὴν πραγματικὴν ἡλικίαν τοῦ Πέτρου, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x=3(2y-x)$ (1)
Ὅταν ὁ Γεώργιος θὰ ἔχῃ ἡλικίαν x, ὁ Πέτρος θὰ ἔχῃ $x+(x-y)$ ἢ $2x-y$ καὶ κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$x+(2x-y)=98 \qquad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) μὲ μίαν ἀπὸ τὰς γνωστὰς μεθόδους καὶ εὑρίσκομεν $x=42$ καὶ $y=28$. Ὥστε ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου ἦτο 42 ἔτη.

362. Πρόβλημα 4ον. *Οἰνέμπορος ἔχει δύο ποιότητας οἴνου. Μία ὀκᾶ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ μία ὀκᾶ τῆς δευτέρας ἀξίζουν 6 δρχ. Ἀλλὰ μ ὀκάδες τῆς πρώτης ποιότητος καὶ (3μ—10) ὀκάδες τῆς δευτέρας ἀξίζουν 42,80 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς κάθε ποιότητος καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ πρόβλημα, ὡς πρὸς τὴν παράμετρον μ.*

Λύσις : Ἔστω, ὅτι ἡ ὀκᾶ τοῦ οἴνου τῆς πρώτης ποιότητος ἀξίζει x δραχμὰς καὶ ἡ ὀκᾶ τῆς δευτέρας ποιότητος ἀξίζει y δραχμάς. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\text{I}\ \begin{cases} x+y=6 & (1)\\ \mu x+(3\mu-10)y=42,80 & (2)\end{cases}$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν $x=6-y$ (1′)
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2) τὸ x μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν

$$\mu(6-y)+(3\mu-10)y=42,80 \quad ἢ \quad 6\mu-\mu y+3\mu y-10y=42,80$$

ἢ $2\mu y-10y=42,80-6\mu$ ἢ $(2\mu-10)y=42,80-6\mu$ (3)

Ἐὰν $2\mu-10\neq 0$ ἢ $\mu\neq 5$, ἡ ἐξίσωσις (3) ἔχει τὴν λύσιν

$$y=\frac{42,80-6\mu}{2\mu-10}=\frac{21,40-3\mu}{\mu-5}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1′) τὸ y μὲ τὴν τιμήν του αὐτὴν καὶ ἔχομεν $x=6-\dfrac{21,40-3\mu}{\mu-5}=\dfrac{9\mu-51,40}{\mu-5}$.

Διερεύνησις : Ἐὰν $2\mu-10=0$, δηλ. $\mu=5$, ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται

$$0y=42,80-6\cdot 5 \quad ἢ \quad 0y=12,80$$

δηλ. εἶναι ἀ δ ύ ν α τ ο ς.

Ἐὰν $2\mu-10\neq 0$, δηλ. $\mu\neq 5$, τὸ σύστημα ἔχει τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν $x=\dfrac{9\mu-51,40}{\mu-5}$ καὶ $y=\dfrac{21,40-3\mu}{\mu-5}$.

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως παραδεκταὶ αἱ τιμαὶ αὗται τῶν x καὶ y πρέπει νὰ εἶναι θετικαί: δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{9\mu-51,40}{\mu-5}>0 \quad (4) \qquad \frac{21,40-3\mu}{\mu-5}>0 \qquad (5)$$

Ἡ ἀνισότης (4) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(\mu-5)(9\mu-51,40)>0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\mu<5$ καὶ διὰ $\mu>5,71$.

Ἡ ἀνισότης (5) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$(\mu-5)(21,40-3\mu)>0 \quad \text{ἢ} \quad (\mu-5)(3\mu-21,40)<0$$

καὶ ἀληθεύει διὰ $5<\mu<7,13$.

Καὶ αἱ δύο ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $5,71<\mu<7,13$.

2. Προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους

363. Πρόβλημα 1ον. *Νὰ εὑρεθῇ ἕνας τριψήφιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος αὐξάνει κατὰ 270, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο πρώτων πρὸς τὰ ἀριστερὰ ψηφίων του καὶ ὁ ὁποῖος ἐλαττοῦται κατὰ 99, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ἀκραίων ψηφίων του. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 20.*

Λύσις : Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, y τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἔχει x ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ ω μονάδας γράφεται

$$100x+10y+\omega.$$

Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία του, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y ἑκατοντάδας, x δεκάδας καὶ ω μονάδας καὶ ἑπομένως γράφεται

$$100y+10x+\omega.$$

Ἐπειδὴ ὁ νέος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ κατὰ 270 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(100y+10x+\omega)=(100x+10y+\omega)+270 \quad \text{ἢ} \quad 90y-90x=270$$

$$\text{ἢ} \quad y-x=3 \qquad (1)$$

Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ἀκραῖα ψηφία του, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ ω ἑκατοντάδας, y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ ἑπομένως γράφεται $100\omega+10y+x$. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι κατὰ 99 μικρότερος τοῦ ἀρχικοῦ ἀριθμοῦ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$100\omega+10y+x+99=100x+10y+\omega \quad \text{ἢ} \quad 99\omega-99x=-99$$

$$\text{ἢ} \quad \omega-x=-1 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι ἴσον μὲ 20 ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν $\quad x+y+\omega=20 \qquad (3)$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3).

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $\quad y=3+x \qquad (1')$

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $\quad \omega=x-1 \qquad (2')$

Τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν (3) καὶ ἔχομεν

$$x+3+x+x-1=20 \quad ἢ \quad x=6.$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x θέτομεν εἰς τὰς (1') καὶ (2') καὶ εὑρίσκομεν $y=9$ καὶ $ω=5$.

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει 6 ἑκατοντάδας, 9 δεκάδας καὶ 5 μονάδας, δηλ. εἶναι ὁ 695.

364. Πρόβλημα 2ον. *Ἕνας θεῖος θέλει νὰ μοιράσῃ 1 763 500 δραχμὰς εἰς τοὺς τρεῖς ἀνεψιούς του, ἡλικίας 15 ἐτῶν, 11 ἐτῶν καὶ 9 ἐτῶν εἰς τρόπον, ὥστε, ἂν καταθέσουν ἀμέσως τὰ μερίδιά των εἰς μίαν Τράπεζαν πρὸς 4 °/ₒ νὰ λάβουν κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν των (21ον ἔτος) τὸ αὐτὸ ποσόν, τόκους καὶ κεφάλαιον. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μερίδιον ἑκάστου ;*

Λύσις : Ἔστωσαν x, y, ω τὰ μερίδια τῶν ἀνεψιῶν ἀντιστοίχως. Ἐν πρώτοις ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $y+x+ω=1\,763\,500$.

Ὁ πρῶτος ἀνεψιός, ἂν καταθέσῃ x δρχ. πρὸς 4 °/ₒ θὰ λάβῃ, μετὰ $21-15=6$ ἔτη, τόκον $\frac{x\cdot 4\cdot 6}{100}$ ἢ $\frac{24x}{100}$ καὶ ἑπομένως θὰ λάβῃ κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του κεφάλαιον καὶ τόκους

$$x+\frac{24x}{100} \quad ἢ \quad \frac{124x}{100} \text{ δρχ.}$$

Ὁ δεύτερος ἀνεψιός, ἂν καταθέσῃ y δρχ. πρὸς 4 °/ₒ θὰ λάβῃ, μετὰ $21-11=10$ ἔτη, τόκον $\frac{y\cdot 4\cdot 10}{100}$ ἢ $\frac{40y}{100}$ καὶ ἑπομένως θὰ λάβῃ κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του, κεφάλαιον καὶ τόκους

$$y+\frac{40y}{100} \quad ἢ \quad \frac{140y}{100} \text{ δρχ.}$$

Ὁ τρίτος ἀνεψιός, ἂν καταθέσῃ ω δρχ. πρὸς 4 °/ₒ θὰ λάβῃ, μετὰ $21-9=12$ ἔτη, τόκον $\frac{ω\cdot 4\cdot 12}{100}$ ἢ $\frac{48ω}{100}$ καὶ ἑπομένως θὰ λάβῃ κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν του, κεφάλαιον καὶ τόκους

$$ω+\frac{48ω}{100} \quad ἢ \quad \frac{148ω}{100} \text{ δρχ.}$$

Ἐπειδή, κατὰ τὸ πρόβλημα, τὰ χρήματα ποὺ θὰ λάβουν καὶ οἱ τρεῖς ἀνεψιοί, κατὰ τὴν ἐνηλικίωσίν των, θὰ εἶναι ἴσα, ἔχομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{124x}{100}=\frac{140y}{100}=\frac{148ω}{100} \quad ἢ \quad 31x=35y=37ω \qquad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Παριστάνομεν τὰ ἴσα γινόμενα τῆς (2) μὲ λ καὶ ἔχομεν $31x=35y=37\omega=\lambda$ ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\lambda}{31},\quad y=\frac{\lambda}{35},\quad \omega=\frac{\lambda}{37} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ x, y, ω μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\frac{\lambda}{31}+\frac{\lambda}{35}+\frac{\lambda}{37}=1\,763\,500$$

ἢ $$1\,295\lambda+1\,147\lambda+1\,085\lambda=1\,763\,500\cdot 40\,145$$

ἢ $$3\,527\lambda=1\,763\,500\cdot 40\,145$$

ἄρα $$\lambda=\frac{1\,763\,500\cdot 40\,145}{3\,527}=20\,072\,500.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (3) τὸ λ μὲ τὴν τιμήν του καὶ εὑρίσκομεν

$$x=\frac{20\,072\,500}{31}=647\,500,\quad y=\frac{20\,072\,500}{35}=573\,500,$$

$$\omega=\frac{20\,072\,500}{37}=542\,500.$$

Ὥστε τὰ μερίδια τῶν ἀνεψιῶν ἦσαν 647 500 δρχ., 573 500 δρχ., 542 500 δρχ.

Ἀσκήσεις

1. Προβλήματα μὲ δύο ἀγνώστους

1866. (797). Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β: δός μου 10 ἐκ τῶν μήλων σου καὶ θὰ ἔχω 1,5 τῶν ἰδικῶν σου. Ὁ Β ἀπαντᾷ: δός μου 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια τῶν ἰδικῶν σου. Πόσα μῆλα εἶχε καθείς;

1867. (798). Ἀγοράζει τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 5 μέτρα, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 6 μέτρα ἀντὶ 122 δραχμῶν. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξε τὰ δύο εἴδη, ἐζημιώθη ὁ ἀγοραστὴς 2 δραχμάς. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἴδους;

1868. (799). Θέλων τις νὰ ἀγοράσῃ μίαν οἰκίαν ἀποφασίζει νὰ ζητήσῃ ἀπὸ ἕκαστον ὀφειλέτην τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, διὰ νὰ πληρώσῃ τὴν οἰκίαν. Ἐὰν ζητήσῃ ἀπὸ ἕκαστον ὀφειλέτην 2 250 δραχμὰς θὰ τοῦ ἐχρειάζοντο ἀκόμη 6 250 δρχ., ἐνῷ ἐὰν ἐζήτει 3 000 δραχμὰς ἀπὸ ἕκαστον, θὰ τοῦ ἐπερίσσευαν 5 000 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ οἰκία καὶ πόσοι ἦσαν οἱ ὀφειλέται;

1869. (800). Ἕνα χρηματικὸν ποσὸν διενεμήθη μεταξὺ προσώπων τινῶν. Ἐὰν τὰ πρόσωπα ἦσαν 3 ἐπὶ πλέον, ἕκαστον πρόσωπον θὰ ἐλάμβανε 1 δραχμὴν ὀλιγώτερον καὶ ἐὰν τὰ πρόσωπα ἦσαν κατὰ δύο ὀλιγώτερα θὰ ἐλάμβανεν ἕκα-

στον πρόσωπον 1 δραχμὴν ἐπὶ πλέον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διανεμηθὲν ποσὸν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν προσώπων.

1870. (801). Ἐὰν ὁ Α εἶχε 36 βώλους ἀκόμη, θὰ εἶχε τριπλασίους τοῦ Β. Ἀλλὰ ἐὰν ὁ Β εἶχε 5 βώλους ἀκόμη, θὰ εἶχε τὸ ἥμισυ τῶν βώλων τοῦ Α. Πόσους βώλους εἶχεν ἕκαστος;

1871. (802). Παιδίον λέγει εἰς ἄλλο: ἐὰν μοῦ δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν μήλων σου θὰ ἔχω 40 μῆλα. Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ: δός μου σὺ τὸ ἥμισυ τῶν ἰδικῶν σου διὰ νὰ ἔχω 35. Πόσα μῆλα εἶχε τὸ καθέν;

1872. (803). Οἱ Α καὶ Β ἔβαλον στοίχημα 100 δρχ. Ἐὰν ὁ Α ἔχανε, θὰ εἶχε 250 δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ ἔχῃ ὁ Β· Ἐάν, τοὐναντίον, ὁ Β ἔχανε, θὰ εἶχε τὰ πέντε δέκατα ἕβδομα τῶν χρημάτων, τὰ ὁποῖα θὰ εἶχε τότε ὁ Α. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἕκαστος;

1873. (804). Οἱ Α καὶ Β παίζουν βώλους. Εἰς τὸ πρῶτον παιγνίδι ὁ Α κερδίζει τόσους βώλους, ὅσους εἶχε καὶ 4 ἀκόμη καὶ εὑρέθη μὲ διπλασίους βώλους ἀπὸ τὸν Β. Εἰς τὸ δεύτερον παιγνίδι ὁ Β κερδίζει τὸ ἥμισυ τῶν βώλων, ποὺ εἶχεν ἀρχικῶς καὶ 1 βῶλον ἀκόμη καὶ οὕτω εὑρέθη νὰ ἔχῃ τριπλασίους βώλους τοῦ Α. Πόσους βώλους εἶχεν ἀρχικῶς ἕκαστος;

1874. (805). Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι: 1ον. ἐὰν προσθέσωμεν 3 εἰς τὸν ἀριθμητήν του καὶ 1 εἰς τὸν παρονομαστήν του, τὸ νέον κλάσμα γίνεται ἴσον μὲ 2/3· 2ον. ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 1 ἀπὸ τὸν ἀριθμητήν του καὶ 3 ἀπὸ τὸν παρονομαστήν του, τὸ κλάσμα γίνεται ἴσον μὲ 1/2.

1875. (806). Νὰ εὑρεθῇ ἕνα κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε ἂν προσθέσωμεν 1 καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του νὰ γίνεται ἴσον μὲ δύο τρίτα καὶ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 2 καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του νὰ γίνεται ἴσον μὲ ἓν δεύτερον.

1876. (807). Ἐὰν ὁ Μ. Ἀλέξανδρος ἀπέθνησκε 9 ἔτη ἐνωρίτερον, θὰ ἐβασίλευε κατὰ τὸ 1/8 τῆς ζωῆς του. Ἐὰν ὅμως ἀπέθνησκεν 9 ἔτη βραδύτερον θὰ ἐβασίλευε κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς ζωῆς του. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανε καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἐβασίλευσεν;

1877. (808). Πρὸ 18 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ Α ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ Β. Μετὰ 9 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ Α θὰ εἶναι τὰ πέντε τέταρτα τῆς ἡλικίας τοῦ Β. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τῶν Α καὶ Β.

1878. (809). Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μὲ τὰ 2/3 τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅτι, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερος τοῦ ἀρχικοῦ.

1879. (810). Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 10 καὶ ὅτι, ἐὰν τὸν ἀντιστρέψωμεν προκύπτει νέος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὑπερβαίνει κατὰ 15 τὸ τετραπλάσιον τοῦ πρώτου.

1880. (811). Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 400 καὶ 500, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νὰ εἶναι 9. Ἂν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος μὲ τὰ 36/47 τοῦ πρώτου.

1881. (812). Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ

δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸν 4, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 604. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 34. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

1882. (813). Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ Δ διὰ τοῦ ἀκεραίου δ εἶναι 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 20. Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν διαιρετέον, τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον λαμβάνομεν ἄθροισμα 719. Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης.

1883. (814). Ἔμπορος ἠγόρασε μίαν ὡρισμένην ποσότητα ἐμπορευμάτων. Ἐπώλησεν ἔπειτα αὐτὰ καὶ ἐκέρδισεν 8 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως. Ἐὰν ἐπώλει αὐτὰ πρὸς 9 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς, θὰ ἐκέρδιζε 350 δραχμὰς περισσότερον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς, ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως καὶ τὸ κέρδος.

1884. (815). Ἔμπορος ἠγόρασε δύο εἴδη ὑφασμάτων· τὸ μὲν πρῶτον πρὸς 40 δρχ. τὸ μέτρον, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς 60 δρχ τὸ μέτρον· ἐπλήρωσε δὲ διὰ τὴν ἀγορὰν αὐτὴν ἐν ὅλῳ 4 400 δραχμάς. Ἐπώλησεν ἔπειτα τὸ πρῶτον μὲ κέρδος 30 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς καὶ τὸ δεύτερον μὲ κέρδος 25 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου εἴδους, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ συνολικὸν κέρδος παριστάνει τὰ 3/14 τῆς συνολικῆς τιμῆς τῆς πωλήσεως.

1885. (816). Ἀπὸ δύο διάφορα μεταλλεῖα Α καὶ Β ἐξάγομεν μετάλλευμα σιδήρου. Τὸ Α περιέχει 70 % σίδηρον καὶ τὸ Β 55 %. Ἀναμιγνύομεν μίαν ὡρισμένην ποσότητα μεταλλεύματος ἀπὸ τὸ Α μὲ μίαν ἄλλην ἀπὸ τὸ Β καὶ σχηματίζομεν ἕνα τρίτον μετάλλευμα, τὸ ὁποῖον περιέχει 60 % σιδήρου Ἐὰν εἴχομεν λάβει 15 γραμμάρια ἐπὶ πλέον ἀπὸ ἕκαστον τῶν δύο μεταλλευμάτων τότε τὸ μεῖγμα τοῦ μεταλλεύματος θὰ περιεῖχε 61,35 % σιδήρου. Νὰ εὑρεθῇ: 1ον. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν ἔγινεν ἡ ἀνάμειξις. 2ον. Πόσα γραμμάρια ἐλήφθησαν διὰ νὰ σχηματισθῇ τὸ μεῖγμα;

1886. (817). Οἰνέμπορος ἠγόρασε δύο βαρέλια Α καὶ Β οἴνου πρὸς 2,10 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Τὸ Α κοστίζει 52,50 δρχ. περισσότερον τοῦ Β. Ὅταν ἐπώλησεν ἐκ τοῦ Α τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ περιεχομένου οἴνου καὶ ἐκ τοῦ Β τὸ $\frac{1}{2}$, τὰ δύο βαρέλια εἶχον τὴν αὐτὴν ποσότητα οἴνου. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε κάθε βαρέλιον;

1887. (818). Κτηματίας πωλεῖ ἕνα κῆπον, μίαν ἄμπελον καὶ ἕνα ἀγρόν. Ἡ ἄμπελος εἶναι κατὰ 275 (μ^2) μικροτέρα τοῦ κήπου, ἀλλὰ τὸ τετραγ. μέτρον τῆς ἀμπέλου ἐπωλήθη κατὰ 2 δρχ. περισσότερον ἀπὸ τὸ τετραγ. μέτρον τοῦ κήπου. Ἐν τούτοις ἡ ἄμπελος ἐπωλήθη κατὰ 600 δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ κήπου. Ὁ ἀγρὸς ἦτο κατὰ 725 τετρ. μέτρα μεγαλύτερος τῆς ἀμπέλου καὶ τὸ τετραγ. μέτρον τοῦ ἀγροῦ αὐτοῦ ἐπωλήθη κατὰ 3,50 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ τετραγ. μέτρον τῆς ἀμπέλου. Ὁ ἀγρὸς οὕτω ἐπωλήθη κατὰ 1 425 δρχ. περισσότερον τῆς ἀμπέλου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου καὶ ἡ τιμὴ κατὰ τετραγ. μέτρον τοῦ κήπου αὐτοῦ.

Προβλήματα τόκου:

1888. (819). Ἔχει τις κεφάλαιον 5 400 δρχ. καὶ 6 500 δρχ. Λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 384 δρχ. καὶ ἐκ τῶν δύο. Ἐὰν τὸ πρῶτον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ

ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου καὶ τοὐναντίον, θὰ ἐλάμβανε 5,50 δρχ. περισσοτέρας ὡς τόκον ἢ πρίν. Τίνα εἶναι τὰ ἐπιτόκια;

1889. (820). Τοκίζει τις μέρος τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 3 %₀ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 2,5 %₀ καὶ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 3 800 δραχμάς. Ἐὰν ἐτόκιζε τὸ πρῶτον μέρος πρὸς 2,5 %₀ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 3 %₀, θὰ ἐλάμβανε τόκον κατὰ 100 δρχ. περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιόν του.

1890. (821). Ὁ λόγος δύο κεφαλαίων εἶναι 5 : 8. Ἐὰν αὐξήσωμεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κατὰ 10 000 δραχμάς, ὁ λόγος των γίνεται 50 : 77.

Ζητεῖται: 1ον. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο αὐτὰ κεφάλαια. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον μὲ τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη τὸ δεύτερον κεφάλαιον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πρῶτον ἐτοκίσθη πρὸς 4,5 %₀ καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐτησίων τόκων των εἶναι 9 : 16.

1891. (822). Δύο κεφάλαια ἔχουν λόγον 8 : 9. Κατετέθησαν δὲ πρὸς ἐπιτόκια τοιαῦτα, ὥστε, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν κεφαλαίων αὐτῶν τὸν ἐτήσιον τόκον του, τὰ προκύπτοντα κεφάλαια ἔχουν λόγον 209 : 234. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ τὰ ἐπιτόκια, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ ἐτήσιοι τόκοι τῶν δύο κεφαλαίων ἦσαν ἴσοι πρὸς 2 520 δραχμὰς ἕκαστος.

1892. (823). Ἐπιχειρηματίας κατέθεσεν ἕνα κεφάλαιον εἰς μίαν ἐπιχείρησιν, ἡ ὁποία τοῦ ἀπέδιδεν 6 %₀ καὶ ἕνα δεύτερον κεφάλαιον εἰς μίαν ἄλλην ἐπιχείρησιν, ἡ ὁποία τοῦ ἀπέδιδε 12 %₀. Ἐκ τοῦ πρώτου κεφαλαίου εἶχεν εἰσόδημα 7 200 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ εἰσόδημα τοῦ δευτέρου κεφαλαίου. Ἐὰν ἐνήλλασσε τὰς καταθέσεις του, θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ εἰσόδημα καὶ ἀπὸ τὰς δύο ἐπιχειρήσεις. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κατατεθέντα εἰς τὴν ἐπιχείρησιν κεφάλαια.

1893. (824) Κεφάλαιον 40 000 δραχμῶν ἐτοκίσθη ἐπὶ 9 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας· ἕνα δεύτερον κεφάλαιον 45 000 δραχμῶν ἐτοκίσθη ἐπὶ 5 μῆνας καὶ 10 ἡμέρας. Τὸ πρῶτον κεφάλαιον ἔδωσεν 640 δρχ. περισσότερον τόκον τοῦ δευτέρου Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπιτόκια πρὸς τὰ ὁποῖα ἐτοκίσθησαν τὰ κεφάλαια, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι θὰ ἔδιδον τὸν αὐτὸν τόκον, ἐὰν ἐτοκίζοντο ἐπὶ 1 ἔτος.

1894. (825). Κατέθεσέ τις ἕνα κεφάλαιον καὶ μετὰ 5 μῆνας ἔλαβε τόκον καὶ κεφάλαιον 24 400 δραχμάς. Ἐὰν κατέθετε τὸ κεφάλαιον ἐπὶ 11 μῆνας, θὰ ἐλάμβανε τόκον καὶ κεφάλαιον 24 880 δρχ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

1895. (826). Ἐδανείσθη τις ἕνα κεφάλαιον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον. Ἐὰν ἐπλήρωνε τὸ χρέος του μετὰ 15 μῆνας, θὰ ἐπλήρωνε τόκον καὶ κεφάλαιον 18 810 δρχ. Ἐὰν ἐπλήρωνε τὸ χρέος του μετὰ 15 μῆνας, θὰ ἐπλήρωνε 19 350 δρχ. Πόσον κεφάλαιον ἐδανείσθη καὶ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον:

1896. (827). Κατέθεσέ τις ἕνα κεφάλαιον πρὸς 3 %₀ καὶ μετά τινα χρόνον ἔλαβε τόκον 4 320 δραχμάς. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἔμενεν ἐπὶ 1 ἔτος ὀλιγώτερον, ἀλλ' ἐτοκίζετο πρὸς 4,5 %₀, θὰ ἐλάμβανε τόκον 4 860 δραχμάς. Πόσον κεφάλαιον κατέθεσε καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον;

1897. (828). Κατέθεσέ τις εἰς μίαν Τράπεζαν ἕνα κεφάλαιον πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον. Μετὰ 1 ἔτος ἀποσύρει τὸ κεφάλαιον καὶ καταθέτει αὐτὸ ηὐξημένον κατὰ 1 000 δραχμὰς εἰς ἄλλην Τράπεζαν μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 %₀

ἀνώτερον τοῦ προηγουμένου. Ὁ ἐτήσιος τόκος, τὸν ὁποῖον ἔλαβεν ἐκ τῆς δευτέρας Τραπέζης ἦτο μεγαλύτερος κατὰ 290 δραχμὰς τοῦ προηγουμένου. Μετὰ ἕνα ἔτος ἀποσύρει τὸ νέον κεφάλαιον καὶ καταθέτει αὐτό, ηὐξημένον κατὰ 500 δρχ. εἰς τρίτην Τράπεζαν μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 % ἀνώτερον τοῦ ἐπιτοκίου τῆς δευτέρας Τραπέζης. Ὁ ἐτήσιος τόκος, τὸν ὁποῖον ἔλαβεν ἐκ τῆς τρίτης Τραπέζης ἦτο κατὰ 285 δρχ. μεγαλύτερος τοῦ τόκου τοῦ δευτέρου ἔτους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, τὸ ἀρχικὸν ἐπιτόκιον, οἱ διαδοχικοὶ ἐτήσιοι τόκοι καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ, ἐὰν οἱ διάφοροι ὅροι τοῦ προβλήματος ἔχουν ἐκπληρωθῇ.

Προβλήματα μείξεως :

1898. (829). Οἰνοπώλης ἔχει δύο ποιότητας οἴνου. Ὅταν τὰς ἀναμείξῃ μὲ ἀναλογίαν 9 πρὸς 6, ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος τιμᾶται 2,72 δρχ. Ὅταν τὰς ἀναμείξῃ μὲ ἀναλογίαν 7 πρὸς 3, ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος τιμᾶται 2,64 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑκάστης ποιότητος.

1899. (830). Ἀνέμειξέ τις 7 χιλιόγραμμα οἰνοπνεύματος μετὰ 6 χιλιογράμμων οἰνοπνεύματος διαφόρου τίτλου καὶ ἔλαβε μεῖγμα 18°. Ἐὰν ὅμως ἀνεμείγνυε 9 χιλιόγραμμα τοῦ πρώτου οἰνοπνεύματος μετὰ 4 χιλιογράμμων τοῦ δευτέρου, θὰ ἐλάμβανε μεῖγμα 16°. Ποῖος ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου καὶ ποῖος ὁ βαθμὸς τοῦ δευτέρου οἰνοπνεύματος.

1900. (831). Ἔχομεν δύο βαρέλια Α καὶ Β οἴνου. Χύνομεν ἐκ τοῦ Α βαρελίου εἰς τὸ Β τόσας ὀκάδας, ὅσας ἔχει τὸ Β. Χύνομεν ἔπειτα ἐκ τοῦ Β βαρελίου εἰς τὸ Α, τόσας ὀκάδας, ὅσας ἔχει ἤδη τὸ Α. Ἔπειτα χύνομεν ἐκ τοῦ Α βαρελίου εἰς τὸ Β, τόσας ὀκάδας ὅσας εἶχε ἤδη τὸ Β. Μένουν τότε εἰς ἕκαστον βαρέλιον α ὀκάδες οἴνου. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας οἴνου περιεῖχε ἕκαστον βαρέλιον.

1901. (832). Ὁ Ἱέρων τῶν Συρακουσῶν ἔδωκε νὰ τοῦ κάνουν στέφανον ἐκ χρυσοῦ βάρους 7 465 γραμ. Ἵνα εὕρῃ ὁ Ἀρχιμήδης, ἂν ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε χρυσὸν δι' ἀργύρου, ἐβύθισε τὸν στέφανον εἰς τὸ ὕδωρ καὶ παρετήρησεν, ὅτι οὗτος ἔχασε 467 γραμ. τοῦ βάρους του. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 0,052 καὶ ὁ ἄργυρος 0,095 τοῦ βάρους του, πόσος ἦτο ὁ χρυσὸς τοῦ στεφάνου καὶ πόσος ὁ ἄργυρος ;

1902. (833). Χρυσοχόος ἔχει δύο κοσμήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον περιέχει 270 γραμ. χρυσοῦ καὶ 30 γραμ. χαλκοῦ καὶ τὸ δεύτερον περιέχει 200 γραμ. χαλκοῦ. Νὰ εὑρεθῇ πόσην ποσότητα πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν κοσμημάτων αὐτῶν διὰ νὰ σχηματίσῃ ἕνα κρᾶμα 400 γραμ. καὶ τίτλου 0,825.

1903. (834). Χρυσοχόος συνέτηξε ἕνα κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ τίτλου 0,9 μὲ ἕνα δεύτερον κρᾶμα τῶν αὐτῶν μετάλλων καὶ τίτλου 0,85 καὶ μὲ 400 γραμ. χαλκοῦ καὶ ἔλαβε ἕνα νέον κρᾶμα βάρους 1 500 γραμμαρίων καὶ τίτλου 0,640. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν δύο πρώτων κραμάτων.

1904. (835). Χρυσοχόος συνέτηξε δύο κράματα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ τίτλων 0,950 καὶ 0,800, μὲ 3 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ ἐσχημάτισεν ἕνα κρᾶμα βάρους 25 γραμ. καὶ τίτλου 0,896. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ βάρη τῶν δύο πρώτων κραμάτων.

1905. (836). Νά ύπολογισθῇ τό βάρος καί ό τίτλος ένός κράματος άργύρου καί χαλκοῦ, έάν γνωρίζωμεν, ότι, έάν συντήξωμεν αύτό μέ 300 γραμ. καθαροῦ άργύρου, λαμβάνομεν ένα νέον κρᾶμα τίτλου 0,900· ένῷ, έάν τό συντήξωμεν μέ 200 γραμ. ένός άλλου κράματος, τίτλου 0,900, θά λάβωμεν ένα άλλο κρᾶμα τίτλου 0,840.

Προβλήματα κινήσεως :

1906. (837). Νά ύπολογισθῇ ή ταχύτης καί τό μῆκος μιᾶς άμαξοστοιχίας ή όποία χρειάζεται 7 δευτερόλεπτα τῆς ώρας διά νά διέλθῃ έμπροσθεν παρατηρητοῦ καί 25 δευτερόλεπτα διά νά διέλθῃ έμπροσθεν σταθμοῦ μήκους 378 μέτρων.

1907. (838). 'Εάν μία άμαξοστοιχία αύξήσῃ τήν ταχύτητά της κατά 6 χιλιόμετρα τήν ώραν, θά φθάσῃ είς τόν προορισμόν της 48 λεπτά τῆς ώρας ένωρίτερον. 'Εάν έλαττώσῃ τήν ταχύτητά της κατά 10 χιλιόμετρα τήν ώραν, θά φθάσῃ 144 λεπτά τῆς ώρας βραδύτερον είς τόν προορισμόν της. Νά ύπολογισθῇ ή ταχύτης τῆς άμαξοστοιχίας καί τό διανυθέν ύπ' αύτῆς διάστημα.

1908. (839). Δύο κινητά, τά όποῖα άπέχουν μεταξύ των 36 χλμ. άναχωροῦν ταυτοχρόνως έκ δύο σημείων Α καί Β, κινούμενα έπί τῆς εύθείας ΑΒ. Τά κινητά αύτά συναντῶνται μετά 4 ώρας, έάν κινοῦνται άντιθέτως καί μετά 8 ώρας, έάν κινοῦνται πρός τήν αύτήν φοράν.. Νά εύρεθοῦν αί ταχύτητές των.

1909. (840). Δύο αύτοκίνητα πρόκειται νά διανύσουν μίαν άπόστασιν ΑΒ, ή όποία παρουσιάζει μίαν άνωφέρειαν ΑΜ καί μίαν κατωφέρειαν ΜΒ. Τό πρῶτον αύτοκίνητον έχει ταχύτητα 18 χλμ. τήν ώραν κατά τήν άνοδόν του καί 36 χλμ. κατά τήν κάθοδόν του. Αί ταχύτητες τοῦ δευτέρου είναι άντιστοίχως 15 χλμ. καί 40 χλμ. τήν ώραν. Κατά τήν μετάβασίν των άπό τοῦ Α είς τό Β καί τά δύο αύτοκίνητα έφθασαν συγχρόνως είς τό Β. Κατά τήν έπιστροφήν των όμως άπό Β είς Α, τό πρῶτον αύτοκίνητον έφθασεν 35 λεπτά ένωρίτερον τοῦ άλλου. Νά ύπολογισθοῦν τά μήκη ΑΜ καί ΜΒ.

1910. (841). Τέσσαρες έπιβάται θέλουν νά μεταβοῦν έκ μιᾶς πόλεως Α είς άλλην Β, αί όποῖαι άπέχουν 39,6 χλμ. Διαθέτουν δέ πρός τοῦτο ένα αύτοκίνητον, τό όποῖον κινεῖται μέ ταχύτητα 36 χλμ. καθ' ώραν καί τό όποῖον έχει δύο μόνον θέσεις έπιβατῶν, έκτός τῆς θέσεως τοῦ σωφέρ. Οί δύο νεώτεροι έκ τῶν έπιβατῶν δύνανται νά διανύσουν 6 χλμ. καθ' ώραν πεζῇ καί οί άλλοι δύο πλέον ήλικιωμένοι, δύνανται νά διανύσουν μόνον 4 χλμ. καθ' ώραν.

Διά τήν χρησιμοποίησιν τοῦ αύτοκινήτου έκαμον τήν έξῆς συμφωνίαν: Τό αύτοκίνητον θά άναχωρήσῃ μέ τούς δύο ήλικιωμένους έπιβάτας καί θά τούς άφήσῃ είς ένα σημεῖον Μ τῆς όδοῦ ΑΒ, άπό τοῦ όποίου θά έξακολουθήσουν τήν πορείαν των πεζῇ μέχρι τῆς πόλεως Β. Τό αύτοκίνητον θά έπιστρέψῃ άμέσως όπίσω διά νά παραλάβῃ τούς δύο νεωτέρους έπιβάτας, οί όποῖοι έν τῷ μεταξύ έβάδιζον πεζῇ καί είχον φθάσει είς ένα σημεῖον Σ καί θά τούς μεταφέρῃ είς τήν πόλιν Β. Νά προσδιορισθῇ ή θέσις τοῦ σημείου Μ έπί τῆς όδοῦ ΑΒ οὕτως, ώστε οί 4 έπιβάται, οί όποῖοι άνεχώρησαν συγχρόνως έκ τοῦ Α, νά φθάσουν ταυτοχρόνως είς τό Β.

1911. (842). Ένας σωφέρ αὐτοκινήτου, διερχόμενος ἔμπροσθεν ἑνὸς χιλιομετρικοῦ δείκτου σημειώνει μίαν ἀπόστασιν, ἡ ὁποία ἐκφράζεται μὲ ἕνα διψήφιον ἀριθμόν. Συνεχίζων τὸν δρόμον του, μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα, διέρχεται μετὰ μίαν ὥραν ἔμπροσθεν ἑνὸς ἄλλου δείκτου, ὁ ὁποῖος φέρει τὰ αὐτὰ ψηφία, ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν. Τέλος μετὰ μίαν ὥραν ἀργότερον φθάνει ἔμπροσθεν ἑνὸς τρίτου δείκτου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὰ αὐτὰ ψηφία μὲ τὸν πρῶτον, ἀλλὰ μὲ ἕνα μηδὲν μεταξὺ αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου καὶ οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεικτῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑκάστου ἀριθμοῦ εἶναι 7.

1912. (843). Ένας λεμβοῦχος διήνυσε 15 χλμ. εἰς 1 ὥραν 15 λ., ἀκολουθῶν τὸ ρεῦμα ἑνὸς ποταμοῦ καὶ μένων διαρκῶς εἰς τὸ μέσον τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ. Όταν ἐπέστρεφεν, ἠκολούθησε τὴν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ, ὅπου ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἶναι τὰ 3/5 τῆς ταχύτητος αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον καὶ ἐχρειάσθη 2 ὥρας 5 λ. διὰ τὸ αὐτὸ διάστημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ εἰς τὸ μέσον.

Προβλήματα διάφορα :

1913. (844). Δύο οἰνέμποροι Α καὶ Β εἰσέρχονται εἰς μίαν πόλιν φέροντες ὁ μὲν 64 βαρέλια οἴνου, ὁ δὲ 20 βαρέλια τῆς αὐτῆς ἀξίας. 'Αλλ' ἐπειδὴ δὲν εἶχον ἀρκετὰ χρήματα διὰ νὰ πληρώσουν τὸν φόρον τῆς εἰσαγωγῆς, ὁ Α ἐπλήρωσε τὸν φόρον μὲ 5 βαρέλια καὶ μὲ 40 δρχ. ἀκόμη· ὁ Β ἐπλήρωσε τὸν φόρον μὲ 2 βαρέλια, ἀλλ' ἔλαβεν ὀπίσω 40 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου βαρελίου καὶ ὁ φόρος εἰσαγωγῆς ἑκάστου βαρελίου. (Πρόβλημα παγίδος).

1914. (845) 'Οκτὼ βώδια ἔφαγον εἰς 7 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 4 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο· 9 βώδια ἔφαγον εἰς 8 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 5 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσα βώδια δύνανται νὰ βοσκήσουν ἐπὶ 12 ἑβδομάδας εἰς 6 στρέμματα, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ χόρτου, τὸ ὁποῖον θὰ βλαστήσῃ κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο.

1915. (846). Ένας ἐργάτης καὶ μία ἐργάτρια ἀνέλαβον νὰ ἐκτελέσουν ἕνα ἔργον εἰς 20 ἡμέρας. Τὴν ἑβδόμην ἡμέραν ἡ ἐργάτρια ἀσθενεῖ καὶ ὁ ἐργάτης συνεχίζει μόνος του τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐτελείωσεν εἰς 12 ἡμέρας. Πόσας ἡμέρας θὰ ἐχρειάζετο μόνος του ὁ ἐργάτης ἢ ἡ ἐργάτρια διὰ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον;

1916. (847). Δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος κενοῦται ὑπὸ δύο ἀνίσων κρουνῶν Α καὶ Β. 'Ανοίγομεν τὸν κρουνὸν Α καὶ ἔπειτα, ὅταν ἐχύθη τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου εἰς τὴν δεξαμενὴν ὕδατος, ἀνοίγομεν καὶ τὸν κρουνὸν Β. Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς δεξαμενῆς ἐκενώθη εἰς χρόνον κατὰ 1 ὥραν περισσότερον ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θὰ ἐχρειάζετο ὁ κρουνὸς Α διὰ νὰ κενώσῃ τὸ τέταρτον τῆς δεξαμενῆς. 'Εὰν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ ἠνοίγοντο συγχρόνως, ἡ δεξαμενὴ θὰ ἐκενοῦτο ἡμίσειαν ὥραν ταχύτερον. Νὰ εὑρεθῇ πόσον χρόνον χρειάζεται ἕκαστος κρουνὸς διὰ νὰ κενώσῃ μόνος του τὴν δεξαμενήν.

Προβλήματα Γεωμετρίας :

1917. (848). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 40 μέτρα καὶ 30 μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ἄλλου ὀρθογωνίου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 84 μέτρα.

1918. (849). Δύο κύκλων, ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι 0,30 μ. Πόσαι εἶναι αἱ ἀκτῖνες των, ἐὰν ἔχουν λόγον 2 : 3 ;

1919. (850). Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 12 μ. μία χορδὴ 20 μ. τέμνεται ἀπὸ μίαν διάμετρον εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ δύο τμήματα τῆς χορδῆς.

1920. (851). Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθογωνίου αὐξάνει κατὰ 3 450 (μ²), ὅταν διπλασιάσωμεν καὶ τὰς δύο διαστάσεις του. Αὐξάνει ἐπίσης κατὰ 1 100 (μ²), ὅταν ἐλαττώσωμεν τὸ μῆκος κατὰ 16 μέτρα καὶ τριπλασιάσωμεν τὸ πλάτος. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

1921. (852). Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ βάσις τριγώνου κατὰ 1 μέτρον καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ κατὰ 2 μέτρα, ἐλαττοῦται τὸ ἐμβαδόν του κατὰ 7 (μ²). Ἐὰν ἐλαττωθῇ ἡ βάσις του κατὰ 2 καὶ αὐξηθῇ τὸ ὕψος του κατὰ 3, τὸ ἐμβαδόν του ἐλαττοῦται κατὰ 10 (μ²). Πόση εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του ;

1922. (853). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα ὀρθογώνιον ΔΕΖΗ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις νὰ ἔχουν διαφορὰν δ.

1923. (854). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἕνα ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

1924. (855). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ.

1925. (856). Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν δ δύο πλευρῶν του καὶ τὰ δύο τμήματα μ καὶ ν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ τρίτη πλευρὰ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν δύο πρώτων πλευρῶν.

1926. (857). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ $AB=x$, $A\Gamma=y$ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma=\alpha$, καὶ τὸ ἄθροισμα $AB+A\Gamma=k$ καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β συναντᾷ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΓ εἰς ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε $B\Delta=\Delta\Gamma$.

1927. (858). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB=\Gamma\Delta=\alpha$, $B\Gamma=A\Delta=\beta$, $\alpha>\beta$. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ ἕνα ἄλλο ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ, τοῦ ὁποίου ὁ λόγος $\frac{EZ}{E\Theta}$ τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα ἀριθμὸν μ, μεγαλύτερον τῆς μονάδος.

1928. (859). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα ρόμβον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι $A\Gamma=\alpha$, $B\Delta=\beta$, ἕνα ὀρθογώνιον δοθείσης περιμέτρου 2τ.

1929. (860). Εἰς ποῖον ὕψος πρέπει νὰ ἀνυψωθῇ ἀεροναύτης διὰ νὰ ἴδῃ μίαν σφαιρικὴν ζώνην ἐμβαδοῦ Ε ;

2. Προβλήματα πρὸς λύσιν μὲ τρεῖς ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους

1930. (861). Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ πρῶτος καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου, ὁ δεύτερος καὶ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου καὶ ὁ τρίτος καὶ τὸ τέταρτον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι πάντοτε 1 000.

1931. (862). Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ πρῶτος καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων νὰ εἶναι 120, ὁ δεύτερος καὶ τὸ δέκατον πέμπτον τῆς διαφορᾶς τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ τρίτου νὰ ἰσοῦται μὲ 62 καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἰσοῦται μὲ 95.

1932. (863). Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 17. Τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ὁ 396 εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, τὸν προκύπτοντα δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του.

1933. (864). Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 μεγαλύτερος αὐτοῦ.

1934. (865). Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν: α) ὅτι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι ἴσον μὲ τὰ 3/5 τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· β) τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων καὶ γ) ὅτι, ἐὰν προσθέσωμεν 198 εἰς τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, λαμβάνομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

1935. (866), Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν: α) ὅτι αὐξάνει κατὰ 180, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο πρώτων ψηφίων του· β) ἐλαττοῦται κατὰ 99, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων ψηφίων του καὶ γ) ἐλαττοῦται κατὰ 27, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων ψηφίων του.

1936. (867). Ὁ Νεύτων ἐγεννήθη τὸν 17ον αἰῶνα καὶ ἀπέθανε τὸν 18ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον ἐγεννήθη καὶ τὸ ἔτος κατὰ τὸ ὁποῖον ἀπέθανε, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἔτους τῆς γεννήσεώς του, αὐξανόμενος κατὰ 12, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἔτους τοῦ θανάτου του καὶ ὅτι ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς (δηλ. τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τοῦ ἔτους τοῦ θανάτου του) αὐξανόμενος κατὰ 1 εἶναι ἴσος μὲ τὰ 2/3 τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ.

1937. (868). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔτος τῆς ἀνακαλύψεως τῆς τυπογραφίας, ἐὰν γνωρίζωμεν: α) ὅτι εἶναι ἀριθμὸς τετραψήφιος· β) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 14· γ) ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· δ) ὅτι τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ ε) ὅτι, ἐὰν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατὰ 4 905. (Πανεπιστήμιον 1939).

1938. (869). Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμός, ἐὰν γνωρίζωμεν: α) ὅτι

ὁ ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γράψωμεν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν, β) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 16, γ) ὅτι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του εἶναι μεγαλύτερος κατὰ 18 τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον σχηματίζουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία του.

1939. (870). Ποσὸν 810 000 δραχμῶν νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια τοῦ α' καὶ β' νὰ εἶναι ὡς 2 : 3, τοῦ δὲ β' καὶ γ' ὡς 3 : 4. Ποῖα τὰ μερίδια;

1940. (871). Τρεῖς γυναῖκες πωλοῦν αὐγά. 'Εὰν ἡ πρώτη ἔδιδε τὸ ἕβδομον καὶ ἡ τρίτη τὸ δέκατον τρίτον τῶν ἰδικῶν των εἰς τὴν δευτέραν, θὰ εἶχον καὶ αἱ τρεῖς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐγῶν. 'Εὰν καὶ αἱ τρεῖς εἶχον ἐξ ἀρχῆς 360 αὐγά, πόσα εἶχεν ἑκάστη;

1941. (872). Τρεῖς συνεταῖροι ἐμοίρασαν τὸ κέρδος μιᾶς ἐπιχειρήσεως· ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ τοῦ κέρδους πλὴν τὰ 2/13 τῶν μεριδίων τὰ ὁποῖα εἶχον λάβει καὶ οἱ δύο ἄλλοι συνεταῖροι· ὁ δεύτερος ἔλαβε τὸ τέταρτον τοῦ κέρδους καὶ τὸ 1/10 τῶν μεριδίων τῶν δύο ἄλλων συνεταίρων· ὁ τρίτος ἔλαβε 30 000 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου καὶ τὸ διανεμηθὲν κέρδος.

1942. (873). 'Η ἡλικία ἑνὸς πατρὸς εἶναι κατὰ 2 ἔτη μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡλικιῶν τῶν τριῶν υἱῶν του. Μετὰ 10 ἔτη ἡ ἡλικία του θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ μεγαλυτέρου υἱοῦ· μετὰ 18 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου υἱοῦ καὶ μετὰ 26 ἔτη θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ μικροτέρου υἱοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ ἡλικίαι τοῦ πατρὸς καὶ ἑκάστου υἱοῦ.

1943. (874). 'Η διαφορὰ τῶν τιμῶν δύο εἰδῶν ὑφάσματος τοῦ αὐτοῦ μήκους εἶναι 1 280 δρχ.· 4 μέτρα τοῦ πρώτου εἴδους κοστίζουν 180 δρχ. περισσότερον ἀπὸ ὅσον κοστίζουν 3 μέτρα τοῦ δευτέρου· ἐνῷ 3 μέτρα τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 4 μέτρα τοῦ δευτέρου κοστίζουν μαζὶ 760 δρχ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος ἑκάστου εἴδους καὶ ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑκάστου.

1944. (875). Τρία κεφάλαια Α, Β, Γ κατετέθησαν πρὸς 3 %, 3,5 % καὶ 4 % καὶ ἔδωσαν συνολικὸν τόκον, ἴσον μὲ τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον θὰ ἔδιδον τὰ 11/12 καὶ τῶν τριῶν κεφαλαίων, ἐὰν ἐτοκίζοντο πρὸς 4 %. 'Εὰν τὸ Α ἐτοκίζετο πρὸς 4 % καὶ τὸ Γ πρὸς 3,5 %, ὁ τόκος αὐτῶν μαζὶ θὰ ἠλαττοῦτο κατὰ 50 δραχμάς. Τέλος ἐὰν τὸ Β ἐχωρίζετο εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τοκιζόμενα πρὸς 3 % καὶ 2 % ἀντιστοίχως, νὰ δώσουν ἴσους τόκους, ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ Β θὰ ἠλαττοῦτο κατὰ 220 δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τρία κεφάλαια.

1945. (876). Τρεῖς ἄνθρωποι εἶχον ποσόν τι χρημάτων ἕκαστος καὶ συνεφώνησαν κατὰ σειρὰν νὰ διπλασιάζῃ καθεὶς τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων. Εἰς τὸ τέλος εὑρέθη ἕκαστος μὲ 160 δρχ. Τί ποσὸν εἶχεν ἕκαστος κατ' ἀρχάς;

1946. (877). Τρεῖς φίλοι Α, Β, Γ συζητοῦν διὰ τὴν ἡλικίαν των. 'Ο Α λέγει εἰς τὸν Β: «ὅταν εἶχον τὴν ἡλικίαν σας, ὁ Γ ἦτο 10 ἐτῶν». 'Αλλὰ ὁ Β ἀπαντᾷ: «ὅταν θὰ ἔχω τὴν ἡλικίαν σας, ὁ Γ θὰ εἶναι 26 ἐτῶν». 'Ο Γ συμπεραίνει: «ὅταν ἐγεννήθην τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν σας ἦτο διπλάσιον τῆς σημερινῆς ἡλικίας μου». Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἡλικίαι τῶν Α, Β, Γ.

1947. (878). Δύο στρατιαὶ Α καὶ Β πολεμοῦν ἡ μία ἐναντίον τῆς ἄλλης.

Κατὰ τὴν πρώτην μάχην ἡ ὀλιγαριθμοτέρα στρατιὰ χάνει τὸ 1/6 καὶ ἡ ἄλλη Β τὸ 1/7 τῆς δυνάμεώς της. Κατὰ μίαν δευτέραν μάχην αἱ ἀπώλειαι ἦσαν ἴσαι. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πολέμου εὑρέθη, ὅτι ἡ στρατιὰ Α εἶχεν ἀπωλέσει ἐν ὅλῳ 59 000 ἄνδρας καὶ ἡ Β 61 000 καὶ ὅτι ἡ στρατιὰ Β ἦτο τὴν στιγμὴν ἐκείνην διπλασία τῆς στρατιᾶς Α. Πόση ἦτο ἡ δύναμις ἑκάστης στρατιᾶς κατὰ τὴν ἔναρξιν τοῦ πολέμου;

1948. (879). Δύο δοχεῖα Α καὶ Β, τοῦ αὐτοῦ βάρους, περιέχουν διαφόρους ποσότητας ὕδατος. Τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ Α εἶναι τὰ 4/5 τοῦ βάρους τοῦ Β. 'Εὰν χύσωμεν τὸ περιεχόμενον τοῦ Β εἰς τὸ Α, τότε τὸ Α θὰ εἶναι 8 φορὰς βαρύτερον τοῦ κενοῦ δοχείου Β. 'Εὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ποὺ περιέχεται εἰς τὸ Β ὑπερβαίνει κατὰ 50 γραμμάρια τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ Α, νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου δοχείου καὶ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, τὸ ὁποῖον περιείχετο ἀρχικῶς εἰς αὐτά.

1949. (880). Τρεῖς κρουνοὶ Α, Β, Γ τροφοδοτοῦν μίαν δεξαμενήν. Οἱ Β καὶ Γ δύνανται νὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενὴν εἰς α ὥρας· οἱ Γ καὶ Α τὴν γεμίζουν εἰς β ὥρας, οἱ Α καὶ Β τὴν γεμίζουν εἰς γ ὥρας. 'Εὰν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καὶ οἱ τρεῖς κρουνοί, εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

1950. (881) Τρεῖς κρουνοὶ Α, Β, Γ, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ μικρότεροι Β καὶ Γ παρέχουν τὴν αὐτὴν ποσότητα ὕδατος, ἀνοίγονται συγχρόνως διὰ νὰ γεμίσουν μίαν δεξαμενήν. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι: 1ον. ἐὰν ἐκλείετο ὁ ἕνας ἐκ τῶν κρουνῶν Β, Γ τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἡ δεξαμενὴ εἶχε γεμίσει κατὰ τὸ ἥμισυ, θὰ ηὔξανε ἡ διάρκεια τῆς πληρώσεως τῆς δεξαμενῆς κατὰ 1 ὥραν· 2ον. ἐὰν ἐκλείετο καὶ ὁ ἄλλος ἐκ τῶν κρουνῶν Β, Γ τὴν στιγμήν, καθ' ἣν ἡ δεξαμενὴ εἶχε γεμίσει κατὰ τὰ 3/4, ἡ διάρκεια τῆς πληρώσεως τῆς δεξαμενῆς θὰ ηὔξανε ἀκόμη κατὰ μίαν ὥραν;

1951. (882). Χρυσοχόος ἔχει τρία κράματα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, βάρους 50 γραμ., 30 γραμ. καὶ 20 γραμ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τίτλοι τῶν κραμάτων αὐτῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἐὰν συντήξῃ τὸ πρῶτον μὲ τὸ δεύτερον, θὰ λάβῃ κρᾶμα τίτλου 0,750, τὸ πρῶτον μὲ τὸ τρίτον θὰ λάβῃ κρᾶμα τίτλου 0,780, καὶ ἐὰν συντήξῃ τὸ δεύτερον μὲ τὸ τρίτον θὰ λάβῃ κρᾶμα τίτλου 0,852.

1952. (883). Δύο κράματα, ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, ἔχουν τὸν αὐτὸν τίτλον. Συντήκομεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τῶν κραμάτων μὲ μίαν ποσότητα χαλκοῦ ἴσην μὲ ἐκείνην, ποὺ περιέχεται εἰς τὸ κρᾶμα. Λαμβάνομεν οὕτω δύο νέα κράματα, τῶν ὁποίων τὰ βάρη ἔχουν λόγον 1 : 2 καὶ οἱ τίτλοι των ἔχουν λόγον 2 : 3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ κοινὸς τίτλος τῶν δύο πρώτων κραμάτων.

1953. (884). Χρυσοχόος ἔχει τρία κράματα, τὰ ὁποῖα συνίστανται:

Τὸ πρῶτον	ἀπὸ 20 γρ. χρυσοῦ,	30 γρ. ἀργύρου	καὶ	40 γρ. χαλκοῦ.
Τὸ δεύτερον	» 30	» 40	»	» 50	»
Τὸ τρίτον	» 40	» 50	»	» 90	»

Νὰ εὑρεθῇ πόσον βάρος πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον τῶν τριῶν κραμάτων, διὰ νὰ σχηματίσῃ ἕνα ἄλλο, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ 34 γραμ. χρυσοῦ, 46 ἀργύρου καὶ 67 γραμ. χαλκοῦ.

1954. (885) Χρυσοχόος ἔχει δύο κράματα, Α καὶ Β, ἀργύρου καὶ χαλκοῦ. 'Εὰν προσθέσῃ 100 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ Α καὶ 200 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ

Β, τὰ δύο κράματα θὰ ἔχουν ἴσα βάρη. Ἐὰν προσθέσῃ 200 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ Α καὶ 100 γραμ. χαλκοῦ εἰς τὸ Β, τὰ δύο κράματα θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν τίτλον. Τέλος ἐὰν συντήξῃ τὸ ἥμισυ τοῦ Α μὲ τὸ τρίτον τοῦ Β, θὰ λάβῃ ἕνα κρᾶμα τίτλου 0,875 καὶ βάρους 800 γραμ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ βάρη καὶ οἱ τίτλοι τῶν κραμάτων Α καὶ Β.

1955. (886). Οἰνοπώλης ἐγέμισε ἕνα βαρέλιον οἴνου, χωρητικότητος 228 ὀκ., μὲ τρία εἴδη οἴνου, τῶν 2 δρχ., τῶν 3 δρχ. καὶ τῶν 3,20 δρχ. κατ' ὀκᾶν καὶ μὲ μίαν ὡρισμένην ποσότητα ὕδατος. Πωλεῖ τὸν οἶνον τοῦ βαρελίου αὐτοῦ πρὸς 2,80 δρχ. τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 0,40 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Νὰ εὑρεθῇ πόσας ὀκάδας ὕδατος καὶ πόσας ὀκάδας ἐξ ἑκάστου οἴνου ἔθεσεν εἰς τὸ βαρέλιον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ περιεχομένη εἰς τὸ πρῶτον βαρέλιον ποσότης οἴνου εἶναι πενταπλασία ἐκείνης τοῦ ὕδατος καὶ ὅτι ἡ ποσότης τοῦ οἴνου τῶν 2 δρχ. εἶναι διπλασία ἐκείνης τῶν 3 δραχμῶν.

1956. (887). Μία λεωφόρος, ἡ ὁποία συνδέει δύο πόλεις Α καὶ Β, παρουσιάζει ὁριζόντια, ἀνωφερῆ καὶ κατωφερῆ τμήματα. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 78 χιλιόμετρα καὶ τὸ κατωφερικὸν τμῆμα αὐτῆς, ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β, εἶναι ἴσον μὲ τὰ 7/10 τοῦ ἀνωφερικοῦ τμήματος αὐτῆς. Ἕνας ποδηλάτης, ὁ ὁποῖος ἔχει ταχύτητα 25 χιλιομέτρων καθ' ὥραν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου τμήματος τῆς λεωφόρου, 15 χιλιόμετρα ἐπὶ τοῦ ἀνωφερικοῦ καὶ 30 χιλιόμετρα ἐπὶ τοῦ κατωφερικοῦ, μεταβαίνει ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν Β καὶ ἐπιστρέφει ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν χρόνων, τοὺς ὁποίους χρειάζεται ὁ ποδηλάτης, διὰ νὰ κάμῃ τὰς δύο αὐτὸς διαδρομάς, εἶναι 24 λεπτὰ τῆς ὥρας, ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν: 1ον. τὰ μήκη τῶν ὁριζοντίων, ἀνωφερικῶν καὶ κατωφερικῶν τμημάτων τῆς λεωφόρου ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β· καὶ 2ον. οἱ χρόνοι τοὺς ὁποίους ἐχρειάσθη διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ τὴν Α πρὸς τὴν Β καὶ νὰ ἐπιστρέψῃ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α.

1957. (888). Ἱππεὺς καὶ πεζοπόρος ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως Α καὶ διευθύνονται πρὸς τὴν πόλιν Β. Ὁ ἱππεὺς φθάσας εἰς τὴν πόλιν Β, 50 λεπτὰ τῆς ὥρας πρὸ τοῦ πεζοπόρου, ἐπιστρέφει ἀμέσως εἰς τὴν πόλιν Α καὶ διασταυροῦται μὲ τὸν πεζοπόρον εἰς ἀπόστασιν 2 000 μέτρων ἀπὸ τὴν Β. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ἱππεὺς ἐχρειάσθη ἐν ὅλῳ 100 λεπτὰ τῆς ὥρας διὰ τὴν μετάβασιν καὶ ἐπιστροφήν του, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων καὶ αἱ ταχύτητες (εἰς μέτρα—λεπτὸν) τοῦ ἱππέως καὶ τοῦ πεζοπόρου.

1958. (889). Ἁμαξοστοιχία Α, ἔχουσα ταχύτητα υ, ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεχώρησε πρότερον ἄλλη ἁμαξοστοιχία Β μὲ ταχύτητα υ'. Ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν ἀναχωρήσεων τούτων χρόνος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ φθάσουν συγχρόνως αἱ ἁμαξοστοιχίαι εἰς τὸ τέρμα. Ἡ ἁμαξοστοιχία Β διήνυσε κατ' ἀρχὰς τὰ 2/3 τοῦ δρόμου της μὲ τὴν ταχύτητά της υ' καὶ ἔπειτα ἠλάττωσε αὐτὴν κατὰ τὸ ἥμισυ καὶ οὕτω ἡ συνάντησις τῶν δύο ἁμαξοστοιχιῶν ἔγινε δ χλμ. πρὸ τοῦ τέρματος. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαδρομῆς (ἐφαρμογὴ $υ=10$, $υ'=24$, $δ=15$ χλμ.).

1959. (890). Δύο δρομεῖς διατρέχουν ἕνα κυκλικὸν στῖβον, μὲ ὡρισμένην ταχύτητα ἕκαστος. Ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β, ἐκ διαμέτρου ἀντιθέτων, καὶ διευθυνόμενοι ἀντιθέτως διασταυροῦνται διὰ πρώτην φο-

ρὰν εἰς ἕνα σημεῖον Μ τοῦ στίβου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 120 μέτρα ἀπὸ τὸ Β. ἔπειτα διὰ δευτέραν φορὰν εἰς ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 60 μέτρ. ἀπὸ τὸ Α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κυκλικοῦ στίβου. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἐμεσολάβησαν 60 δευτερόλεπτα μεταξὺ τῶν δύο διασταυρώσεων, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου δρομέως εἰς μέτρα—δευτερόλεπτα.

1960. (892). Δύο αὐτοκίνητα ἀναχωροῦν ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Εἰς τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεώς των Σ ὑπελόγισαν, ὅτι τὸ πρῶτον εἶχε διανύσει 30 χιλιόμετρα περισσότερον ἀπὸ τὸ δεύτερον καὶ ὅτι, ἐὰν ἐξηκολούθουν νὰ κινοῦνται μὲ τὴν ταχύτητα τῆς πορείας των, θὰ ἐχρειάζετο τὸ πρῶτον 2 ὥρ. 15 λ. τῆς ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β καὶ τὸ δεύτερον 4 ὥρ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Α. Νὰ εὑρεθῇ: 1ον· μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς των συνηντήθησαν· 2ον. ἡ ταχύτης (εἰς χιλιόμετρα—ὥρα) ἑκάστου αὐτοκινήτου· 3ον. ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

1961. (892). Ἐκ δύο σημείων ἀπεχόντων 1 500 μέτρα ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητά, ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα. Ὅταν συνηντήθησαν, τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει 300 μέτρα περισσότερον τοῦ ἄλλου. Τίς ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων;

1962. (893). Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ἡ ἀπόστασις τῶν πόλεων εἶναι 360 χιλιόμετρα. Μετὰ τὴν διασταύρωσίν των εἰς τὸ σημεῖον Σ, ἡ πρώτη ἐχρειάσθη 2 $^1/_2$ ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β καὶ ἡ δευτέρα 10 ὥρα διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πόλεως Α διεσταυρώθησαν αἱ ἁμαξοστοιχίαι καὶ ποῖαι ἦσαν αἱ ταχύτητές των (εἰς χιλιόμετρα—ὥρα).

1963. (894). Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Μετὰ τὴν διασταύρωσίν των εἰς τὸ σημεῖον Σ, ἡ πρώτη ἁμαξοστοιχία ἐχρειάσθη 1 ὥρ. 52 λ. καὶ ἡ δευτέρα 2 ὥρ. 55 λ. διὰ νὰ τελειώσουν τὴν διαδρομήν των. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς των συνηντήθησαν εἰς τὸ σημεῖον Σ καὶ ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ταχύτητές των διαφέρουν 12 χιλιόμετρα.

1964. (895). Ἱππεὺς ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου Α μιᾶς εὐθείας ΑΒ συγχρόνως μὲ δύο πεζούς, οἱ ὁποῖοι ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ σημείου Β κατ' ἀντιθέτους φορὰς ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὁ ἱππεὺς συναντᾷ τὸν πρῶτον εἰς ἕνα σημεῖον Σ καὶ τὸν δεύτερον εἰς τὸ Σ'. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΑΒ, ἐὰν γνωρίζωμεν: 1ον. ὅτι οἱ δύο πεζοὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ ὅτι ὁ ἱππεὺς ἔχει τριπλασίαν ταχύτητα τῶν πεζῶν· 2ον. ὅτι ἡ ἀπόστασις ΣΣ' εἶναι ἴση μὲ 24 χιλιόμετρα.

1965. (896). Πεζοπόρος ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α καὶ διευθύνεται εἰς τὴν πόλιν Β μὲ ταχύτητα υ χλμ. καθ' ὥραν. Μετὰ ἕνα τέταρτον τῆς ὥρας ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως Α καὶ διευθύνεται πρὸς τὴν Β, ἕνας ποδηλάτης, ὁ ὁποῖος συνήντησε τὸν πεζοπόρον εἰς ἀπόστασιν ΑΣ=α χλμ. Ὁ ποδηλάτης μετὰ τὴν ἄφιξίν του εἰς τὴν πόλιν Β, καὶ παραμονὴν ἐκεῖ ἐπὶ ἡμίσειαν ὥραν, ἐπιστρέφει εἰς τὴν πόλιν Α καὶ συναντᾷ ἐκ δευτέρου τὸν πεζοπόρον εἰς

τὸ σημεῖον Σ', τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Σ ἀπόστασιν ΣΣ'=β χλμ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης υ' τοῦ ποδηλάτου καὶ ἡ ἀπόστασις ΣΒ=x.

1966. (897). Δύο φίλοι ὁ Πέτρος καὶ ὁ Παῦλος βαδίζουν, ὁ ἕνας παραπλεύρως τοῦ ἄλλου, ἐπὶ μιᾶς ὁδοῦ ΑΒ, ἡ ὁποία συνδέει δύο συνοικισμοὺς Α καὶ Β. Εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Σ τῆς ὁδοῦ ΑΒ, τοὺς ἔφθασε ἕνα τράμ, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ τὴν συγκοινωνίαν τῶν δύο συνοικισμῶν. 'Αμέσως ὁ Πέτρος ἐπιστρέφει αἰφνιδίως πρὸς τὸν συνοικισμὸν Α, ὁ δὲ Παῦλος συνεχίζει τὸν δρόμον του πεζῇ πρὸς τὴν διεύθυνσιν Β. Τὸ τρὰμ φθάνει εἰς τὸν συνοικισμὸν Β, παραμένει ἐκεῖ ἐπὶ ν λεπτὰ τῆς ὥρας καὶ ἔπειτα ἐπιστρέφει εἰς τὸν Α. Συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Σ' τὸν Παῦλον, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐπ' αὐτοῦ καὶ φθάνει εἰς τὸν Α συγχρόνως μὲ τὸν φίλον του.

'Εὰν αἱ ταχύτητες τῶν πεζοπόρων καὶ τρὰμ εἶναι ἀντιστοίχως υ καὶ υ' εἰς (μέτρα—ὥρα) καὶ δ ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἰς μέτρα, νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ' τῆς ὁδοῦ.

1967. (898). Τρεῖς ἁμαξοστοιχίαι Α', Β', Γ' ἀναχωροῦν τὴν μεσημβρίαν ἀντιστοίχως ἐκ τῶν σταθμῶν Α, Β, Γ. 'Ο σταθμὸς Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ εἶναι ΑΒ=64 χλμ. καὶ ΒΓ=234 χλμ. Αἱ ἁμαξοστοιχίαι, αἱ ὁποῖαι ἀνεχώρησαν ἐκ τῶν σταθμῶν Α καὶ Β διευθύνονται πρὸς τὸν Γ, ἡ δὲ τρίτη ἁμαξοστοιχία διευθύνεται πρὸς τὸν σταθμὸν Α. 'Εὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ταχύτητές των εἶναι 32 χλμ., 40 χλμ., 48 χλμ. τὴν ὥραν ἀντιστοίχως, νὰ εὑρεθῇ: 1ον. μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἁμαξοστοιχία, ἡ ὁποία ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ σταθμοῦ Β θὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο ἁμαξοστοιχίας καὶ 2ον. πόσον θὰ ἀπέχῃ ἀπ' αὐτῶν.

1968. (899). Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦν ἐκ Πειραιῶς καὶ διευθύνονται πρὸς τὰς Καλάμας. 'Η πρώτη, Α, ἀνεχώρησε τὴν 8 ὥρ. πρωϊνὴν μὲ μίαν ταχύτητα 51 χλμ. καθ' ὥραν καὶ ἡ δευτέρα Β, τὴν 8 ὥρ. 20 λ. πρωϊνὴν μὲ μίαν ταχύτητα 45 χλμ. καθ' ὥραν. 'Η ἀπόστασις τῶν 'Αθηνῶν—Καλαμῶν εἶναι 237 χλμ. Μία τρίτη ἁμαξοστοιχία, Γ, ἀνεχώρησε τὴν 8 ὥρ. πρωϊνὴν ἐκ Καλαμῶν καὶ διευθύνεται πρὸς τὰς 'Αθήνας μὲ ταχύτητα 54 χλμ. καθ' ὥραν. Ζητεῖται: 1ον. Μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἁμαξοστοιχία Α θὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Β καὶ Γ. 2ον. Πόσον θὰ ἀπέχουν ἀπὸ τῶν 'Αθηνῶν αἱ τρεῖς ἁμαξοστοιχίαι κατ' ἐκείνην τὴν στιγμήν.

1969. (900). Δύο κινητὰ κινοῦνται πρὸ ἀορίστου χρόνου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν x'x. Τὸ πρῶτον κινητὸν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α, t ὥρας πρὶν τὸ δεύτερον κινητὸν διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Β. Ζητεῖται τὸ σημεῖον Σ τῆς συναντήσεώς των, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ δ καὶ ὅτι αἱ ταχύτητές των εἶναι υ καὶ υ'.

1970. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τριψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 15. 'Εὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος μὲν διὰ τοῦ ζητουμένου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 195, προστιθέμενος δὲ εἰς τὸν ζητούμενον δίδει ἄθροισμα 1 191. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτός.

1971. 'Ο δρόμος ἀπὸ μίαν πόλιν Α εἰς ἄλλην Β εἶναι ἀνωφερής, ὁριζόντιος καὶ κατωφερής. Τὸ ὁριζόντιον τμῆμα του εἶναι τὸ 1/3 τοῦ κατωφεροῦς.

Ἂν ποδηλάτης ἔρχεται ἀπὸ Α εἰς Β καὶ ἔχῃ εἰς τὴν ἀνωφέρειαν ταχύτητα 8 χλμ., εἰς τὸν ὁριζόντιον 10 χλμ. καὶ εἰς τὴν κατωφέρειαν 12 χλμ. τὴν ὥραν, χρειάζεται 13 ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β. Ἂν ὅμως ἔρχεται ἀπὸ τὸ Β ἔχων τὰς αὐτὰς ταχύτητας ἀντιστοίχως, χρειάζεται ἀκόμη ἡμίσειαν ὥραν διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἀνωφεροῦς, τοῦ ὁριζοντίου καὶ τοῦ κατωφεροῦς τμήματος τοῦ δρόμου.

1972. (901). Τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς. Πόσαι εἶναι αἱ ἀκτῖνες των, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των εἶναι α, β, γ μέτρα.

1973. (902). Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι 8 μέτρα, 10 μέτρα, 12 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὁμοίου πρὸς αὐτὸ τριγώνου ἔχοντος περίμετρον 60 μέτρα;

1974. (903). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν α, β, γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τρία ὀρθογώνια ὅμοια καὶ τοιαῦτα, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον, τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς α νὰ ὑπερβαίνῃ (κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν) κατὰ μίαν ποσότητα k^2 τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τῶν τριῶν ὀρθογωνίων.

1975. (904). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΔΕ, ΓΕΖ καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΒΓΕΔ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

1976. (905). Τριγώνου γνωρίζομεν δύο πλευρὰς α καὶ β καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς αὐτὰς εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον ὕψος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου.

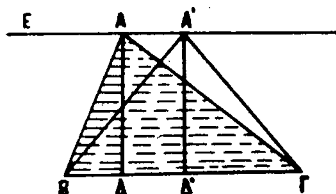
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'

ΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

---

1. Ὁρισμοὶ καὶ γενικότητες ἐπὶ τῶν συναρτήσεων

365. Μεταβλητὰ καὶ σταθερὰ ποσά. Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 13), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφὴ Α κινεῖται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Εἶναι φανερόν, ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς τρεῖς γωνίας του Α, Β, Γ ἀλλάσσει συνεχῶς τιμήν, τὸ ἄθροισμα ὅμως τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ 180°, δι' οἱανδήποτε θέσιν τῆς κινητῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας.



Σχ. 13

Ἐπίσης ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου μεταβάλλεται, ὅταν ἡ κορυφὴ Α κινῆται ἐπὶ τῆς παραλλήλου εὐθείας Ε, ἐνῷ τὸ ἐμβαδόν του μένει σταθερόν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν δύο εἴδη ποσῶν: ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα λαμβάνουν διαφόρους τιμάς, ὅπως αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου, ἡ περίμετρος καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦνται μεταβλητὰ ποσὰ ἢ ἁπλῶς μεταβληταὶ καὶ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα διατηροῦν πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν, ὅπως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦνται σταθερὰ ποσὰ ἢ σταθεραί.

Γενικῶς: *Μεταβλητὸν ποσὸν ἢ ἁπλῶς μεταβλητὴ λέγεται κάθε ποσόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς.*

Κατ' ἀντίθεσιν: *Κάθε ποσόν, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμήν, δηλ. μένει ἀμετάβλητον, λέγεται σταθερὸν ποσόν.*

Π. χ. ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι μεταβλητὰ ποσά.

Ὁ λόγος ὅμως τῆς περιφερείας του πρὸς τὴν διάμετρόν του, δηλ. ὁ π., εἶναι σταθερὸν ποσόν.

366. Στοιχειώδης ἔννοια τῆς συναρτήσεως. Ἔστω ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις 2x—5. Ἐὰν τὴν παραστήσωμεν μὲ y, θὰ εἶναι

$$y=2x-5 \qquad (1)$$

Διὰ x=1, ἡ (1) δίδει $y=2\cdot 1-5=-3$

Διὰ x=2, ἡ (1) δίδει $y=2\cdot 2-5=-1$ κ.ο.κ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἰσότης (1) συνδέει δύο μεταβλητὰς x καὶ y καὶ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς y ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.

Ἡ μεταβλητὴ x, εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν αὐθαιρέτως οἱανδήποτε τιμὴν λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητή, ἡ δὲ μεταβλητὴ y, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς x, λέγεται συνάρτησις τῆς x.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀλγεβρικὴ παράστασις 2x—5 εἶναι συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x.

Ἐπίσης ἡ παράστασις $2x^2-5x+1$ εἶναι συνάρτησις τῆς x.

Ἐκτὸς τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ποσά, τὰ ὁποῖα εἶναι συναρτήσεις ἄλλων ποσῶν.

Π.χ. ἡ ἀξία ἑνὸς ὑφάσματος εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους του.

Τὸ μῆκος μιᾶς μεταλλικῆς ράβδου εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας της.

Τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διανύει ἕνα κινητόν, εἶναι συνάρτησις τῆς ταχύτητός του καὶ τοῦ χρόνου, κατὰ τὸν ὁποῖον κινεῖται.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι συνάρτησις τῆς πλευρᾶς του.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος του.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ἐὰν δύο μεταβληταὶ x καὶ y συνδέωνται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς κάθε δοθεῖσαν τιμὴν τῆς x νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ τῆς y, τότε ἡ y λέγεται συνάρτησις τῆς x.

Μία συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς παρίσταται συνήθως μὲ τὸ γράμμα y ἢ μὲ τὰ σύμβολα σ(x), φ(x), f(x) . . . . , τὰ ὁποῖα ἀπαγγέλλονται :

σίγμα τοῦ χί, φὶ τοῦ χί, ἔφ τοῦ χί. . . .

Π.χ. αἱ $y=3x+1$, $\sigma(x)=2x^2+5x-4$

εἶναι συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς x.

367. Συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα. 1ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=3x+5$.

Ὁποιανδήποτε ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $3x+5$. Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=3x+5$ εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x.

2ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\sqrt{x-5}$ (2). Ἐδῶ ἡ τιμὴ τῆς y εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν ὑπόρριζον ποσότητα $x-5$ θετικὴν ἢ ἴσην μὲ μηδέν. Ὥστε ἡ συνάρτησις (2) εἶναι ὡρισμένη διὰ $x \geqslant 5$.

3ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\frac{3x-1}{x+4}$ (3)

Ἐδῶ ἡ τιμὴ τῆς y (δηλ. ἡ συνάρτησις) εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x=-4$, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν παρονομαστὴν $x+4$. Διότι διὰ $x=-4$, ἡ συνάρτησις γίνεται $y=\frac{-13}{0}$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν. Ὥστε ἡ συνάρτησις (3) εἶναι ὡρισμένη διὰ τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι εἶναι διάφοροι τοῦ -4· ἤτοι διὰ τιμὰς μικροτέρας τοῦ -4 καὶ μεγαλυτέρας τοῦ -4. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (3) εἶναι ὡρισμένη διὰ τιμὰς τοῦ x κειμένας εἰς τὰ διαστήματα

$$(-\infty,-4) \quad \text{καὶ} \quad (-4,+\infty).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

Μία συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα (α, β) ὅταν λαμβάνῃ μίαν τελείως ὡρισμένην τιμὴν διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x περιεχομένην εἰς τὸ διάστημα (α, β).

Ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

I. Μία ἀκεραία συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς της.

II. Μία κλασματικὴ συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς της ἐκτὸς ἐκείνων αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν της.

368. Αὔξησις μιᾶς μεταβλητῆς. Ὅταν μία μεταβλητὴ x λάβῃ κατ' ἀρχὰς μίαν τιμὴν x_1 (ἀρχικὴ τιμή) καὶ ἔπειτα μίαν δευτέραν τιμὴν x_2 (τελικὴ τιμή) λέγομεν, ὅτι ἡ μεταβλητὴ x ἔλαβε μίαν αὔξησιν x_2-x_1.

Π.χ. ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x ἔλαβε δύο τιμὰς $x_1=1$ καὶ $x_2=3$, ἡ ἀρχικὴ τιμὴ εἶναι 1 καὶ ἡ τελικὴ τιμὴ εἶναι 3 καὶ ἡ αὔξησις εἶναι $x_2-x_1=3-1=2$.

Ἡ αὔξησις μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι θετική, ἀρνητικὴ ἢ μηδέν, καθόσον ἡ τελικὴ τιμὴ εἶναι μεγαλυτέρα, μικροτέρα ἢ ἴση μὲ τὴν ἀρ-

χικὴν τιμήν. Ἡ λέξις λοιπὸν «α ὔ ξ η σ ι ς» δὲν ἔχει ἐδῶ τὴν κοινὴν σημασίαν τῆς λέξεως, ἀλλ' ἔχει τὴν ἔννοιαν τῆς μεταβολῆς.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν αὔξησιν μιᾶς μεταβλητῆς προτάσσομεν τοῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν μεταβλητήν, τὸ γράμμα Δ. Οὕτω τὸ Δx παριστᾷ τὴν α ὔ ξ η σ ι ν τῆς μεταβλητῆς x. Δηλ. εἶναι $\Delta x = x_2 - x_1$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$, ὅταν ἡ μεταβλητὴ x διέρχεται ἀπὸ τὴν τιμὴν x_1 εἰς τὴν x_2 εἶναι $\Delta y = y_2 - y_1$ ἢ $\Delta y = \sigma(x_2) - \sigma(x_1)$.

Σημ. Τὰ Δx καὶ Δy εἶναι σύμβολα καὶ παριστάνουν ἕνα μόνον ἀριθμὸν καὶ ὄχι τὸ γινόμενον τοῦ Δ ἐπὶ x ἢ ἐπὶ y.

369. Αὔξουσα συνάρτησις. Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y = 5x - 4 \quad (1)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x τὰς τιμὰς 1, 2, 3... ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 1, 6, 11...

Ἐπίσης, ἂν δώσωμεν εἰς τὴν x τὰς τιμὰς —1, — 2, — 3... ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς —9, —14, —19...

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως y.

x	1	2	3,...	—1	— 2	— 3....
y	1	6	11....	—9	—14	—19....

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x αὐξάνουν, τότε αὐξάνουν καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y καὶ ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x ἐλαττοῦνται, τότε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y ἐλαττοῦνται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (1) εἶναι α ὔ ξ ο υ σ α. Ὥστε:

Μία συνάρτησις εἶναι α ὔ ξ ο υ σ α, ὅταν μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Οὕτω ἡ τιμὴ ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι α ὔ ξ ο υ σ α συνάρτησις τοῦ βάρους του· διότι, ὅταν τὸ βάρος αὐξάνῃ καὶ ἡ τιμή του αὐξάνει.

Ἐπίσης τὸ μῆκος μιᾶς μεταλλικῆς ράβδου εἶναι α ὔ ξ ο υ σ α συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας· διότι, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἀνυψοῦται, τὸ μῆκος τῆς ράβδου ἐπιμηκύνεται.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι α ὔ ξ ο υ σ α σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς τῆς πλευρᾶς του.

370. Φθίνουσα συνάρτησις. Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$y = -2x + 3 \quad (1)$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὰς τιμὰς 1, 2, 3,... ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 1, —1, —3...

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὰς τιμὰς —1, —2, —3,... ἡ συνάρτησις y λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 5, 7, 9,...

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως y.

x	1	2	3....	—1	—2	—3....
y	1	—1	—3....	5	7	9....

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x αὐξάνουν, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y ἐλαττοῦνται καὶ ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x ἐλαττοῦνται, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y αὐξάνουν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις (1) εἶναι φθίνουσα συνάρτησις. Ὥστε:

Μία συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, ὅταν μεταβάλλεται κατ' ἀντίθετον φορὰν μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Οὕτω ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου, τὸ ὁποῖον ἔχει κλεισθῆ μὲ ἕνα ἔμβολον, εἶναι μία φθίνουσα συνάρτησις τῆς πιέσεως, τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, διότι, ὅσον αὐξάνει ἡ πίεσις ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, τόσον καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ἐλαττοῦται.

371. Σπουδὴ τῆς μεταβολῆς μιᾶς συναρτήσεως. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ σπουδάσωμεν τὴν μεταβολὴν μιᾶς συναρτήσεως σ(x) σημαίνει, ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῆς x, διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις σ(x) εἶναι αὔξουσα καὶ τὰς τιμὰς τῆς x, διὰ τὰς ὁποίας αὕτη εἶναι φθίνουσα.

Εἰς τὰς § 369 καὶ 370 εἴδομεν πότε μία συνάρτησις εἶναι αὔξουσα καὶ πότε φθίνουσα.

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν γενικώτερον τὸ ζήτημα αὐτό.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$, ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη εἰς ἕνα διάστημα (α, β). Ἔστωσαν x_1 καὶ x_2 δύο τιμαὶ τοῦ διαστήματος αὐτοῦ.

I. Ἐὰν ἡ ἀνισότης $x_1<x_2$ συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα
$$\sigma(x_1)<\sigma(x_2),$$
θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ ἐξεταζόμενον διάστημα.

II. Ἐὰν ἡ ἀνισότης $x_1<x_2$ συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα
$$\sigma(x_1)>\sigma(x_2),$$

θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ ἐξεταζόμενον διάστημα.

Δυνάμεθα ἐξ ἴσου νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἰς τὸ ἐξεταζόμενον διάστημα ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι αὔξουσα, ἐὰν εἰς κάθε αὔξησιν $\Delta x=x_2-x_1$ τῆς μεταβλητῆς x, ἀντιστοιχεῖ μία ὁμόσημος αὔξησις $\Delta y=\sigma(x_2)-\sigma(x_1)$ τῆς συναρτήσεως y, δηλ. ἐὰν ὁ λόγος

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sigma(x_2)-\sigma(x_1)}{x_2-x_1} \text{ εἶναι θετικός.}$$

Ὁμοίως θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι αὐξήσεις Δx καὶ Δy εἶναι ἑτερόσημοι καὶ συνεπῶς ἐὰν ὁ λόγος

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sigma(x_2)-\sigma(x_1)}{x_2-x_1} \text{ εἶναι ἀρνητικός.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα:

Κανών: *Διὰ νὰ σπουδάσωμεν τὴν μεταβολὴν μιᾶς συναρτήσεως $y=\sigma(x)$ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sigma(x_2)-\sigma(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Ἐὰν ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι θετικὸς ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα εἰς ὅλον τὸ ἐξεταζόμενον διάστημα.

Ἐὰν ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι ἀρνητικός, ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα εἰς ὅλον τὸ ἐξεταζόμενον διάστημα.

Σημ. Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τῆς x, θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερά. Οὕτω ἡ συνάρτησις $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $+1$, ἐὰν τὸ x εἶναι θετικὸν καὶ ἴση μὲ -1, ἐὰν τὸ x εἶναι ἀρνητικόν.

2. Διανύσματα

372. Διάνυσμα. *Διάνυσμα λέγεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα προσανατολισμένον.*

Π. χ. τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ (σχ. 14), τὸ ὁποῖον εἶναι προσανατολισμένον ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β ὁρίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (ἀπαγγέλλεται: διάνυσμα ΑΒ). Τὸ Α εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ διανύσματος καὶ τὸ Β τὸ πέρας του.



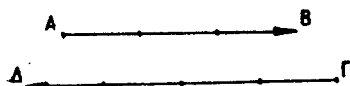
Σχ. 14

Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΧΨ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ διάνυσμα.

ὀνομάζεται φορεὺς τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ *καὶ ὁρίζει τὴν διεύθυνσίν του.*

῾Η ἀπόστασις AB εἶναι τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

373. Λόγος δύο παραλλήλων διανυσμάτων. *Λόγος δύο παραλλήλων διανυσμάτων εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸν λόγον τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων καὶ ὡς σημεῖον τὸ + ἢ — καθόσον τὰ δύο ἀνύσματα ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀντιθέτους φοράς.*



Σχ. 15

Οὕτω τὰ παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{ΓΔ}$ (σχ. 15) ἔχουν λόγον $-\frac{3}{4}$.

Γράφομεν

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{ΓΔ}} = -\frac{3}{4} \quad ἢ \quad \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{ΓΔ}.$$

Δύο παράλληλα διανύσματα εἶναι ἴσα ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ τὴν αὐτὴν φοράν.

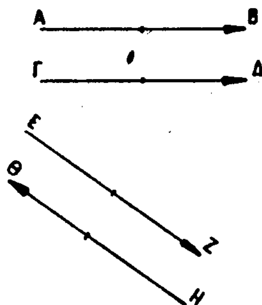
Δύο παράλληλα διανύσματα εἶναι ἀντίθετα, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ ἀντιθέτους φοράς.

Οὕτω τὰ παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{ΓΔ}$ (σχ. 16) εἶναι ἴσα. ῾Ο λόγος των εἶναι

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{ΓΔ}} = +1 \quad \text{καὶ θὰ εἶναι} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ΓΔ}.$$

Τὰ παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ καὶ $\overrightarrow{HΘ}$ εἶναι ἀντίθετα. ῾Ο λόγος των εἶναι

$$\frac{\overrightarrow{EZ}}{\overrightarrow{HΘ}} = -1 \quad \text{καὶ θὰ εἶναι} \quad \overrightarrow{EZ} = -\overrightarrow{HΘ}.$$

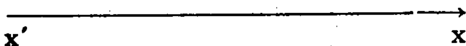


Σχ. 16

Παρατήρησις. Οἱ προηγούμενοι ὁρισμοὶ ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὰ διανύσματα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως.

Ἄξων. Εἰς τὴν § 23 ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἄξονος. Εἴδομεν, ὅτι : *Ἄ ξ ω ν εἶναι μία προσανατολισμένη εὐθεῖα.*

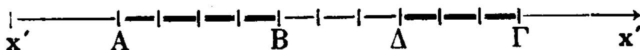
Οὕτω ἡ εὐθεῖα x′x (σχ. 17), ἡ προσανατολισμένη ἐκ τοῦ x′ πρὸς τὸ x, εἶναι ὁ ἄξων x′x.



Σχ. 17

Ἡ θ ε τ ι κ ὴ φ ο ρ ὰ τοῦ ἄξονος x′x εἶναι ἡ ἐκ τοῦ x′ πρὸς τὸ x. Ἡ ἀ ρ ν η τ ι κ ὴ φ ο ρ ά τ ο υ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ x πρὸς τὸ x′.

374. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος τοῦ ἄξονος x′x. Εἰς τὴν § 25 ὠνομάσαμεν ἀλγεβρικὴν τιμὴν ἑνὸς διανύσματος τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμὴν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ μῆκος του, μετρηθὲν διὰ δοθείσης μονάδος, καὶ ὡς σημεῖον τὸ + ἢ τὸ — καθ' ὅσον τὸ διάνυσμα ἔχει τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὸν ἄξονα ἢ φορὰν ἀντίθετον.



Σχ. 18

Ἔστω x′x ἕνας ἄξων ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἐκλέξει μίαν μονάδα μήκους (σχ. 18).

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ἄξονος x′x εἶναι +4. Γράφομεν $\overline{AB}=+4$.

Ὁμοίως εἶναι $\overline{\Gamma\Delta}=-3$, $\overline{BA}=-4$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ $\overline{AB}$ καὶ $\overline{BA}$ εἶναι δύο ἀριθμοὶ ἀντίθετοι. Δηλ. θὰ εἶναι $\overline{AB}=-\overline{BA}$.

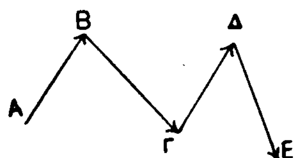
Σημ. Διὰ νὰ μὴ γίνεται σύγχυσις τῶν συμβόλων AB, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$ ἀναφέρομεν ὅτι:

AB: παριστάνει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ τὸ μῆκος AB.

$\overrightarrow{AB}$ » τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ B.

$\overline{AB}$ » τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

375. Διαδοχικὰ διανύσματα. *Δύο ἢ περισσότερα διανύσματα λέγονται δ ι α δ ο χ ι κ ά, ὅταν τὸ πέρας ἑκάστου εἶναι ἀρχὴ τοῦ ἑπομένου.*



Σχ. 19

Π. χ. τὰ διανύσματα (σχ. 19) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}$ εἶναι διαδοχικά.

376. Ἄθροισμα δύο διανυσμάτων. Ἔστωσαν δύο διαδοχικὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ (σχ. 20).

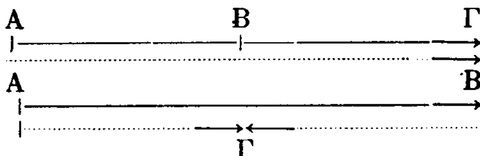
Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου διανύσματος καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ δευτέρου διανύσματος λέγεται γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων αὐτῶν.

Σχ. 20

Γράφομεν $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

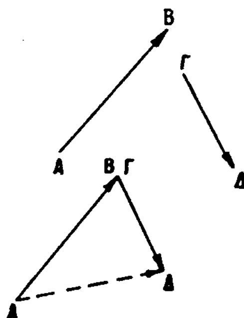
Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ διανύσματα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως.

Εἶναι πάντοτε (σχ. 21) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$.



Σχ. 21

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι διαδοχικά, ὅπως τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 22) πρέπει νὰ κατασκευάσωμεν δύο διαδοχικὰ διανύσματα ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς αὐτά.



Σχ. 22

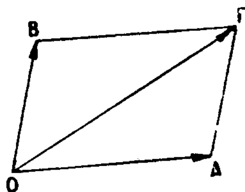
Τὸ ἄθροισμα δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχήν, θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΟΒΓ (σχ. 23).

Ἔχομεν $\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}$

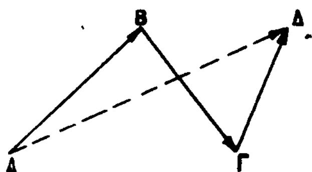
καὶ ἐπειδὴ $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{OB}$, θὰ εἶναι

$\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Τὸ ἄθροισμα πολλῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων εἶναι διάνυσμα, τὸ



Σχ. 23



Σχ. 24

ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου.

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 24) εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$, δηλ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων διανυσμάτων δὲν εἶναι γενικῶς ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν διανυσμάτων αὐτῶν.

377. Θεώρημα τοῦ Chasles. *Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο διαδοχικῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν διανυσμάτων αὐτῶν.*

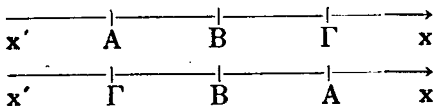
Ὑπόθεσις : Ἔστωσαν τὰ διαδοχικὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος $x'x$ καὶ $\overrightarrow{A\Gamma}$ τὸ γεωμετρικόν των ἄθροισμα.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{A\Gamma}=\overline{AB}+\overline{B\Gamma}$.

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν σημείων A, B, Γ δύναται νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις σχήματος.

1ον. Τὸ σημεῖον B κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ Γ (σχ. 25).

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ἑπομέ-



Σχ. 25

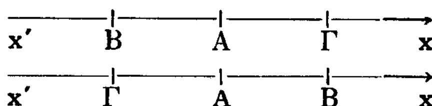
νως αἱ ἀλγεβρικαί των τιμαὶ $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{A\Gamma}$ εἶναι ὁμόσημοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἀπὸ τὴν προφανῆ ἀριθμητικὴν ἰσότητα

$A\Gamma = AB + B\Gamma$ μεταξὺ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, συνάγομεν καὶ τὴν $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$, δηλ., ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{A\Gamma}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν $\overline{AB}$ καὶ $\overline{B\Gamma}$ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$.

2ον. Τὸ σημεῖον Α κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ (σχ. 26).

Ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, θὰ ἔχωμεν

$$\overline{B\Gamma} = \overline{BA} + \overline{A\Gamma}$$



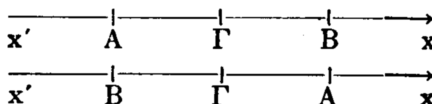
Σχ. 26

συμφώνως μὲ τὴν περίπτωσιν 1ην. Ἀλλὰ $\overline{BA} = -\overline{AB}$· ἑπομένως ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$\overline{B\Gamma} = -\overline{AB} + \overline{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}.$$

3ον. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β (σχ. 27).

Θὰ εἶναι $\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B} = \overline{AB}$, ἐπειδὴ τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α



Σχ. 27

καὶ Β. Ἀλλὰ $\overline{\Gamma B} = -\overline{B\Gamma}$, ἑπομένως ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται: $\overline{A\Gamma} - \overline{B\Gamma} = \overline{AB}$ ἢ $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχουν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x, θὰ ὑφίσταται πάντοτε ἡ σχέσις $\overline{A\Gamma} = \overline{AB} + \overline{B\Gamma}$, ἡ ὁποία καλεῖται σχέσις τοῦ Chasles. Ἡ σχέσις αὐτὴ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

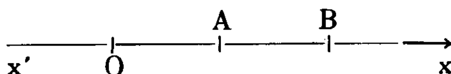
$$\boxed{\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = 0}$$

Τὸ θεώρημα τοῦ Chasles εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ περισσότερα τῶν δύο διαδοχικὰ διανύσματα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος.

378. Θεώρημα. ***Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος, τὸ***

όποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος, εἶναι ἴση μὲ τὴν τετμημένην τοῦ πέρατός του ἠλαττωμένην κατὰ τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς του.

Ὑπόθεσις : Ἔστω τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 28), τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'x, καὶ O ἡ ἀρχὴ τῶν τετμημένων.



Σχ. 28

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$.

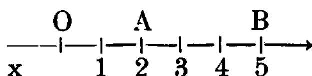
Ἀπόδειξις : Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Chasles εἰς τὰ σημεῖα O, A, B (σχ. 28), θὰ ἔχωμεν

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB} \quad \text{ἢ} \quad \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}.$$

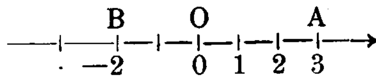
Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α καὶ β τὰς τετμημένας τῶν σημείων A καὶ B, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\overline{AB}=\beta-\alpha}$$

Παράδειγμα. Ἔστω (σχ. 29), ὅτι εἶναι $\overline{OA}=\alpha=2$, $\overline{OB}=\beta=5$



Σχ. 29



Σχ. 30

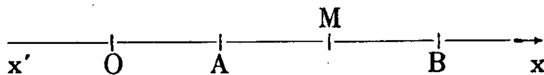
θὰ εἶναι $\overline{AB}=5-2=3$.

Ἔστω, ὅτι εἶναι (σχ. 30)

$$\overline{OA}=\alpha=+3 \quad \text{καὶ} \quad \overline{OB}=\beta=-2,$$

θὰ εἶναι $\overline{AB}=\beta-\alpha=(-2)-(+3)=-2-3=-5$.

379. Τετμημένη τοῦ μέσου ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος.
Ἔστω τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'x, ἀρχῆς O, καὶ M τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB (σχ. 31).



Σχ. 31

Ἔστω, ὅτι α εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ A, β ἡ τετμημένη τοῦ B καὶ x τοῦ M· ἐπειδὴ τὸ M εἶναι μέσον τοῦ AB, θὰ εἶναι $\overline{AM}=\overline{MB}$ ἢ

$$x-\alpha=\beta-x \quad \text{ἢ} \quad 2x=\alpha+\beta \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ὥστε : ἡ τετμημένη τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος τούτου.

380. Πρόβλημα. *Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B μὲ τετμημένας α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου σημεῖον M, ὥστε νὰ εἶναι* $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\lambda$, *ὅπου λ τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμός.*

Ἐὰν x εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ ζητουμένου σημείου M, ἡ δοθεῖσα σχέσις $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\lambda$ γράφεται

$$\frac{x-\alpha}{\beta-x}=\lambda \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ λ εἶναι δοθεὶς ἀριθμός, θὰ εἶναι $\beta-x\neq 0$· ἑπομένως ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$x-\alpha=\lambda(\beta-x) \quad \text{ἢ} \quad x+\lambda x=\alpha+\lambda\beta \quad \text{ἢ} \quad x=\frac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) συνάγομεν, ὅτι:

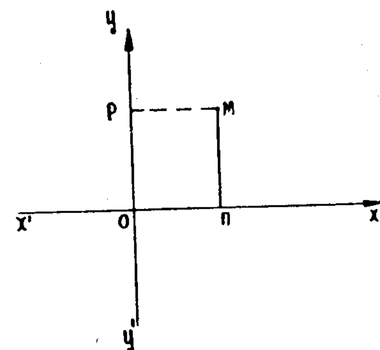
1ον. Ἐὰν λ=0, θὰ εἶναι x=α, δηλ. τὸ M συμπίπτει μὲ τὸ A.

2ον. Ἐὰν λ=−1, τὸ M ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον τοῦ ἄξονος x′x.

3ον. Ἐὰν λ=1, τὸ M συμπίπτει μὲ τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB.

3. Συντεταγμέναι καὶ γραφικαὶ παραστάσεις

381. Συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου γράφομεν δύο ἄξονας x′x καὶ y′y (σχ. 32) καθέτους μεταξύ των καὶ προσανατολισμένους κατὰ τὴν φοράν, ποὺ δεικνύει τὸ βέλος. Οἱ ἄξονες αὐτοὶ λέγονται ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ι ἄ ξ ο ν ε ς.



Σχ. 32

Ἔστω M ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται οἱ ἄξονες. Ἀπὸ τὸ σημεῖον M φέρομεν τὰς καθέτους MΠ καὶ MP ἐπὶ τοὺς ἄξονας x′x καὶ y′y.

Κάθε σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου εἶναι τελείως ὡρισμένον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ἀλγεβρικὰς τι-

μὰς τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΟΠ καὶ ΟΡ. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΠ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄x λέγεται τετμημένη τοῦ σημείου Μ καὶ παρίσταται πάντοτε μὲ τὸ γράμμα x· δηλ. εἶναι $x=\overline{ΟΠ}$.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΡ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y΄y, λέγεται τεταγμένη τοῦ σημείου Μ καὶ παρίσταται μὲ τὸ γράμμα y· δηλ. εἶναι $y=\overline{ΟΡ}$.

Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη ἑνὸς σημείου Μ, λέγονται συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Μ ἔχει τετμημένην x καὶ τεταγμένην y, γράφομεν Μ(x, y).

Οἱ ἄξονες x΄x καὶ y΄y λέγονται ἄξονες τῶν συντεταγμένων.

Ὁ ἄξων x΄x λέγεται ἄξων τῶν τετμημένων ἢ ἄξων τῶν x καὶ ὁ ἄξων y΄y λέγεται ἄξων τῶν τεταγμένων ἢ ἄξων τῶν y.

Τὸ σημεῖον Ο λέγεται ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι : *Εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο ἀριθμοὶ x καὶ y, οἱ ὁποῖοι εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.*

Π.χ. Αἱ	συντεταγμέναι	τοῦ	σημείου	Μ (σχ. 33)	εἶναι	$x=+3$,	$y=+4$
»	»	»	»	Μ΄	»	$x=-2$,	$y=+3$
»	»	»	»	Μ΄΄	»	$x=-5$,	$y=-3$
»	»	»	»	$Μ_3$	»	$x=+5$,	$y=-4$.

382. Προσδιορισμὸς ἑνὸς σημείου διὰ τῶν συντεταγμένων του. Ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο συντεταγμέναι του τελείως ὡρισμέναι.

Ἀντιστρόφως : Εἰς δύο συντεταγμένας x καὶ y ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Πράγματι. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Π (σχ. 32), τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη $\overline{ΟΠ}=x$ καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἕνα σημεῖον Ρ, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη $\overline{ΟΡ}=y$. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Π καὶ Ρ φέρομεν παραλλήλους, ἀντιστοίχως, πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν y΄y καὶ x΄x, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ· τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι τὸ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην x καὶ τεταγμένην y.

383. Παρατηρήσεις. 1η. *Κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος x΄x ἔχει τεταγμένην μηδὲν (y=0) καὶ ἀντιστρόφως :*

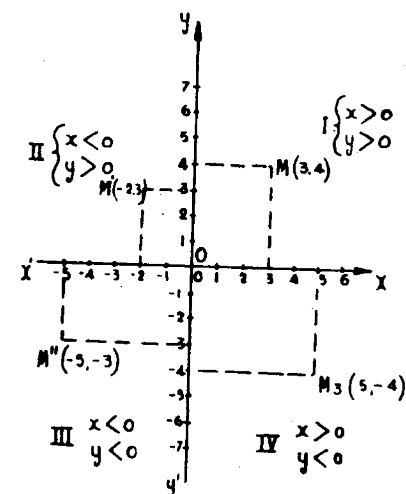
Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τεταγμένην μηδέν, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

2α. *Κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος $y'y$ ἔχει τετμημένην μηδὲν $(x=0)$ καὶ ἀντιστρόφως :*

Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην μηδέν, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y.

Ἡ ἀρχὴ Ο ἔχει συντεταγμένας $x=0$ καὶ $y=0$.

3η. Οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων διαιροῦν τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται, εἰς τέσσαρας γωνίας xOy, yOx′, x′Oy′, y′Ox, αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν π ρ ώ τ η γωνία (I), δ ε υ τ έ ρ α γωνία (II), τ ρ ί τ η γωνία (III) καὶ τ ε τ ά ρ τ η γωνία (IV) (σχ. 33).



Σχ. 33

Τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὴν πρώτην γωνίαν ἔχουν καὶ τὰς δύο συντεταγμένας x καὶ y θετικάς.

Τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν ἔχουν τὴν τετμημένην των x ἀρνητικὴν καὶ τὴν τεταγμένην των y θετικήν.

Τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὴν τρίτην γωνίαν ἔχουν καὶ τὰς δύο συντεταγμένας των x καὶ y ἀρνητικάς.

Τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὴν τετάρτην γωνίαν ἔχουν τὴν τετμημένην των x θετικὴν καὶ τὴν τεταγμένην των y ἀρνητικήν.

4η. Ἡ διχοτόμος τῶν γωνιῶν xOy καὶ x′Oy′ λέγεται π ρ ώ τ η δ ι χ ο τ ό μ ο ς τῶν γωνιῶν, ἡ δὲ διχοτόμος τῶν γωνιῶν x′Oy καὶ xOy′ λέγεται δ ε υ τ έ ρ α δ ι χ ο τ ό μ ο ς τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων.

384. Ἀπόστασις δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ καὶ $B(x_2, y_2)$. Ἔστωσαν δύο σημεῖα $A(x_1, y_1)$ καὶ $B(x_2, y_2)$ τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 34) τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὴν I γωνίαν τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB. Ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B φέρομεν τὰς καθέ-

τους ΑΑ', ΒΒ' ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ τὰς καθέτους ΑΑ'', ΒΒ'' ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν y.

Προεκτείνομεν τὴν ΑΑ'' μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΒΒ' εἰς τὸ Γ.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2=\overline{A\Gamma}^2+\overline{\Gamma B}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{AB}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{A''B''}^2 \qquad (1)$$

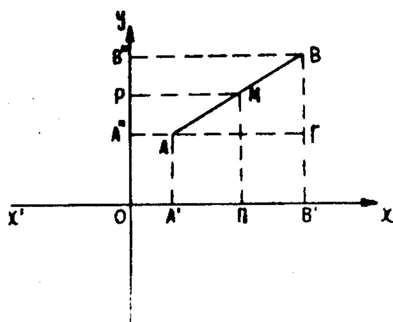
Ἐπειδὴ

$$\overline{A'B'}=\overline{OB'}-\overline{OA'}=x_2-x_1$$

καὶ $\overline{A''B''}=\overline{OB''}-\overline{OA''}=y_2-y_1$,

ἡ (1) γίνεται

$$\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$



Σχ. 34

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου N(x, y) ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O(0, 0) τῶν συντεταγμένων, θὰ ἔχωμεν

$$\overline{ON}^2=x^2+y^2.$$

385. Συντεταγμέναι τοῦ μέσου Μ ἑνὸς διανύσματος ΑΒ. Ἔστωσαν δύο σημεῖα $A(x_1, y_1)$ καὶ $B(x_2, y_2)$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων xOy (σχ. 34).

Ἔστω Μ τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $\overline{O\Pi}=x$, $\overline{OP}=y$. Ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ τοῦ Μ ἐπὶ τῶν ἀξόνων θὰ εἶναι τὰ μέσα τῶν προβολῶν τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἀξόνων, θὰ ἔχωμεν (§ 379)

$$\overline{O\Pi}=\frac{\overline{OA'}+\overline{OB'}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \overline{OP}=\frac{\overline{OA''}+\overline{OB''}}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Ὥστε: *Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἑνὸς διανύσματος εἶναι ἴσαι μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων τοῦ διανύσματος τούτου.*

386. Γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τῶν συναρτήσεων. Ἡ μεταβολὴ μιᾶς συναρτήσεως y=σ(x) δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων.

Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν:

Δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x διαφόρους τιμὰς καὶ εὑρίσκομεν

τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y. Τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς **x** θεωροῦμεν ὡς τ ε τ μ η μ έ ν α ς εἰς ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων x΄Ox καὶ **y**΄Oy καὶ τὰς τιμὰς τῆς **y** ὡς τ ε τ α γ μ έ ν α ς εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων. Ὁρίζομεν ἔπειτα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς συντεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν **x** καὶ y.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἢ ἡ καμπύλη, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα αὐτά, εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως.

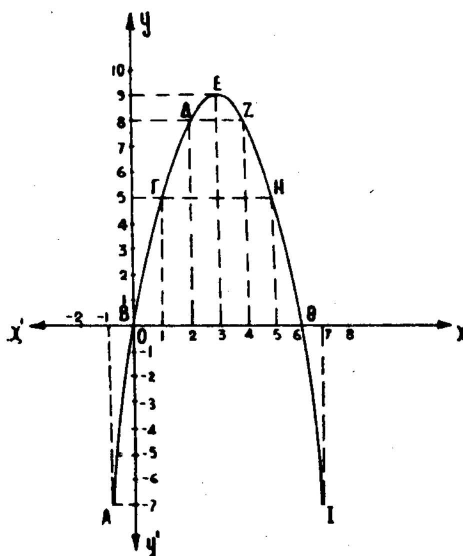
Παράδειγμα. *Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $y=6x-x^2$, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ —1 ἕως 7.*

Δίδομεν εἰς τὸ **x** διαφόρους τιμὰς —1, 0, 1, 2, ..., καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y.

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὰς διαδοχικὰς τιμάς, τὰς ὁποίας δίδομεν εἰς τὸν **x** καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y.

x	—1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	—7	0	5	8	9	8	5	0	—7

Χαράσσομεν ἔπειτα δύο ὀρθογωνίους ἄξονας x΄O**x** καὶ y΄Oy καὶ εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν συντεταγμένας τὰς τιμὰς τοῦ ἀνωτέρω πίνακος.



Σχ. 35

Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Α(—1,—7), Β(0,0), Γ(1,5), Δ(2,8), Ε(3,9), Ζ(4,8), Η(5,5), Θ(6,0), Ι(7,—7) (σχ. 35).

Συνδέομεν ἔπειτα τὰ διάφορα αὐτὰ σημεῖα μὲ μίαν συνεχῆ καμπύλην.

Ἡ κ α μ π ύ λ η αὐτὴ παριστᾷ γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=6x-x^2$ εἰς τὸ διάστημα (—1, +7).

Ἡ σχέσις y=σ(x) ὀνομάζεται ἐπίσης καὶ ἐ ξ ί σ ω σ ι ς τ ῆ ς κ α μ π ύ λ η ς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις σ(**x**).

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ κεῖται ἕνα σημεῖον $M(x_1, y_1)$ ἐπὶ τῆς καμπύλης $y=\sigma(x)$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $y_1=\sigma(x_1)$.

4. Σπουδὴ τῆς συναρτήσεως y=αx

387. Συνάρτησις τοῦ πρώτου βαθμοῦ. *Συνάρτησις τοῦ πρώτου βαθμοῦ λέγεται κάθε συνάρτησις τῆς μορφῆς*

$$y=\alpha x+\beta \qquad (1)$$

Οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοὶ καὶ ἡ μεταβλητὴ x δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

Π. χ. αἱ συναρτήσεις

$$y=2x+3, \quad y=5x-1, \quad y=-x+4$$

εἶναι συναρτήσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς β εἶναι ἴσος μὲ τὸ μηδέν, ἡ συνάρτησις (1) λαμβάνει τὴν μορφὴν $y=\alpha x$.

388. Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως y=αx. 1ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=3x$ (1)

Οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν συνάρτησιν y· ἄρα ἡ συνάρτησις $y=3x$ εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς x.

Δίδομεν εἰς τὴν x διαφόρους τιμάς, αἱ ὁποῖαι νὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y.

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰς τιμὰς τῆς x καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y.

x	−4	−2	−1	0	1	2	3...5
y	−12	−6	−3	0	3	6	9...15

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, βαίνουν ἐπίσης αὐξανόμεναι καὶ αἱ τιμαὶ τῆς y· ἄρα ἡ συνάρτησις $y=3x$ εἶναι *αὔξουσα*.

2ον. Ἔστω ἤδη ἡ συνάρτησις $y=-2x$. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι ἐπίσης ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς x.

Δίδομεν ἐπίσης εἰς τὴν μεταβλητὴν x διαφόρους τιμάς, αἱ ὁποῖαι βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y.

x	−5	−3	−1	0	1	4	5
y	10	6	2	0	−2	−8	−10

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y βαίνουν ἐλαττούμεναι· ἄρα ἡ συνάρτησις $y=-2x$ εἶναι φθίνουσα.

389. Θεώρημα. ***Ἡ συνάρτησις $y=ax$ εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς x. Εἶναι αὔξουσα, ὅταν ὁ συντελεστὴς a εἶναι θετικὸς καὶ φθίνουσα, ὅταν ὁ a εἶναι ἀρνητικός.***

Ἀπόδειξις: Ἡ συνάρτησις $y=ax$ εἶναι ὡρισμένη· διότι, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὴν x, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον ax καὶ ἑπομένως νὰ ὁρίσωμεν τὴν y.

Ἔστωσαν ἤδη δύο ἰδιαίτεραι τιμαὶ x_1 καὶ x_2 τῆς x καὶ y_1, y_2 αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς y.

Ἔστω, ὅτι εἶναι $x_1<x_2$ (1)

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1) ἐπὶ α.

1ον. Ἐὰν α εἶναι θετικόν, θὰ εἶναι

$$ax_1<ax_2 \quad \text{καὶ συνεπῶς} \quad y_1<y_2.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις $y=ax$ εἶναι αὔξουσα.

2ον. Ἐὰν α εἶναι ἀρνητικόν, θὰ εἶναι

$$ax_1>ax_2 \quad \text{καὶ συνεπῶς} \quad y_1>y_2.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ συνάρτησις $y=ax$...***

390. Ἰδιαίτεραι τιμαί. Διὰ $x=0$ ἡ συνάρτησις $y=ax$ δίδει $y=0$.

Ἐξ ἄλλου ἡ y ἔχει τὸ σημεῖον τῆς x, ἐὰν α εἶναι θετικὸν καὶ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τῆς x, ἐὰν α εἶναι ἀρνητικόν.

Ἐὰν x τείνῃ εἰς τὸ ∞ καὶ ἡ y τείνει εἰς τὸ ∞.

Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $y=5x$, διὰ νὰ λάβωμεν $y>1\,000\,000$ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $x>\frac{1\,000\,000}{5}$.

391. Πίναξ μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=ax$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ὅταν ἡ x αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἡ συνάρτησις $y=ax$:

1ον. αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἐὰν α εἶναι θετικόν.

2ον. ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως $-\infty$, ἐὰν α εἶναι ἀρνητικόν.

Ὁ κάτωθι πίναξ δεικνύει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=ax$:

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x$

$\alpha>0$	x	$-\infty$	↗	$+\infty$
	$y=\alpha x$	$-\infty$	↗	$+\infty$
$\alpha<0$	x	$-\infty$	↗	$+\infty$
	$y=\alpha x$	$+\infty$	↘	$-\infty$

392. Γενίκευσις. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἐὰν ὁ συντελεστὴς α εἶναι θετικὸς καὶ κατ' ἀντίθετον φοράν, ἐὰν ὁ **α** εἶναι ἀρνητικός.

Γενικῶς: *Ἡ συνάρτησις $y=\alpha\sigma(x)$, ὅπου α εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὴν συνάρτησιν $y=\sigma(x)$, ἐὰν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ κατ' ἀντίθετον φοράν, ἐὰν ὁ α εἶναι ἀρνητικός·*

Πράγματι· ἡ ἀνισότης $\sigma(x_1)<\sigma(x_2)$ συνεπάγεται τὴν ἀνισότητα $\alpha\sigma(x_1)<\alpha\sigma(x_2)$, ἐὰν ὁ α εἶναι θετικὸς καὶ τὴν ἀνισότητα $\alpha\sigma(x_1)>\alpha\sigma(x_2)$, ἐὰν ὁ α εἶναι ἀρνητικός.

393. Γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x$. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=\frac{3}{4}x$.

Δίδομεν εἰς τὴν x διαφόρους τιμὰς καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y.

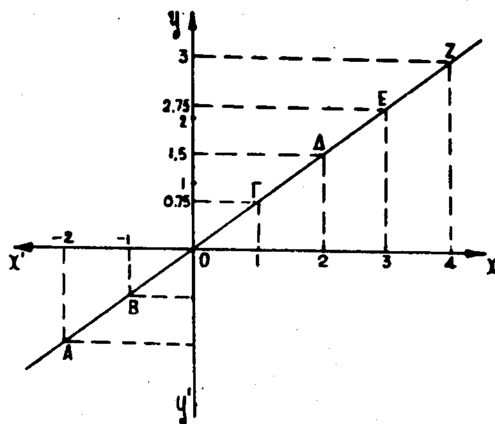
x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−1,5	−0,75	0	0,75	1,5	2,25	3

Κατασκευάζομεν τὰ σημεῖα (σχ. 36)

Α(−2, −1,5), Β(−1, −0,75), Ο(0,0), Γ(1, 0,75), Δ(2, 1,5), Ε(3, 2,25), Ζ(4,3).

Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ μίαν συνεχῆ γραμμήν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Ο(0,0) τῶν συντεταγμένων.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ συμπέρασμα, εἰς τὸ ὁποῖον κατελήξαμεν



Σχ. 36

μὲ τὸ παράδειγμα τῆς συναρτήσεως

$$y=\frac{3}{4}x$$

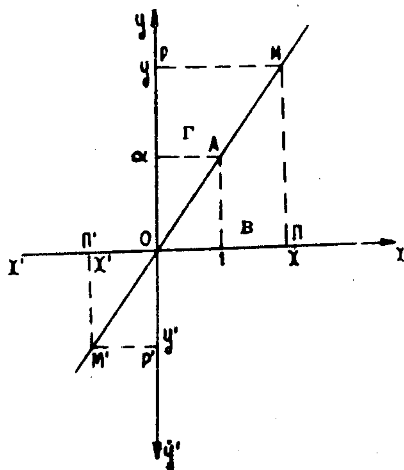
εἶναι γενικόν.

394. Θεώρημα. ***Ἡ συνάρτησις $y=ax$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.***

Δίδομεν εἰς τὴν x τὴν ἰδιαιτέραν τιμὴν $x=1$ καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι $y=\alpha$.

Κατασκευάζομεν τὸ σημεῖον A, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\overline{OB}=1$ καὶ τεταγμένην $\overline{O\Gamma}=\alpha$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OA.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι $\overline{O\Pi}=x$ καὶ $\overline{OP}=y$ τυχόντος σημείου M τῆς εὐθείας OA, ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $y=\alpha x$ (σχ. 37).



Σχ. 37

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OΠM καὶ OBA εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{\overline{O\Pi}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \quad (1)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα OPM καὶ OΓA ἔχομεν

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{O\Gamma}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{O\Gamma}}=\frac{\overline{O\Pi}}{\overline{OB}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{y}{\alpha}=\frac{x}{1}, \quad \text{ἄρα} \quad y=\alpha x.$$

Ὥστε αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς εὐθείας ΟΑ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $y=ax$.

Ἀντιστρόφως: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην x' καὶ τεταγμένην $y'=ax'$, κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ.

Ἔστω Π′ τὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\overline{O\Pi'}=x'$. Ἀπὸ τὸ Π′ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Μ′.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ′ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν y, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὸν εἰς τὸ σημεῖον Ρ′. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ τεταγμένη $\overline{OP'}=y'$ τοῦ Μ′ εἶναι ἴση μὲ ax', δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{OP'}=y'=ax'.$$

Ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΒΑ καὶ ΟΠ′Μ′ ἔχομεν

$$\frac{\overline{O\Pi'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OM'}}{\overline{OA}} \qquad (3)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΡ′Μ′ καὶ ΟΓΑ ἔχομεν

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{O\Gamma}}=\frac{\overline{OM'}}{\overline{OA}} \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς (3) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{O\Gamma}}=\frac{\overline{O\Pi'}}{\overline{OB}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{y'}{a}=\frac{x'}{1}, \quad \text{ἄρα} \quad y'=ax'.$$

Ὥστε τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $(x', y'=ax')$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ.

Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΟΑ εἶναι ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=ax$.

Σημ. Μὲ τὸν ὅρον καμπύλη νοοῦμεν τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ μία συνάρτησις.

395. Γωνιακὸς συντελεστὴς ἢ κλίσις τῆς εὐθείας $y=ax$.
Ἡ εὐθεῖα $y=ax$ ὁρίζεται ἀκριβῶς ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $x=1$ καὶ τεταγμένην $y=a$.

Δίδομεν εἰς τὸν συντελεστὴν a διαφόρους τιμὰς καὶ κατασκευάζομεν τὰς ἀντιστοίχους εὐθείας.

1ον. Ἐὰν a εἶναι θετικόν, ἡ συνάρτησις $y=ax$ εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ἀντίστοιχος εὐθεῖα εὑρίσκεται εἰς τὴν Ι καὶ ΙΙΙ γωνίαν.

Π.χ. διὰ $a=\frac{1}{2}$, $a=1$, $a=2$ ἔχομεν ἀντιστοίχως τὰς εὐθείας (σχ. 38)

$$y=\frac{1}{2}x, \quad y=x, \quad y=2x.$$

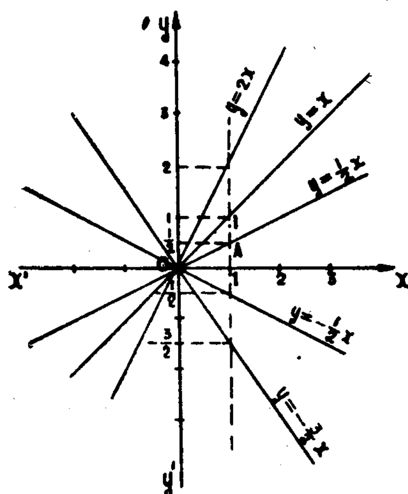
Ἐὰν α εἶναι ἀρνητικόν, ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα καὶ ἡ ἀντίστοιχος εὐθεῖα εὑρίσκεται εἰς τὴν II καὶ IV γωνίαν.

Π. χ. διὰ $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\alpha=-\frac{3}{2}$, ἔχομεν ἀντιστοίχως τὰς εὐθείας (σχ. 38)

$$y=-\frac{1}{2}x, \quad y=-\frac{3}{2}x.$$

2ον. Αἱ εὐθεῖαι $y=ax$ καὶ $y=-ax$ εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Τοιαῦται εἶναι αἱ εὐθεῖαι $y=\frac{1}{2}x$ καὶ $y=-\frac{1}{2}x$, διότι τὰ σημεῖα A καὶ A′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Συνεπῶς οἱ ἄξονες x′x καὶ y′y εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν OA καὶ OA′.



Σχ. 38

3ον. Ὅταν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ α αὐξάνῃ ἡ γωνία xOA αὐξάνει.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον (1, α) ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν x′x.

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς α γίνῃ μηδέν, ἡ εὐθεῖα $y=ax$ συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα x′x.

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τείνῃ νὰ γίνῃ μεγάλος κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἡ εὐθεῖα $y=ax$ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα y′y.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ θέσις τῆς εὐθείας $y=ax$ εἶναι συνάρτησις τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ α καὶ διὰ τοῦτο ὁ α λέγεται γωνιακὸς συντελεστὴς ἢ κλίσις τῆς εὐθείας $y=ax$.

396. Παρατηρήσεις. 1η. Διὰ νὰ βαθμολογήσωμεν τοὺς ἄξονας ἐκλέγομεν συνήθως τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ διὰ τοὺς δύο ἄξονας. Πολλάκις ὅμως ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ ἐκλέξωμεν διαφόρους μονάδας διὰ τὴν βαθμολογίαν τῶν ἀξόνων.

Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ συνάρτησις $y=ax$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν, διότι ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος § 394 μένει ἀληθής.

2α. Ὅταν ἐκλέξωμεν τὴν αὐτὴν μονάδα διὰ τὴν βαθμολογίαν καὶ τῶν δύο ἀξόνων, καὶ μόνον εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν (σχ. 37) $\frac{BA}{BO}=\frac{O\Gamma}{OB}=|\alpha|$.

Ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{BA}{BO}$ παριστάνει τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας xOA, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι:

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ $|\alpha|$ τοῦ γωνιώδους συντελεστοῦ α εἶναι ἴση μὲ τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας xOA.

Ἡ πρώτη διχοτόμος ἔχει τότε ὡς ἐξίσωσιν τὴν $y=x$, ἡ δὲ δευτέρα διχοτόμος ἔχει ὡς ἐξίσωσιν τὴν $y=-x$.

5. Σπουδὴ τῆς συναρτήσεως y=αx+β

397. Ἡ συνάρτησις y=αx+β εἶναι ὡρισμένη. Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ εἶναι ὡρισμένη διὰ κάθε τιμὴν τῆς x.

Πράγματι· ἐπειδὴ οἱ α καὶ β εἶναι δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ἡ x οἱοσδήποτε ἀριθμός, δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον αx καὶ νὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὸν ἀριθμὸν β.

Ὥστε ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

398. Σπουδὴ τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως y=αx+β.
1ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=2x+3$.

Δίδομεν εἰς τὴν x διαφόρους τιμάς, αἱ ὁποῖαι βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y.

x	−4	−2	−1,5	0	1	2	3
y	−5	−1	0	3	5	7	9

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, βαίνουν ἐπίσης αὐξανόμεναι καὶ αἱ τιμαὶ τῆς y· ἄρα ἡ συνάρτησις $y=2x+3$ εἶναι αὔξουσα.

2ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=-2x+5$.

Εὑρίσκομεν ὁμοίως

x	−4	−2	0	1	2,5	3	5	7
y	13	9	5	3	0	−1	−5	−9

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, αἱ τιμαὶ τῆς y βαίνουν ἐλαττούμεναι· ἄρα ἡ συνάρτησις $y=-2x+5$ εἶναι φ θ ί ν ο υ σ α.

399. Θεώρημα. ***Ἡ συνάρτησις*** $y=ax+\beta$ ***εἶναι αὔξουσα, ὅταν ὁ συντελεστὴς α εἶναι θετικὸς καὶ φθίνουσα, ὅταν ὁ συντελεστὴς α εἶναι ἀρνητικός.***

Ἔστωσαν x_1 καὶ x_2 δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x καὶ τοιαῦται, ὥστε $x_1<x_2$ (1)

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1) ἐπὶ α.

I. Ἐὰν α εἶναι θετικὸς θὰ εἶναι $ax_1<ax_2$ καὶ συνεπῶς καὶ

$$ax_1+\beta<ax_2+\beta \quad \text{ἢ} \quad y_1<y_2.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις $y=ax+\beta$ εἶναι α ὔ ξ ο υ σ α.

II. Ἐὰν α εἶναι ἀρνητικὸς θὰ εἶναι $ax_1>ax_2$ καὶ συνεπῶς καὶ

$$ax_1+\beta>ax_2+\beta \quad \text{ἢ} \quad y_1>y_2.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις $y=ax+\beta$ εἶναι φ θ ί ν ο υ σ α.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι : ***Ἡ συνάρτησις*** $y=ax+\beta$ ***εἶναι*** ...

400. Ἰδιαίτεραι τιμαί. 1ον. Διὰ $x=0$, ἡ συνάρτησις $y=ax+\beta$ δίδει $y=\beta$.

2ον. Διὰ $y=0$, ἔχομεν $ax+\beta=0$ ἢ $x=-\dfrac{\beta}{a}$.

3ον. Ἐὰν τὸ x τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε καὶ τὸ ax τείνει εἰς τὸ ἄπειρον καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἄθροισμα $ax+\beta$ ἢ ἡ συνάρτησις y, τείνει εἰς τὸ ἄπειρον.

401. Πίναξ τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=ax+\beta$**.** Τὰ προηγούμενα συμπεράσματα συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y=ax+\beta$				
$a>0$	x	$-\infty$	↗	$+\infty$
	$y=ax+\beta$	$-\infty$	↗	$+\infty$
$a<0$	x	$-\infty$	↗	$+\infty$
	$y=ax+\beta$	$+\infty$	↘	$-\infty$

Παρατήρησις. Οἱ δύο ἀνωτέρω πίνακες εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς πίνακας τῆς § 391 καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, καθ' ἣν μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$.

402. Γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x+\beta$. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως $y=2x-3$.

Δίδομεν εἰς τὴν x διαφόρους τιμὰς καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y. Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δίδει τὰς τιμὰς αὐτάς.

x	−1	0	1	2	3
y	−5	−3	−1	1	3

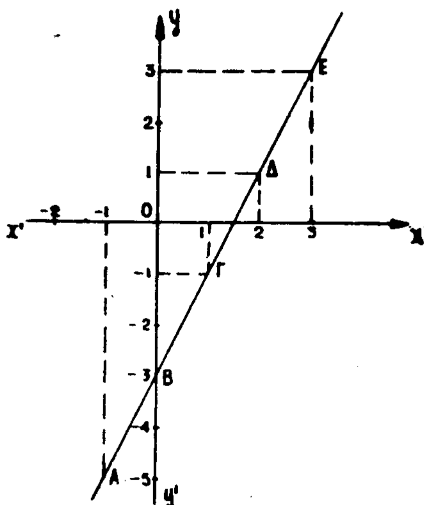
Κατασκευάζομεν (σχ. 39) τὰ σημεῖα
Α(−1, −5), Β(0, −3), Γ(1, −1), Δ(2, 1), Ε(3, 3).

Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ μίαν συνεχῆ γραμμήν, θὰ ἴδωμεν, ὅτι αὐτὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ συμπέρασμα εἰς τὸ ὁποῖον κατελήξαμεν μὲ τὸ παράδειγμα τῆς συναρτήσεως

$$y=2x-3$$

εἶναι γενικόν.



Σχ. 39

403. Θεώρημα. ***Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν, παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$ καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς ἕνα σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη εἶναι β.***

Ἔστω, ὅτι ἐχαράξαμεν τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$ καὶ ἔστω αὕτη ἡ ΟΓ (σχ. 40).

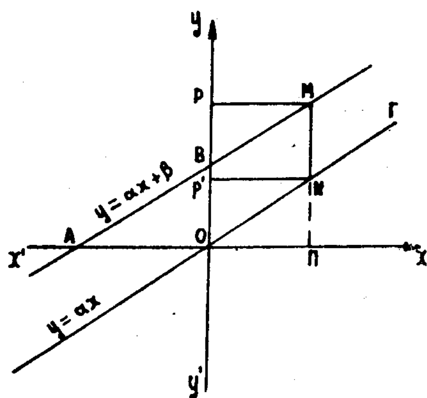
Ἔστω ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\overline{ΟΠ}=x$ καὶ τεταγμένην $\overline{ΟΡ}=\alpha x+\beta$.

Ἔστω Ν τὸ σημεῖον, ὅπου ἡ $\overline{ΠΜ}$ τέμνει τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$.

Τὸ σημεῖον N, ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$, ἔχει τετμημένην $\overline{O\Pi}=x$ καὶ τεταγμένην $\overline{OP'}=y=\alpha x$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, εἶναι

$$\overline{NM}=\overline{\Pi M}-\overline{\Pi N} \quad \text{ἢ} \quad \overline{NM}=\overline{OP}-\overline{OP'} \quad \text{ἢ} \quad \overline{NM}=(\alpha x+\beta)-\alpha x=\beta.$$



Σχ. 40

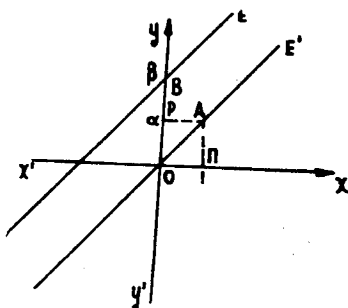
Ἔστω B τὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν y, τὸ ὁποῖον ἔχει τεταγμένην $\overline{OB}=\beta$. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα OB καὶ NM εἶναι ἴσα, διότι $NM=OB=\beta$, παράλληλα, ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς· ἄρα τὸ τετράπλευρον OBMN εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον.

Ὥστε τὸ σημεῖον M, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι εἶναι x καὶ $\alpha x+\beta=y$, κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον B, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη εἶναι ἴση μὲ β.

Ὅταν ἡ τετμημένη x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, τὸ σημεῖον N διαγράφει τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$ καὶ τὸ σημεῖον M διαγράφει τὴν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, τὴν ἀγομένην ἀπὸ τὸ σημεῖον B, τοῦ ὁποίου ἡ τεταγμένη εἶναι β.

Ὥστε ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παρίσταται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας.

Ἀντιστρόφως: Κάθε εὐθεῖα E (σχ. 41), ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y τέμνει τὸν ἄξονα αὐτὸν εἰς ἕνα σημεῖον B.



Σχ. 41

Ἔστω $\overline{OB}=\beta$ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου B.

Ἀπὸ τὴν ἀρχὴν O τῶν συντεταγμένων φέρομεν τὴν εὐθεῖαν E′ παράλληλον πρὸς τὴν E.

Ἔστω Α τὸ σημεῖον τῆς Ε', τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\overline{O\Pi}=+1$ καὶ τεταγμένην $\overline{OP}$, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν μὲ α.

Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$, συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν Ε' καὶ συνεπῶς ἡ εὐθεῖα Ε συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ συνάρτησις*** $y=\alpha x+\beta$ ...

404. Ἐξίσωσις εὐθείας. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι εἰς κάθε εὐθεῖαν Ε τοῦ ἐπιπέδου, μὴ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἀντιστοιχεῖ μία σχέσις τῆς μορφῆς $y=\alpha x+\beta$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται ἐξίσωσις τῆς εὐθείας Ε.

405. Γραμμικὴ συνάρτησις. Ἐδείξαμεν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν· διὰ τοῦτο ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ λέγεται γραμμικὴ συνάρτησις.

Ὁ συντελεστὴς α, ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὴν κλίσιν τῆς εὐθείας πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, λέγεται γωνιώδης ἢ γωνιακὸς συντελεστὴς ἢ συντελεστὴς κατευθύνσεως (§ 395).

Ὁ ἀριθμὸς β, ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $x=0$, λέγεται τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχήν.

Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς εὐθείας $y=\alpha x+\beta$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν **x** ἔχει τεταγμένην $y=0$. Ἡ τετμημένη του εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὴν συνάρτησιν $y=\alpha x+\beta$ θέτομεν $y=0$ καὶ εὑρίσκομεν

$$0=\alpha x+\beta \quad \text{ἢ} \quad x=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ὥστε τὸ σημεῖον Α (σχ. 40) ἔχει τετμημένην $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ τεταγμένην $y=0$.

Ὁ ἀριθμὸς $-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὴν τετμημένην τοῦ σημείου τομῆς τῆς εὐθείας $y=\alpha x+\beta$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν **x**, καλεῖται τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς εὐθείας.

Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν λέγονται συντεταγμέναι τῆς εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀρχήν.

Παρατήρησις. Ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha x+\beta$ δύναται νὰ γραφῇ ὡς $-\alpha x+y=\beta$ καὶ ἐὰν $\alpha\beta\neq 0$, διαιροῦντες διὰ β καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$-\frac{\alpha x}{\beta}+\frac{y}{\beta}=1 \quad \text{ἢ ἀκόμη} \quad \frac{x}{-\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{y}{\beta}=1.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις εὐθείας μὲ συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν λ καὶ μ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}=1 \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ (1), τέμνει τὸν ἄξονα τῶν **x** εἰς σημεῖον μὲ συντεταγμένας $y=0$ καὶ $x=\lambda$, τὸν δὲ ἄξονα τῶν **y** εἰς σημεῖον μὲ συντεταγμένας $x=0$, $y=\mu$, δηλ. αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς (1) εἶναι (λ, μ).

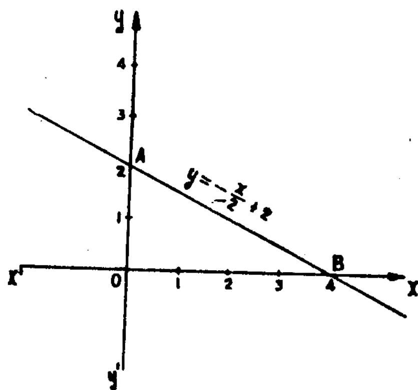
406. Κατασκευὴ τῆς εὐθείας $y=\alpha x+\beta$. Ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, εἶναι φανερόν, ὅτι δύο μόνον σημεῖα αὐτῆς ἀρκοῦν, διὰ νὰ τὴν παραστήσωμεν γραφικῶς.

Ἀντὶ νὰ εὕρωμεν δύο τυχόντα σημεῖα αὐτῆς, εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τῶν ἀξόνων

$$(x=0,\ y=\beta)$$

καὶ $\left(x=-\frac{\beta}{\alpha},\ y=0\right)$,

δηλ. τὰς συντεταγμένας της ἐπὶ τὴν ἀρχήν.



Σχ. 42

Παράδειγμα Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν

$$y=-\frac{x}{2}+2 \qquad (1)$$

Ἐὰν λάβωμεν $x=0$, ἡ (1) δίδει $y=2$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον A(0, 2) (σχ. 42).

Ἐὰν λάβωμεν $y=0$, ἡ (1) δίδει

$$0=-\frac{x}{2}+2 \quad \text{ἢ} \quad 4=x$$

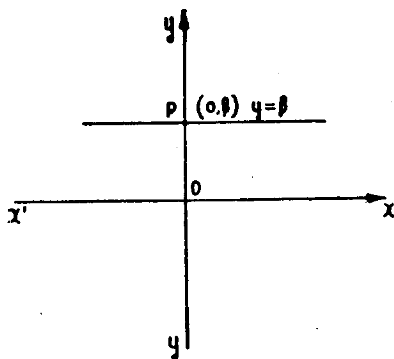
καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον B(4, 0).

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

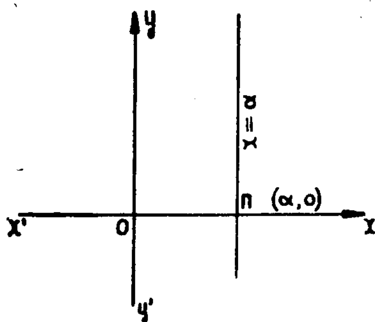
Ἐὰν $\alpha=0$, ἡ εὐθεῖα ἔχει ὡς ἐξίσωσιν τὴν $y=\beta$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν

x (σχ. 43), τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν y εἰς σημεῖον P μὲ συντεταγμένας (0, β).

Κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς x=α παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον



Σχ. 43



Σχ. 44

πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y (σχ. 44), τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν x εἰς σημεῖον Π μὲ συντεταγμένας (α, 0).

407. Πρόβλημα. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας AB, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A(x=3, y=2) καὶ B(x=4, y=5).*

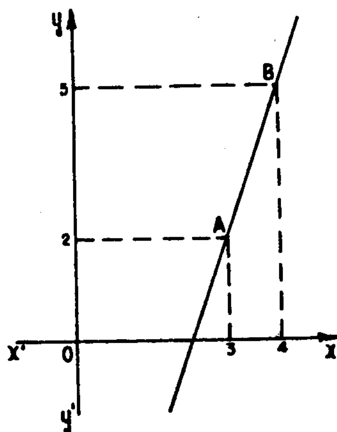
Ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὰ α καὶ β, ἵνα ἡ εὐθεῖα

$$y=\alpha x+\beta \qquad (1)$$

διέρχεται διὰ τῶν σημείων A καὶ B.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων A καὶ B (σχ. 45) ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας y=αx+β. Διὰ νὰ διέρχεται ἡ εὐθεῖα ἀπὸ τὸ σημεῖον A, πρέπει εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) νὰ θέσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου A, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2=\alpha\cdot 3+\beta \quad \text{ἢ} \quad 3\alpha+\beta=2 \qquad (2)$$



Σχ. 45

Ὁμοίως, διὰ νὰ διέρχεται ἡ εὐθεῖα ἀπὸ τὸ σημεῖον B, πρέπει νὰ εἶναι

$$5=\alpha\cdot 4+\beta \quad \text{ἢ} \quad 4\alpha+\beta=5 \qquad (3)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) καὶ εὑρίσκομεν $\alpha=3$ καὶ $\beta=-7$.

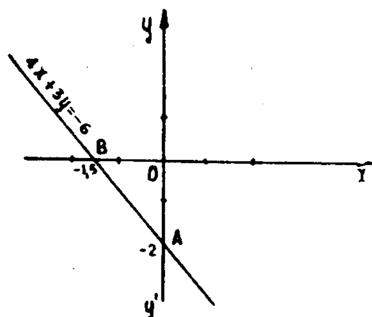
Ὥστε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι $y=3x-7$.

408. Γραφικὴ παράστασις τῆς εὐθείας $\alpha x+\beta y=\gamma$. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν

$$4x+3y=-6 \qquad (1)$$

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς y καὶ ἔχομεν

$$y=\frac{-4x-6}{3} \quad \text{ἢ} \quad y=-\frac{4x}{3}-2$$



Σχ. 46

Τὰ ζητούμενα σημεῖα εἶναι σημεῖα τῆς εὐθείας

$$y=-\frac{4x}{3}-2 \qquad (2)$$

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν δύο σημεῖα αὐτῆς (σχ. 46).

Διὰ $x=0$ ἡ (2) δίδει $y=-2$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον $A(0, -2)$.

Διὰ $y=0$, ἡ (2) δίδει

$$x=-\frac{3}{2}$$

καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον

$$B\left(-\frac{3}{2}, 0\right).$$

6. Ἐφαρμογαὶ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως

409. Θεώρημα. ***Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ μιᾶς εὐθείας.***

1ον. Ἐὰν $\beta\neq 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

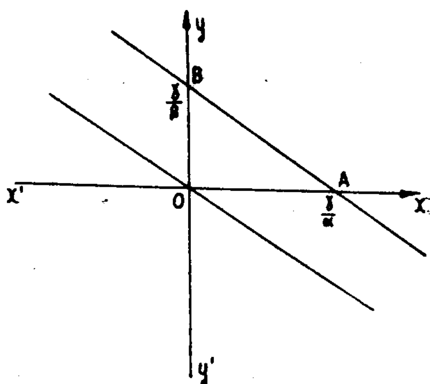
καὶ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἔχει γωνιώδη συντελεστὴν κατευθύνσεως $-\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $\frac{\gamma}{\beta}$ (σχ. 47).

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ συναντᾷ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον

$$A\left(x=\frac{\gamma}{\alpha},\ y=0\right)$$

καὶ τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον

$$B\left(x=0,\ y=\frac{\gamma}{\beta}\right).$$



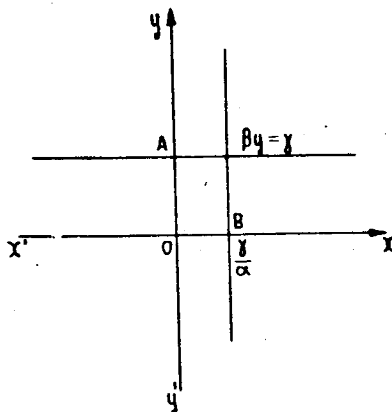
Σχ. 47

2ον. 'Εὰν α=0, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσίς γράφεται

$$\beta y=\gamma \quad ἢ \quad y=\frac{\gamma}{\beta}$$

καὶ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον (σχ. 47)

$$A\left(0,\ \frac{\gamma}{\beta}\right).$$



Σχ. 47

3ον. 'Εὰν β=0, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha x=\gamma \quad ἢ \quad x=\frac{\gamma}{\alpha}$$

καὶ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον (σχ. 47)

$$B\left(\frac{\gamma}{\alpha},\ 0\right).$$

410. Θέσεις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας. Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι συμπίπτουν. Θεώρημα. ***'Η ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι***

$$\alpha x+\beta y=\gamma \quad (1) \qquad καὶ \qquad Ax+By=\Gamma \quad (2)$$

συμπίπτουν, εἶναι

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma} \qquad (3)$$

'Απόδειξις : Ἔστω, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2), συμπίπτουν. Τότε θὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν συντεταγμένας.

Αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς (1) εἶναι $x=\frac{\gamma}{\alpha}$, $y=\frac{\gamma}{\beta}$, ἐνῷ τῆς (2) εἶναι $x=\frac{\Gamma}{A}$, $y=\frac{\Gamma}{B}$. Ἐπομένως, ἀφοῦ αἱ δύο εὐθεῖαι συμπίπτουν, θὰ εἶναι

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\Gamma}{A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma}{\beta}=\frac{\Gamma}{B}.$$

ἐξ αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}.$$

Ἀντιστρόφως: Ἔστω, ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

Καλοῦμεν λ τοὺς ἴσους λόγους (3) καὶ ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\lambda \quad \text{ἢ} \quad \alpha=A\lambda, \quad \beta=B\lambda, \quad \gamma=\Gamma\lambda.$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ α, β, γ μὲ τὰ ἴσα των εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν

$$A\lambda x+B\lambda y=\Gamma\lambda \quad \text{ἢ} \quad \lambda(Ax+By)=\Gamma\lambda \quad \text{ἢ} \quad Ax+By=\Gamma.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐξίσωσιν (2), ἐπομένως αἱ (1) καὶ (2) παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

411. Συνθήκη, ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι. Θεώρημα. ***Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ ἐξισώσεις***

$$\alpha x+\beta y=\gamma \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad Ax+By=\Gamma \quad (2)$$

παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους, εἶναι ἡ

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B} \qquad (3)$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω, ὅτι αἱ (1) καὶ (2) παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους. Τότε θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστήν.

Ἡ (1) γράφεται $y=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$, ἐπομένως ἔχει γωνιακὸν συντελεστὴν $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$. Ὑποτίθεται $\beta\neq 0$, διότι, ἐὰν εἶναι $\beta=0$, ἡ (1) παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, θὰ εἶναι δὲ καὶ $B=0$, διότι, ἐὰν εἶναι $B\neq 0$ αἱ δύο εὐθεῖαι (1) καὶ (2) δὲν εἶνα παράλληλοι.

Ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς (2) εἶναι $\Lambda = -\frac{A}{B}$ καὶ ἐπειδὴ θὰ εἶναι $\lambda = \Lambda$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}.$$

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) παριστάνουν δύο εὐθείας παραλλήλους.

Ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}$ γράφεται

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{A}{B}.$$

ἑπομένως αἱ (1) καὶ (2) ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως, ἄρα εἶναι παράλληλοι.

412 Συνθήκη ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι

$$y = \alpha x + \beta \quad \text{καὶ} \quad y = \alpha' x + \beta'.$$

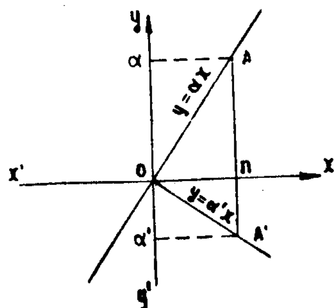
Διὰ νὰ εἶναι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ κάθετοι μεταξύ των πρέπει καὶ αἱ παράλληλοί των πρὸς αὐτὰς εὐθεῖαι

$$y = \alpha x \quad \text{καὶ} \quad y = \alpha' x$$

νὰ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x λαμβάνομεν διάνυσμα $\overrightarrow{O\Pi}$ τοιοῦτον, ὥστε ἡ τετμημένη του $\overline{O\Pi}$ νὰ εἶναι ἴση μὲ 1 (σχ. 48).

Ἀπὸ τὸ Π φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν $y = \alpha x$ εἰς τὸ σημεῖον $A(1, \alpha)$ καὶ τὴν εὐθεῖαν $y = \alpha' x$ εἰς τὸ σημεῖον $A'(1, \alpha')$.



Σχ. 48

Διὰ νὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΟΑ' ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ο, πρέπει νὰ εἶναι

$$\overline{O\Pi}^2 = \Pi A \times \Pi A' \quad \text{ἢ} \quad \overline{O\Pi}^2 = -\overline{\Pi A} \cdot \overline{\Pi A'} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\overline{O\Pi} = 1$ καὶ $\overline{\Pi A} = \alpha$, $\overline{\Pi A'} = \alpha'$, ἡ (1) γίνεται

$$1 = -\alpha \cdot \alpha' \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\alpha \cdot \alpha' = -1}$$

Ὥστε : *Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τῶν γωνιακῶν συντελεστῶν των νὰ εἶναι ἴσον μὲ —1.*

413. Γραφικὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν γραφικῶς τὴν ἐξίσωσιν $2x-3=0$ (1)

Παριστάνομεν τὸ πρῶτον μέλος της μὲ y, δηλ. θέτομεν $y=2x-3$ καὶ κατασκευάζομεν (σχ. 49) τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $y=2x-3$ (2)

Ἐὰν λάβωμεν $x=0$, ἡ (2) δίδει $y=-3$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν λάβωμεν $x=1$, ἡ (2) δίδει $y=-1$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Γ εἶναι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἐπειδὴ ἡ τετμημένη τοῦ Γ εἶναι 1,5, ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ 1,5.

Ἂν λύσωμεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x-3=0$, εὑρίσκομεν πράγματι, ὅτι $x=1,5$.

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια πρὸς αὐτὸ συνάγομεν, ὅτι :

Σχ. 49

Διὰ νὰ λύσωμεν γραφικῶς μίαν ἐξίσωσιν τοῦ πρώτου βαθμοῦ

$$\alpha x+\beta=0,$$

κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις

$$y=\alpha x+\beta$$

καὶ εὑρίσκομεν τὴν τετμημένην x τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

414. Γραφικὴ λύσις τοῦ συστήματος

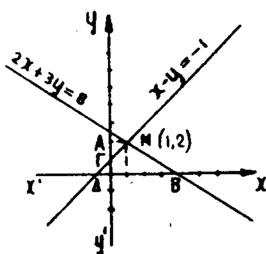
$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

Ἔστω τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} 2x+3y=8 & (1) \\ x-y=-1 & (2) \end{cases}$$

Κατασκευάζομεν (σχ. 50) τὰς εὐθείας, ποὺ παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2).

Ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ $x=0$, δίδει $y=\frac{8}{3}$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Α. Διὰ $y=0$ δίδει $x=4$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἡ ΑΒ παριστᾷ τὴν ἐξίσωσιν (1).



Σχ. 50

Ἡ ἐξίσωσις (2) διὰ $x=0$, δίδει $y=1$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Γ· διὰ $y=0$ δίδει $x=-1$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἡ ΓΔ παριστᾷ τὴν ἐξίσωσιν (2).

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ (1,2). Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν γραφικῶς ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν, ποὺ παριστάνουν αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

415. Γραφικὴ διερεύνησις τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma & (1) \\ Ax+By=\Gamma & (2) \end{cases}$$

Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ (1) καὶ (2) ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις, ἑπομένως εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος αὐτῶν.

Κατὰ τὴν (§ 325) αἱ λύσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι

$$x=\frac{\gamma B-\Gamma\beta}{\alpha B-A\beta},\quad y=\frac{\alpha\Gamma-A\gamma}{\alpha B-A\beta} \qquad (3)$$

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι (1) καὶ (2) τέμνωνται, θὰ ἔχουν συντελεστὰς κατευθύνσεως διαφόρους, δηλ. θὰ εἶναι

$$-\frac{\alpha}{\beta}\neq-\frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}\neq\frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{A}\neq\frac{\beta}{B}$$

καὶ τότε θὰ εἶναι δυνατὸν διὰ τῶν ἰσοτήτων (3) νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τομῆς αὐτῶν, τὸ δὲ δοθὲν σύστημα θὰ εἶναι δυνατόν.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι (1) καὶ (2) εἶναι παράλληλοι, τότε δὲν ὑπάρχει

σημεῖον τομῆς (εἰς πεπερασμένην ἀπόστασιν)· ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν διὰ τῶν (3) νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι του.

Πράγματι· αἱ (1) καὶ (2) ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως καὶ κατὰ τὴν (§ 411) εἶναι $\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}$, ἑπομένως $\alpha B-\beta A=0$, δηλ. τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

'Εὰν αἱ (1) καὶ (2) ταυτίζωνται, τότε κατὰ τὴν (§ 410) θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}$ καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνουν αἱ (1) καὶ (2), ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα, δηλ. τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

416 Γραφικὴ λύσις ἀνισοτήτων. ***Παράδειγμα Ι.*** *Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $5x-3y+4=0$ καὶ ἔπειτα νὰ καθορισθῇ εἰς ποῖον μέρος τοῦ ἐπιπέδου εὑρίσκονται τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ἀπὸ τὰς ἀνισότητας*

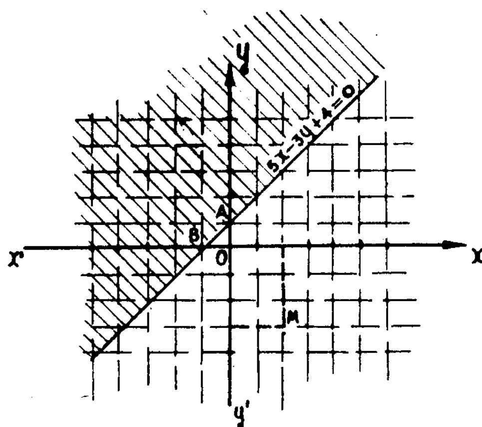
$$5x-3y+4>0$$
$$5x-3y+4<0.$$

Λύσις: Κατασκευάζομεν (σχ. 51) τὴν εὐθεῖαν τῆς ἐξισώσεως

$$5x-3y+4=0 \quad (1)$$

Πρὸς τοῦτο θέτομεν $x=0$, ὁπότε ἡ (1) δίδει $y=\frac{4}{3}$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Α.

'Εὰν $y=0$ ἡ (1) δίδει $x=-\frac{4}{5}$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Β.



Σχ. 51

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. 'Η ΑΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1).

'Η εὐθεῖα ΑΒ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα περιέχει τὴν ἀρχὴν Ο.

'Εὰν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον κεῖται ὡς

πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀρχῆς, αἱ συντεταγμέναι του ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα

$$5x-3y+4>0 \qquad (1)$$

Πράγματι. Ἔστω τὸ σημεῖον Ο· αἱ συντεταγμέναι του εἶναι $x=0$ καὶ $y=0$. Διὰ $x=0$ καὶ $y=0$, ἡ ἀνισότης (1) ἀληθεύει, διότι γίνεται $4>0$.

Ἔστω ἕνα ἄλλο σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι εἶναι $x=2$, $y=-3$.

Διὰ $x=2$ καὶ $y=-3$ ἡ ἀνισότης (1) δίδει $10+9+4>0$, ἤτοι ἐπαληθεύεται.

Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται πρὸς τὸ σκιῶδες μέρος (εἰς τὸ σχῆμα τὸ σκιῶδες μέρος παρίσταται διὰ παραλλήλων εὐθειῶν), δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα $5x-3y+4>0$, ἀλλὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα $5x-3y+4<0$.

Παράδειγμα ΙΙ. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $x+3y>0$.

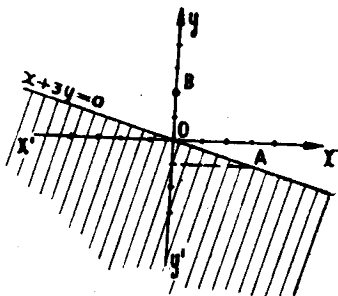
Λύσις: Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις

$$x+3y=0 \qquad (1)$$

Πρὸς τοῦτο θέτομεν $x=0$, ὁπότε ἡ (1) δίδει $y=0$ καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Ο (σχ. 52).

Ἐὰν θέσωμεν $x=3$, ἡ (1) δίδει $y=-1$ καὶ ἡ εὐθεῖα διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΑ. Ἡ ΟΑ εἶναι ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις (1).

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ΟΑ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη.



Σχ. 52

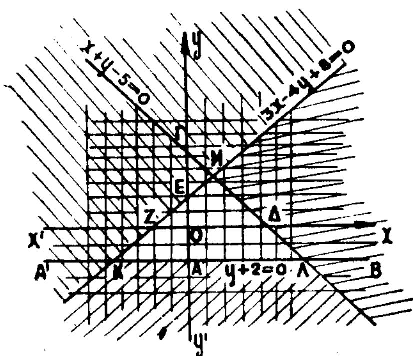
Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἔστω τὸ Β, καὶ ἐξετάζομεν, ἐὰν αἱ συντεταγμέναι του $x=0$ καὶ $y=2$ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $x=0$, καὶ $y=2$ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει. Ἄρα αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου αὐτοῦ καθὼς καὶ αἱ συντεταγμέναι κάθε σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὸ ἄνω μέρος τῆς εὐθείας ΟΑ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὸ σκιῶδες μέρος τοῦ ἐπιπέδου, δὲν ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα, ἀλλὰ τὴν ἀνισότητα $x+3y<0$.

Παράδειγμα III. *Νὰ λυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων*

$$\begin{cases} y+2>0 & (1) \\ x+y-5<0 & (2) \\ 3x-4y+8>0 & (3) \end{cases}$$



Σχ. 53

Λύσις: Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις y+2=0.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται y=—2.

Ἄρα παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν AB (σχ. 53) παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον A, τὸ ὁποῖον ἔχει τεταγμένην $\overline{OA}=-2$. Αἱ συντεταγμέναι x=0, y=0 τῆς ἀρχῆς O ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα (1) καὶ ἑπομένως ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ σκιῶδες μέρος κάτωθεν τῆς εὐθείας AB, δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα (1).

Κατασκευάζομεν τώρα τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ ἐξίσωσις

$$x+y-5=0 \qquad (2')$$

Πρὸς τοῦτο θέτομεν x=0, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (2′) δίδει y=5 καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Γ.

Ἐὰν y=0, ἡ (2′) δίδει x=5 καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

Αἱ συντεταγμέναι x=0, y=0 τῆς ἀρχῆς O ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα (2)· ἄρα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ σκιῶδες μέρος ἄνωθεν τῆς ΓΔ, δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα (2).

Κατασκευάζομεν ἐπίσης τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις

$$3x-4y+8=0 \qquad (3')$$

Πρὸς τοῦτο θέτομεν x=0, ὁπότε ἡ (3′) δίδει y=2 καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον E.

Ἐὰν y=0, ἡ (3′) δίδει $x=-\frac{8}{3}$ καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον Z.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν EZ.

Αἱ συντεταγμέναι x=0, y=0 τῆς ἀρχῆς ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα (3) καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται πρὸς τὸ σκιῶδες μέρος, ἄνωθεν τῆς EZ, δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα (3).

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ τέμνονται καὶ σχηματίζουν ἕνα τρίγωνον ΚΛΜ, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σκιῶδες.

Αἱ συντεταγμέναι τῶν διαφόρων σημείων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, εἶναι αἱ λύσεις τῶν ἀνισοτήτων τοῦ δοθέντος συστήματος.

'Ασκήσεις

Νὰ σημειωθῇ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἡ θέσις τῶν σημείων: (697).

1977. Α(−3, +1), Γ(−4, −2), Ε(+3, 0), Κ(−4, −2).

1978. Β(0, −4), Δ(+1, −3), Ζ(0, −3), Θ(+1, −3).

Τίνος γεωμετρικοῦ σχήματος εἶναι κορυφαὶ τὰ κάτωθι σημεῖα: (698).

1979. Α(−1, −2), Β(5, −2), Γ(5, 4), Δ(+1, 4)

1980. Α(−3, −5), Β(1, −5), Γ(2, 2), Δ(−3, 2).

Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ κάτωθι σημεῖα: (698).

1981. (3, −5), (3, 8), (3, 0), (3, −2)

1982. (−7, −1), (7, −1), (2, −1), (−5, −1).

"Αν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ἑκάστης σειρᾶς, ποίαν γραμμὴν παριστάνουν;

1983. (699). Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ κάτωθι συναρτήσεις:

$$y=2x, \quad y=-3x, \quad y=-\frac{1}{2}x, \quad y=-\frac{3}{2}x.$$

Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ κάτωθι συναρτήσεις: (700).

1984. $y=3x+4$

1985. $y=-2x+1$

1986. $y=\frac{2}{5}x-4$

1987. $y=\frac{2x+2}{3}$.

Νὰ λυθοῦν γραφικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις: (701).

1988. $2x+4=0$

1989. $4x-8=0$

1990. $\frac{3x+9}{2}=0$

1991. $\frac{x+6}{2}=1$

1992. $\frac{3x}{2}-\frac{x}{4}=-\frac{5}{2}$

1993. $\frac{4x}{3}-2=0$.

Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα:

1994. Α(−3, 1) καὶ Β(2, 5)

1995. Α(+1, −1) καὶ Β(+7, +2)

1996. Α(+3, +2) καὶ Β(0, −5)

1997. Α(0, +2) καὶ Β(+8, −2)

1998. Α(+5, −2) καὶ Β(−1, −2)

1999. $M_1(x_1, y_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$.

2000. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $A(2, -5)$ καὶ ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως $\lambda=\frac{3}{5}$.

2001. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ καὶ ἔχει γωνιακὸν συντελεστὴν λ.

2002. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἔχει συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχήν:

1. $x=-\frac{3}{5}$ καὶ $y=\frac{2}{3}$ 2. $x=\alpha$ καὶ $y=\beta$.

2003. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον $M(3, 7)$.

2004. Αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν συντεταγμένας $A(2, 5)$, $B(-3, 2)$, $\Gamma(1, -4)$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του καὶ αἱ συντεταγμέναι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του.

2005. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων τοῦ προηγουμένου τριγώνου.

2006. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $A(3, 0)$ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $2x+y=5$.

2007. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ παράμετρος μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$(\mu+3)x-(\mu+1)y=2, \quad (\mu-2)x-(\mu+2)y=5$$

παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους.

2008. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ παράμετροι λ καὶ μ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$(\lambda+2)x+(\mu-2)y=3\lambda\mu, \quad (\lambda-1)x+(\mu+1)y=2\lambda\mu$$

παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2009. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ παράμετρος μ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $(\mu+2)x-\mu y=7$ παριστάνῃ εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $2x+3y=1$.

Νὰ λυθοῦν γραφικῶς αἱ ἀνισότητες:

2010. $2x-5y-10<0$ **2011.** $x+3y-6<0$

2012. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}+1>0$ **2013.** $3x+4y-2<0$.

Νὰ λυθοῦν γραφικῶς τὰ κάτωθι συστήματα ἀνισοτήτων:

2014. $x+y>0, \quad x-3y>0, \quad y-3<0$

2015. $2x-3y+6>0, \quad 3x+2y-6<0, \quad x-4y+4<0$.

2016. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα ἔχουν συντεταγμένας ἀντιστοίχως $(-2, +1)$, $(+1, +4)$ καὶ $(+4, +2)$.

Νὰ σχηματισθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀπὸ κάθε κορυφὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν του. Νὰ σχηματισθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου.

2017. Δίδεται τὸ σημεῖον Α τοῦ ἄξονος $x'x$ καὶ ἡ τετμημένη του α, καὶ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ τοῦ ἄξονος yy', τῶν ὁποίων αἱ τεταγμέναι εἶναι β καὶ γ ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ σχηματισθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἔπειτα αἱ ἐξισώσεις τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου.

2ον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Η τοῦ ἄξονος $x'x$, καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ τετμημένη τοῦ Η, συναρτήσει τῶν α, β, γ.

'Εφαρμογή: $\alpha=8$, $\beta=6$, $\gamma=-4$.

2018. Δείξατε, ὅτι, ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ δύο εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις $\alpha x+\beta y=\gamma$ καὶ $Ax+By=\Gamma$, τέμνωνται καθέτως, εἶναι ἡ $\alpha A+\beta B=0$.

2019. Δίδονται τὰ σημεῖα $M_1(x_1, y_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$. Δείξατε, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας M_1M_2 τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2020. Αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τριγώνου $M_1M_2M_3$ ἔχουν συντεταγμένας

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \quad M_3(x_3, y_3).$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του.

2021. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις $x-2y=-2$ (1), $2x-y=5$ (2), $3x+4y=24$ (3).
'Εξηγήσατε, διατὶ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ προσδιορίσατε τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τούτου.

2022. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha_1x+\beta_1y=\gamma_1 \quad (1), \qquad \alpha_2x+\beta_2y=\gamma_2 \quad (2), \qquad \alpha_3x+\beta_3y=\gamma_3 \quad (3)$$

παριστάνουν τρεῖς εὐθείας, διερχομένας διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

---

* ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ. ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

---

1. Ὁρισμοὶ καὶ σχετικὰ θεωρήματα

417. Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις. Διοφαντικὴ ἐξίσωσις. Εἰς τὴν § 310 εἴδομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ (1) ἔχει ἄπειρα ζεύγη λύσεων, διότι εἰς κάθε τιμὴν τοῦ y, ἀκεραίαν ἢ κλασματικήν, ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ x.

Πολλάκις ὅμως εὑρισκόμεθα εἰς τὴν ἀνάγκην, ἐξ ὅλων τῶν ἀπείρων ζευγῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς, νὰ λάβωμεν μόνον τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων x καὶ y.

Ἡ ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἔχει ὡς σκοπὸν νὰ ἀναζητῇ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ λέγεται διοφαντικὴ ἐξίσωσις.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

418. Θεώρημα I. ***Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι συντελεσταὶ α καὶ β τῶν x καὶ y τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ ἔχουν κοινὸν διαιρέτην, τὸν ὁποῖον δὲν ἔχει ὁ γ, ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει καμμίαν ἀκεραίαν λύσιν***

Ἀπόδειξις : Ἐὰν οἱ x καὶ y εἶχον ἀκεραίαν τιμήν, τότε τὰ αx καὶ βy θὰ ἦσαν ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι.

Κάθε κοινὸς διαιρέτης τῶν α καὶ β, π.χ. ὁ δ, ὡς διαιρῶν τοὺς α καὶ β, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν αx καὶ βy καὶ ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμά των $\alpha x+\beta y$ ἢ τὸ ἴσον του γ, ὅπερ ἄτοπον· διότι ἐξ ὑποθέσεως ὁ γ δὲν διαιρεῖται διὰ δ. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν $\alpha x+\beta y=\gamma$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἀκεραίαν λύσιν.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι, ἐάν, μετὰ τὴν διαίρεσιν καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, διὰ τῶν κοινῶν παραγόντων τῶν α, β, γ, οἱ συντελεσταὶ τῶν x καὶ y δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις δὲν περιέχει καμμίαν ἀκεραίαν λύσιν.

419. Θεώρημα ΙΙ. ***Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῶν x καὶ y τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν.***

Ἀπόδειξις: Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y=\gamma$ ὡς πρὸς x καὶ εὑρίσκομεν $x=\dfrac{\gamma-\beta y}{\alpha}$.

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν y τὰς α διαδοχικὰς τιμὰς

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots(\alpha-1)$$

καὶ ἐκτελέσωμεν κάθε φορὰν τὴν διαίρεσιν τοῦ $(\gamma-\beta y)$ διὰ τοῦ α εἰς τρόπον, ὥστε τὸ πηλίκον νὰ εἶναι πάντοτε θετικόν, τὰ δυνατὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων θὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots(\alpha-1).$$

Τὰ ὑπόλοιπα αὐτά, ποὺ θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι διάφορα μεταξύ των· διότι, ἂν δώσωμεν εἰς τὸν y δύο διαφόρους τιμὰς μ καὶ ν, μικροτέρας τοῦ α καὶ παραστήσωμεν μὲ π καὶ π′ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν $\gamma-\beta\mu$ καὶ $\gamma-\beta\nu$ διὰ τοῦ α καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων εἶναι ἴσα μὲ υ, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$\gamma-\beta\mu=\alpha\pi+\upsilon \quad (1), \qquad \gamma-\beta\nu=\alpha\pi'+\upsilon \quad (2)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\beta(\nu-\mu)=\alpha(\pi-\pi').$$

Ἀλλὰ τότε ὁ α, ὡς διαιρῶν τὸ $\alpha(\pi-\pi')$, ὡς πολλαπλάσιόν του, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\beta(\nu-\mu)$ καὶ ἐπειδὴ ὁ α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β ἐξ ὑποθέσεως, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα $(\nu-\mu)$ ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι ἡ διαφορὰ $(\nu-\mu)$ εἶναι μικροτέρα τοῦ α, ἐφ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ μ ἐλήφθησαν ἐξ ὑποθέσεως μικρότεροι τοῦ α.

Τὸ ἄτοπον αὐτὸ προέκυψεν, διότι ὑπετέθη, ὅτι δύο ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα.

Τὰ ὑπόλοιπα λοιπόν, ποὺ θὰ λάβωμεν, θὰ εἶναι ὅλα διάφορα καὶ κατὰ συνέπειαν ἕνα ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μηδέν· ἑπομένως ὑπάρχει μία ἀκεραία τιμὴ τοῦ y μικροτέρα τοῦ α, ἡ ὁποία καθιστᾷ καὶ τὸν x ἀκέραιον.

420. Θεώρημα III. ***Ὅταν γνωρίζωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ (1), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπειρίαν τοιούτων λύσεων.***

Ἀπόδειξις : Ἔστω, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς (1) εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τότε ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι ἡ

$$x=x_0 \quad \text{καὶ} \quad y=y_0.$$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ἀπειρίαν λύσεων.

Ἐπειδὴ $x=x_0$ καὶ $y=y_0$, ἡ (1) γράφεται $\alpha x_0+\beta y_0=\gamma$ (2).

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha(x-x_0)=-\beta(y-y_0) \qquad (3)$$

ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1).

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $x-x_0=-\dfrac{\beta(y-y_0)}{\alpha}$ (4)

Διὰ νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν ἀκεραίαν τιμὴν y μία ἀκεραία τιμὴ τοῦ x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ α νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον $\beta(y-y_0)$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ὁ α δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸν β, ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι πρῶτος πρὸς αὐτόν, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα $(y-y_0)$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ λ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $(y-y_0)$ διὰ τοῦ α, ἤτοι ἂν θέσωμεν $\dfrac{y-y_0}{\alpha}=\lambda$ (5)

(ὅπου λ παριστάνει οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) θὰ ἔχωμεν: ἐκ μὲν τῆς (4)

$$x-x_0=-\beta\lambda \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\mathbf{x=x_0-\beta\lambda}}$$

ἐκ δὲ τῆς (5) $\quad y-y_0=\alpha\lambda \quad$ ἢ $\quad \boxed{\mathbf{y=y_0+\alpha\lambda}}$ (6)

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λ δύναται νὰ εἶναι, ἀδιαφόρως, θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς οἱ τύποι (6) δύναται νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\mathbf{x=x_0+\beta\lambda}} \qquad \boxed{\mathbf{y=y_0-\alpha\lambda}} \qquad (7)$$

Ἐκ τῶν τύπων (6) ἢ (7) συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) ἔχει ἀπειρίαν λύσεων.

Ὥστε, ὅταν γνωρίζωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν, $x=x_0$, $y=y_0$, τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x,

ἂν προσθέσωμεν εἰς τὴν γνωστὴν τιμὴν τοῦ x τὸ γινόμενον τοῦ λ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ y, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται μὲ τὸ σημεῖον, ποὺ ἔχει (ἢ μὲ ἀντίθετον σημεῖον), τὰς δὲ τιμὰς τοῦ y εὑρίσκομεν, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὴν γνωστὴν τιμὴν τοῦ y τὸ γινόμενον τοῦ λ ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ x, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται μὲ σημεῖον ἀντίθετον (ἢ μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον).

2. Διάφοροι τρόποι εὑρέσεως τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$

421. Εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$. Ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα θεωρήματα, ὅταν εὕρωμεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς. ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους

$$x=x_0-\beta\lambda \quad y=y_0+\alpha\lambda \qquad (A)$$

ἢ

$$x=x_0+\beta\lambda \quad y=y_0-\alpha\lambda \qquad (B)$$

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὰς διαφόρους μεθόδους, διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x+\beta y=\gamma.$$

Παράδειγμα 1ον. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως*

$$2x+3y=0.$$

Ἐπειδὴ ὁ γ εἶναι μηδέν, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $x=0$ καὶ $y=0$. Ἔχομεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν, $x=0$, $y=0$ καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (A) ἢ (B). Πράγματι, ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (A) θέσωμεν $x_0=0$, $y_0=0$, λαμβάνομεν

$$x=0-3\lambda, \quad y=0+2\lambda.$$

Ἐὰν δώσωμεν τώρα εἰς τὸ λ διαφόρους ἀκεραίας τιμάς, θετικὰς ἢ ἀρνητικάς, π.χ. $-2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots$ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως

$x= 6, 3, 0, -3, -6, -9\ldots$

$y=-4, -2, 0, 2, 4, 6\ldots$

Ὁ κάτωθι πίναξ συνοψίζει τὰς τιμὰς τῶν λ, x, y.

λ	—2	—1	0	1	2	3	4	5	...
x	6	3	0	—3	—6	—9	—12	—15	...
y	—4	—2	0	2	4	6	8	10	...

Παράδειγμα 2ον. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως*

$$x+3y=8.$$

Ἂν θέσωμεν $y=0$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δίδει $x=8$. Ἔχομεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x_0=8$, $y_0=0$. Συνεπῶς ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=8-3\lambda, \quad y=0+1\cdot\lambda.$$

Ὁ κάτωθι πίναξ περιέχει τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

λ	— 1	0	1	2	3	4	5	....
x	11	8	5	2	—1	—4	—7	....
y	— 1	0	1	2	3	4	5	....

Παράδειγμα 3ον. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως*

$$5x-8y=2.$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ 5 καὶ 8 τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν.

Λύομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν πρὸς x (ἐπειδὴ ἔχει μικρότερον συντελεστὴν) καὶ εὑρίσκομεν $x=\dfrac{2+8y}{5}$ (1)

Δίδομεν τώρα εἰς τὸν y μίαν ἀπὸ τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4, τὸ πλῆθος τῶν ὁποίων ὁρίζει ὁ συντελεστὴς 5, καὶ παρατηροῦμεν ποία ἀπὸ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ y καθιστᾷ τὸν x ἀκέραιον.

Ἐὰν θέσωμεν $y=1$, ἡ (1) δίδει $x=\dfrac{2+8}{5}=2$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x_0=2$, $y_0=1$ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ὅλαι αἱ ἄλλαι ἀκέραιαι λύσεις της δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=2+8\lambda, \quad y=1+5\lambda.$$

Ὁ κάτωθι πίναξ περιέχει τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

λ	— 2	—1	0	1	2	3	....
x	—14	—6	2	10	18	26	....
y	— 9	—4	1	6	11	16	....

Παράδειγμα 4ον. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως*

$$65x+47y=101 \quad (1)$$

Λύομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν πρὸς y (διότι ἔχει μικρότερον συντελεστὴν) καὶ ἔχομεν

$$y=\frac{101-65x}{47} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{47\cdot 2+7-47x-18x}{47}$$

$$\text{ἢ} \quad y=(2-x)+\frac{7-18x}{47} \quad (2)$$

'Εὰν δώσωμεν εἰς τὸν x τὴν τιμὴν 3, τὸ κλάσμα $\frac{7-18x}{47}$ γίνεται ἀκέραιος καὶ ἴσος μὲ —1. 'Επομένως ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y, ποὺ δίδει ἡ (2) εἶναι $y=(2-3)+(-1)=-2$.

"Εχομεν λοιπὸν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x_0=3$ καὶ $y_0=-2$ καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων $x=3-47\lambda$ καὶ $y=-2+65\lambda$.

'Ασκήσεις : 2023, 2024, 2025.

3. 'Ακέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$

422 'Ακέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως : $\alpha x+\beta y=\gamma$.

Πρόβλημα. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως*

$$\alpha x+\beta y=\gamma \quad (1)$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

Περίπτωσις I. *Οἱ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑποθέτομεν, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι θετικοί· διότι, ἐὰν εἶναι ἀρνητικοί, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῆς ἐξισώσεως (1), ὁπότε θὰ γίνουν θετικοί.

Ἐὰν ὁ γνωστὸς ὅρος γ εἶναι ἀρνητικός, ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει προφανῶς καμμίαν θ ε τ ι κ ὴ ν λ ύ σ ι ν.

Ἐὰν ὁ γ εἶναι θετικός, δηλ. ὁμόσημος πρὸς τοὺς α καὶ β, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν καὶ ἔστω αὕτη $x=x_0$, $y=y_0$. Ἑπομένως ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=x_0+\beta\lambda, \quad y=y_0-\alpha\lambda \tag{2}$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y θ ε τ ι κ α ί, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$x_0+\beta\lambda>0 \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad y_0-\alpha\lambda>0 \tag{4}$$

Ἡ ἀνισότης (3) ἀληθεύει διὰ $\lambda>-\dfrac{x_0}{\beta}$.

Ἡ ἀνισότης (4) ἀληθεύει διὰ $\lambda<\dfrac{y_0}{\alpha}$.

Αἱ ἀνισότητες (3) καὶ (4) συναληθεύουν διὰ

$$-\frac{x_0}{\beta}<\lambda<\frac{y_0}{\alpha} \tag{5}$$

Ἡ σχέσις (5) ὑφίσταται πάντοτε, διότι τὸ $\dfrac{y_0}{\alpha}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $-\dfrac{x_0}{\beta}$.

Πράγματι, ἡ ἀνισότης $\dfrac{y_0}{\alpha}>-\dfrac{x_0}{\beta}$ γίνεται $\alpha x_0+\beta y_0>0$ ἢ $\gamma>0$. Ἀλλὰ ἡ τελευταία ἀνισότης ὑφίσταται ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα καὶ ἡ

$$\frac{y_0}{\alpha}>-\frac{x_0}{\beta}.$$

Ἐὰν δὲν ὑπάρχουν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν $-\dfrac{x_0}{\beta}$ καὶ $\dfrac{y_0}{\alpha}$ τότε ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει ἀ κ ε ρ α ί α ς κ α ὶ θ ε τ ι κ ὰ ς λύσεις.

Κάθε ἀκεραία τιμὴ τοῦ λ θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἀλλὰ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν $-\dfrac{x_0}{\beta}$ καὶ $\dfrac{y_0}{\alpha}$ δίδει ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y.

Περίπτωσις II. *Οἱ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν γενικὴν λύσιν

$$x=x_0-\beta\lambda, \quad y=y_0-\alpha\lambda.$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y θετικαί, πρέπει νὰ εἶναι

$$x_0-\beta\lambda>0 \quad \text{καὶ} \quad y_0-\alpha\lambda>0.$$

Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας αὐτὰς λαμβάνομεν $\lambda < \frac{x_0}{\beta}$ καὶ $\lambda < \frac{y_0}{\alpha}$.
Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν λ ὅλας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τὰς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μικροτέραν ἀκεραίαν τιμὴν τῶν $\frac{x_0}{\beta}$ καὶ $\frac{y_0}{\alpha}$ καὶ ἑπομένως τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y = \gamma$ εἶναι ἄπειρον.

4. Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως

423. Πρόβλημα 1ον. *Μία τάξις μαθητῶν καὶ μαθητριῶν συνέλεξεν 100 000 δρχ. εἰς ἔρανον ὑπὲρ ἑνὸς φιλανθρωπικοῦ σκοποῦ. Ἕκαστος τῶν μαθητῶν προσέφερεν 1 900 δραχμὰς καὶ ἑκάστη μαθήτρια 1100 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ πόσους μαθητὰς καὶ πόσας μαθητρίας ἔχει ἡ τάξις.*

Λύσις : Ἔστω, ὅτι ἡ τάξις εἶχε x μαθητὰς καὶ y μαθητρίας. Οἱ x μαθηταὶ προσέφεραν 1 900x δρχ. καὶ αἱ y μαθήτριαι προσέφεραν 1 100y δρχ. Ἐπειδὴ τὸ συγκεντρωθὲν ποσὸν ἦτο 100 000 δρχ. ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$1\,900x + 1\,100y = 100\,000 \quad \text{ἢ} \quad 19x + 11y = 1\,000 \qquad (1)$$

Πρέπει νὰ εὕρωμεν τώρα τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1). Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$y = \frac{1\,000 - 19x}{11} \qquad (2)$$

Ἐὰν θέσωμεν $x=4$, ἡ (2) δίδει $y=84$. Ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x = 4 - 11\lambda \quad \text{καὶ} \quad y = 84 + 19\lambda \qquad (3)$$

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y παραδεκταί, πρέπει νὰ εἶναι θετικαί· δηλ. πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$4 - 11\lambda > 0 \quad \text{καὶ} \quad 84 + 19\lambda > 0 \qquad (4)$$

Ἡ πρώτη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\lambda < \frac{4}{11}$.

Ἡ δευτέρα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\lambda > -\frac{84}{19}$.

Καὶ αἱ δύο ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-\frac{84}{19} < \lambda < \frac{4}{11}$.

Αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ λ, διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (4), εἶναι $-4, -3, -2, -1, 0$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τοὺς τύπους (3) τὸ λ μὲ καθεμίαν ἀπὸ τὰς ιμάς του αὐτὰς καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν x καὶ y.

Ὁ κάτωθι πίναξ παρέχει τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y, δηλ. τὸν ἀριθμὸν ῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν, διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ λ.

	λ	−4	−3	−2	−1	0
Μαθηταὶ	x	48	37	26	15	4
Μαθήτριαι	y	8	27	46	65	84

424. Πρόβλημα 2ον. *Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται κατὰ 18 μικρότερος, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του.*

Λύσις: Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἔχει x δεκάδας καὶ y μονάδας, γράφεται $10x+y$. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία του, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ y δεκάδας καὶ x μονάδας καὶ ἑπομένως θὰ γράφεται $10y+x$. Ἐπειδὴ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ πρώτου κατὰ 18 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$10x+y=10y+x+18 \quad \text{ἢ} \quad x-y=2 \qquad (1)$$

Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1). Ἐὰν θέσωμεν $y=0$, ἡ (1) δίδει $x=2$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν $x=2$, $y=0$.

Ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων $x=2-\lambda$, $y=0-\lambda$ (2)

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως παραδεκταὶ αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x καὶ y, πρέπει νὰ εἶναι: 1ον. θετικαὶ καὶ 2ον. μικρότεραι τοῦ 10.

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y θ ε τ ι κ α ί, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $2-\lambda>0$ καὶ $-\lambda>0$.

Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $\lambda<0$ (3)

Διὰ νὰ εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y μικρότεραι τοῦ 10, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$2-\lambda<10 \quad \text{καὶ} \quad -\lambda<10.$$

Αἱ ἀνισότητες αὐταὶ συναληθεύουν διὰ $\lambda>-8$ (4)

Αἱ ἀνισότητες (3) καὶ (4) συναληθεύουν διὰ $-8<\lambda<0$.

Ὥστε αἱ ἀκέραιαι τιμαί, τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ὁ λ εἶναι αἱ −7, −6, −5, −4, −3, −2, −1.

Ἐὰν $\lambda=-1$, αἱ (2) δίδουν $x=3$, $y=1$ καὶ ὁ ζητούμενος ἀριθ. εἶναι 31
» $\lambda=-2$, αἱ (2) » $x=4$, $y=2$ καὶ ὁ » » » 42
» $\lambda=-3$, αἱ (2) » $x=5$, $y=3$ καὶ ὁ » » » 53

. . . .

» $\lambda=-7$, αἱ (2) » $x=9$, $y=7$ καὶ ὁ » » » 97

Ἀσκήσεις : 2026, 2027, 2028, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034.

5. Ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους

425. Ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις τοῦ συστήματος

$$\left\{\begin{array}{l|r} 3x+5y+6\omega=54 & -3 \\ 9x+3y+8\omega=70 & 5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ τοῦ y εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀπαλείφομεν τὸν y μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ -3 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 5 καὶ ἔχομεν

$$-9x-15y-18\omega=-162$$
$$45x+15y+40\omega=\ 350.$$

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$36x+22\omega=188 \quad \text{ἢ} \quad 18x+11\omega=94 \qquad (3)$$

Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς (3).

Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (3) πρὸς ω καὶ ἔχομεν

$$\omega=\frac{94-18x}{11} \qquad (3')$$

Ἐὰν λάβωμεν $x=4$, ἡ (3') δίδει $\omega=2$.

Ὥστε ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (3) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων $\quad x=4+11\lambda, \quad \omega=2-18\lambda \qquad (4)$

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x καὶ ω θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ἔχομεν $\quad 3(4+11\lambda)+5y+6(2-18\lambda)=54 \quad$ ἢ $\quad 5y-141\lambda=30 \qquad (5)$

Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5). Ἡ ἐξίσωσις (5) γράφεται $\quad y=\dfrac{30+141\lambda}{5}\quad$ καὶ διὰ $\lambda=0$, δίδει $y=6$. Ὥστε ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (5) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$y=6-141\lambda', \quad \lambda=0-5\lambda' \qquad (6)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ λ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ ἔχομεν

$$x=4-55\lambda', \quad \omega=2+90\lambda'.$$

Ὥστε ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$x=4-55\lambda', \quad y=6-141\lambda', \quad \omega=2+90\lambda' \qquad (7)$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῶν x, y, ω θετικαί, πρέπει νὰ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$4-55\lambda'>0, \quad 6-141\lambda'>0, \quad 2+90\lambda'>0.$$

Ἡ πρώτη ἀνισότης ἀληθεύει διὰ $\lambda'<\frac{4}{55}$, ἡ δευτέρα ἀληθεύει διὰ $\lambda'<\frac{6}{141}$ καὶ ἡ τρίτη ἀληθεύει διὰ $\lambda'>-\frac{2}{90}$.

Κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ τρεῖς ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ

$$-\frac{2}{90}<\lambda'<\frac{6}{141}.$$

Ἡ μόνη ἀκεραία τιμὴ τοῦ λ′, ποὺ ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν αὐτὴν εἶναι $\lambda'=0$.

Διὰ $\lambda'=0$, αἱ (7) δίδουν $x=4$, $y=6$, $\omega=2$.

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν μόνον ἀκεραίαν καὶ θετικὴν λύσιν, τὴν $x=4$, $y=6$, $\omega=2$.

Ἀσκήσεις: 2038. 2039, 2042, 2043, 2049, 2051.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν κάτωθι ἐξισώσεων: (906).

2023. 1. $7x+8y=10$ 2. $3x-5y=1$

2024. 1. $7x+10y=297$ 2. $9x-7y=28$

2025. 1. $13x+29y=120$ 2. $18x-43y=240$.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν ἀκεραίας καὶ θετικὰς τὰς κάτωθι παραστάσεις: (907).

2026. 1. $\frac{x-1}{2}$ 2. $\frac{x-3}{11}$

2027. 1. $\frac{x-2}{3}$ 2. $\frac{x-5}{19}$

2028. 1. $\frac{3x-10}{7}$ 2. $\frac{11x-8}{17}$

2029. 1. $\frac{x-10}{29}$ 2. $\frac{16x-1}{5}$.

2030. (908). Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{77}{65}$ εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν δύο ἄλλων κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὰς 5 καὶ 13. (Πολυτεχνεῖον 1931)

2031. (909). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ὁ ἀριθμητής του αὐξηθῇ κατὰ 4 καὶ ὁ παρονομαστής του κατὰ 5, νὰ γίνεται τὸ κλάσμα ἴσον μὲ $\frac{3}{4}$.

2032. (910). Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ 5 εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ 12 εἰς τὸν παρονομαστήν.

2033. (911). Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς Α, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 3 καὶ διαιρούμενος διὰ 19 δίδει ὑπόλοιπον 10.

2034. (912). Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ 7 νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου κατὰ 3.

2035. (913). Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐξηθὲν κατὰ 4, νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τέταρτον τῆς διαφορᾶς τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 45.

2036. (914). Πόσα νομίσματα τῶν 5 δραχμῶν καὶ τῶν 2 δραχμῶν πρέπει νὰ θέσωμεν τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ τὰ κέντρα των νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν μῆκος ἑνὸς μέτρου. Αἱ διάμετροι τῶν πενταδράχμων καὶ διδράχμων εἶναι 37 χιλιοστόμετρα καὶ 27 χιλιοστόμετρα ἀντιστοίχως.

2037. (905'). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$, ὅπου α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως, κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχήν, τοῦ γ διὰ αβ.

2038. (906'). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} 3x+5y+6\omega=104 \\ 9x+3y+8\omega=164 \end{array}\right\}$$

2039. (907'). Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε, ἐὰν πολλαπλασιασθοῦν ἀντιστοίχως ἐπὶ 3, 5 καὶ 7, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων των νὰ ἰσοῦται μὲ 560· καὶ τοιοῦτοι ὥστε, ἐὰν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 9, 25 καὶ 49, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων των νὰ ἰσοῦται μὲ 2 920.

2040. (908'). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς Α, ὅστις διαιρούμενος διὰ 11 δίδει ὑπόλοιπον 3· διαιρούμενος διὰ 17 δίδει ὑπόλοιπον 10 καὶ διαιρούμενος διὰ 37 δίδει ὑπόλοιπον 13.

2041. (909'). Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 20. 'Εὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν 16 καὶ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν τὰ ψηφία του γραφοῦν κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

2042. (910'). 'Ηγόρασέ τις μὲ 100 δεκάδραχμα 100 διάφορα ἀντικείμενα. Ἕκαστον ἀντικείμενον τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται ἥμισυ δεκάδραχμον, ἕκαστον τοῦ δευτέρου εἴδους 2 δεκάδραχμα καὶ ἕκαστον τοῦ τρίτου εἴδους 4 δεκάδραχμα. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἀντικείμενα ηγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

2043. (911'). Κτηνοτρόφος ήγόρασε μὲ 100 λίρας 100 ζῶα, μόσχους, πρόβατα καὶ ἀρνιά. Ἕκαστος μόσχος τιμᾶται $3\,^1/_2$ λίρας, ἕκαστον πρόβατον $1\,^1/_2$ λίρας καὶ ἕκαστον ἀρνίον 1/2 λίρας. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ζῶα ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

2044. (912'). Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του περιλαμβάνεται μεταξὺ 10 καὶ 20 καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων ἰσοῦται μὲ τὰ δύο τρίτα τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων.

2045. (913'). Νὰ εὑρεθῇ πενταψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν χιλιάδων ἰσοῦται μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων καὶ μονάδων, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων χιλιάδων εἶναι 3.

2046. (914'). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

1. $6x+22y+15\omega=77$ 2. $3x+5y+7\omega=89$.

2047. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ γ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $6x+17y=\gamma$ ἔχῃ 10 ἀκεραίας καὶ θετικὰς λύσεις.

2048. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 8 καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ ἑκατοντάδων εἶναι τριπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων.

2049. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 6 καὶ ὁ ὁποῖος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν τὰ ψηφία του γραφοῦν κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

2050. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν $\gamma<\alpha\beta$, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\gamma$ περιέχει 0 ἢ 1 ἀκεραίαν λύσιν. Ἐὰν $\gamma=\alpha\beta\mu$, περιέχει $\mu+1$ λύσεις. Ἐὰν $\gamma=\alpha\beta\mu+\upsilon$, $(\upsilon<\alpha\beta)$, περιέχει μ ἢ $\mu+1$ λύσεις, καθ' ὅσον ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=\upsilon$ περιέχει 0 ἢ 1 λύσιν (Catalan).

2051. Νὰ χωρισθῇ ὁ ἀριθμὸς 111 εἰς τρία μέρη, οὕτως ὥστε τὸ πρῶτον μέρος νὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 2, τὸ δεύτερον διὰ 5, τὸ τρίτον διὰ 7 καὶ τοιαῦτα ὥστε τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου μέρους, τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τρίτου νὰ ἔχουν ἄθροισμα 400.